Université d'Aix-Marseille **Année 2015-2016**
Licence de Mathématiques Générales - L3

Partiel du 19 novembre 2015, durée : 2h
U.E. Intégration sur $\mathbb{R}^N$ et transformée de Fourier

Les calculatrices ou autre matériel électronique, les notes de cours ou de TD ne sont pas autorisés. La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Questions du cours - Tribus et mesures.

1. Rappeler la définition d'une tribu sur un ensemble E.

2. Rappeler la définition d'une mesure.

3. Enoncer les propriétés de continuité croissante et décroissante des mesures (on ne demande pas à démontrer ces propriétés).

Exercice 1 - Mesure atomique, mesure diffuse.
Soient (E, T) un espace mesurable tel que $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est dite diffuse ssi $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure sur T est dite purement atomique s'il existe $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ pour tout $x \in S$.

1. Montrer que la seule mesure qui est à la fois diffuse et atomique, est la mesure nulle.

2. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est elle diffuse ? Est elle atomique ?

3. Les mêmes questions qu'avant pour la mesure de Dirac δ_a

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A \\ 0, & \text{si } a \notin A \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{R}$$

Exercice 2 - Fonctions mesurables et convergence en mesure.
Soient (E, T, m) un espace mesuré, avec m une mesure finie (c'est-à-dire $m(E) < +\infty$) et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\lim_{k \to +\infty} m(\{x \in E \ : \ |f(x)| \geq k\}) = 0.$$

2. En déduire que
$$\lim_{a \to +\infty} m(\{x \in E \ : \ |f(x)| \geq a\}) = 0.$$

3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ qui converge en mesure vers la fonction mesurable f. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$n \geq n_0, \ \ k \geq k_0 \implies m(\{x \in E \ : \ |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$

Exercice 3 - Convergence monotone.
Soit f une fonction positive monotone et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}, f_n(x) = f(x^n), x \in]0,1[$.

1. Justifier que f admet une limite en 0. On appelle α cette limite.

2. Justifier que pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable.

3. Dans cette question, on suppose que f est décroissante et $\alpha < +\infty$. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable et calculer $\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Dans cette question, on suppose que f est décroissante et $\alpha = +\infty$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = +\infty.$$
Indication : pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, considérer $f^\varepsilon :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f^\varepsilon = f(\varepsilon)\mathbf{1}_{]0,\varepsilon]} + f\mathbf{1}_{]\varepsilon,1[}$. Appliquer ce qui précède à la fonction f^ε et conclure en faisant tendre $\varepsilon \searrow 0$.

5. Dans cette question on suppose que f est croissante. On souhaite appliquer le théorème de convergence monotone pour calculer $\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Préciser si on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(f_n)_n$.

   (b) On considère la suite de fonctions $g_n :]0,1[\to \mathbb{R}, g_n(x) = f(x) - f_n(x), x \in]0,1[, n \geq 1$. Peut on appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(g_n)_n$?

   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int g_n(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   (d) A quel moment de la preuve on utilise le fait que f soit une fonction Lebesgue intégrable sur $]0,1[$?