Convexité et Optimisation - Octobre 2005

Durée: 2 heures - Documents, calculatrices, téléphones interdits

1. Soient $A_1 := (-1, 0)$, $A_2 := (0, 1)$ et $A_3 := (1, 0)$ trois points de R^2. Trouver le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$.

2. Lesquelles ensembles sont convexes? Si l'ensemble n'est pas convexe, préciser s'enveloppe convexe. (sans preuve)

   (a) R^2

   (b) $\emptyset$

   (c) $[0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathsf{R}$

   (d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$.

3. (a) Donner la définition d'une application affine.

   (b) Montrer que l'image par une application affine d'un ensemble convexe est convexe.

4. Quels sont les droites d'appui à l'origine du région $\{X \in \mathsf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \ \text{ et } \ y \geq 0\}$? (sans preuve)

5. Soit $f(x, y) = x^2/y$. Calculer les dérivées partielles $f'_x((a, b))$, $f'_y((a, b))$, $f'_{xx}((a, b))$, $f'_{xy}((a, b))$, $f'_{yy}((a, b))$ puis la différentielle $df_{(a,b)}(x, y)$.

6. Supposons $C \subset \mathsf{R}^2$ est convexe et soit f un application $f : C \to \mathsf{R}$.

   (a) Donner la définition de f étant convexe sur C.

   (b) Donner la définition de f étant quasi-convexe sur C.

   (c) Montrer que $f(x, y) = x^2/y$ sur $\mathsf{R} \times \mathsf{R}_+$ est convexe.

   (d) Est-ce que $f(x, y)$ est quasi-convexe? Expliquer.