ARTICLE IN PRESS

S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.1 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 1

ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

Journal of Algebra ●●● (●●●●) ●●●–●●●

JOURNAL OF Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

# Lemme d'Artin–Rees, théorème d'Izumi et fonction de Artin

Guillaume Rond

*Laboratoire E. Picard, Université P. Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France*

Reçu le 2 mars 2005

Communiqué par Paul Roberts

**Abstract**

We interpret the Artin–Rees lemma and the Izumi theorem in term of Artin function and we obtain a stable version of the Artin–Rees lemma. We present different applications of these interpretations. First we show that the Artin function of $X_1X_2 - X_3X_4$, as a polynomial in the ring of power series in more than three variables, is not bounded by an affine function. Then we prove that the Artin functions of a class of polynomials are bounded by affine functions and we use this to compute approximated integral closures of ideals.
© 2005 Elsevier Inc. All rights reserved.

*Mots-clés :* Théorème d'approximation forte de Artin ; Fonction de Artin ; Lemme d'Artin–Rees ; Théorème d'Izumi ; Clôture intégrale d'idéaux

## 1. Introduction

Nous rappelons quelques résultats d'approximation, mais nous donnons tout d'abord la définition suivante :

**Définition 1.1.** Nous appellerons couple $(A, \mathfrak{I})$ la donnée d'un anneau commutatif unitaire $A$ et d'un idéal $\mathfrak{I}$ de $A$. Nous dirons que le couple $(A, \mathfrak{I})$ est nœthérien (respectivement

*Adresse e-mail :* rond@picard.ups-tlse.fr.

0021-8693/$ – see front matter © 2005 Elsevier Inc. All rights reserved.
doi:10.1016/j.jalgebra.2005.06.037

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.2 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 2


local, complet, réduit, intègre) si l'anneau $A$ est nœthérien (respectivement local, complet, réduit, intègre).

Nous pouvons alors définir les propriétés d'approximation et d'approximation forte :

**Définition 1.2.** Soit $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien et $\hat{A}$ le complété de $A$ pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique. Nous dirons que $(A, \mathfrak{I})$ vérifie *la propriété d'approximation* (PA) (respectivement vérifie *la propriété d'approximation* pour $f$) si pour tout système d'équations polynomiales noté $f(X) = 0$ à coefficients dans $A$ (respectivement si pour le système d'équations polynomiales noté $f(X) = 0$ à coefficients dans $A$), pour toute solution $\bar{x} \in \hat{A}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une solution $x$ dans $A$ de ce système qui vérifie $x_j = \bar{x}_j \mod \mathfrak{I}^{i+1}$ pour tout $j$.

Dans le cas où $A$ est local et $\mathfrak{I}$ est son idéal maximal, nous dirons que $A$ a la propriété d'approximation.

**Définition 1.3.** Soit $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien. Nous dirons que $(A, \mathfrak{I})$ vérifie *la propriété d'approximation forte* (PAF) si pour tout système d'équations polynomiales noté $f(X) = 0$ à coefficients dans $A$, il existe une fonction à valeurs entières $\beta$ avec la propriété suivante. Soient $x \in A^n$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(x) = 0 \mod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}.$$

Alors il existe $\bar{x} \in A^n$ tel que

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad x_j \equiv \bar{x}_j \mod \mathfrak{I}^{i+1} \text{ pour tout } j.$$

La plus petite fonction vérifiant cette propriété sera appelée fonction de Artin de l'idéal $(f)$.

Là encore, si $A$ est local et $\mathfrak{I}$ est son idéal maximal, nous dirons que $A$ a la propriété d'approximation forte.

**Remarque 1.** Nous pouvons vérifier que les deux définitions précédentes ne dépendent pas des générateurs de l'idéal $(f)$. Nous parlerons donc indifféremment de système d'équations polynomiales et d'idéal de $A[X]$.

Nous avons les deux résultats suivants :

**Théorème 1.4** [2,14,15,21–23]. *Soit $(A, \mathfrak{I})$ une paire hensélienne, nœthérienne. Alors $(A, \mathfrak{I})$ possède la propriété d'approximation si $A \to \hat{A}$ est régulier (où $\hat{A}$ est le complété $\mathfrak{I}$-adique de $A$).*

Nous rappelons qu'un morphisme d'anneaux nœthériens $\varphi : A \to B$ est dit régulier si il est plat et si pour tout idéal premier $P$ de $A$, la fibre $B \otimes_A \kappa(P)$ de $\varphi$ au-dessus de $P$ est géométriquement régulière sur le corps $\kappa(P)$ (c'est-à-dire si l'anneau $B \otimes_A \Bbbk$ est régulier pour toute extension finie $\Bbbk$ de $\kappa(P)$) (cf. [13]).

**Théorème 1.5** [2,14]. *Soit $(A,\mathfrak{m})$ un couple local nœthérien. Alors si ce couple vérifie la propriété d'approximation, alors il vérifie la propriété d'approximation forte.*

Ce deuxième théorème n'est pas vrai dans le cas général. M. Spivakovsky a donné un exemple de paire hensélienne vérifiant la PA et donné un polynôme qui n'admet pas de fonction de Artin [20].

Dans le cas d'un couple local, la fonction de Artin d'un idéal $(f)$ de $A[X]$ est une mesure de la non-lissité du morphisme $A\to A[X]/(f)$, celle-ci étant égale à l'identité quand ce morphisme est lisse.

Le but de cet article est d'utiliser le lemme d'Artin–Rees [13] et le théorème d'Izumi [9,10,18] pour déterminer une certaine classe de polynômes dont les fonctions de Artin sont bornées par des fonctions affines. Nous savons qu'en général ceci est faux et a pour conséquence qu'il n'existe pas de théorie d'élimination des quantificateurs dans l'anneau des séries en plusieurs variables muni d'un langage de premier ordre de Presburger [19]. Néanmoins il existe certains cas pour lesquels ce résultat est vrai [6].

Nous utilisons ici le lemme d'Artin–Rees et le théorème d'Izumi [10] pour étudier la fonction de Artin de certains polynômes.

Nous commençons par énoncer quelques résultats de réduction. Ensuite, dans la troisième partie, nous citons le cas des systèmes d'équations linéaires qui découle du lemme d'Artin–Rees (Théorème 3.1). Nous montrons dans la quatrième partie que le théorème d'Izumi est équivalent à une majoration des fonctions de Artin d'une certaine famille de polynômes linéaires (Proposition 4.3 et Théorème 4.5) et en déduisons une version stable du lemme d'Artin–Rees (Théorème 4.6). Nous donnons ensuite différentes applications de ces deux résultats :

En cinquième partie, nous montrons que la fonction de Artin de $X_1X_2-X_3X_4$, vu comme polynôme à coefficients dans l'anneau des séries formelles en plusieurs variables, n'est pas bornée par une fonction affine.

En sixième partie, nous utilisons simultanément le lemme d'Artin–Rees et le théorème d'Izumi pour montrer que les polynômes qui sont de la forme $f\prod_{k=1}^{r}X_k^{n_k}+\sum_{j=1}^{p}f_jZ_j$ ont une fonction de Artin bornée par une fonction affine, dans le cas où l'anneau de base quotienté par l'idéal $(f_1,\dots,f_p)$ est réduit (Théorème 6.2).

Enfin, en dernière partie nous montrons que ceci implique que la fonction de Artin de certains polynômes est bornée par une fonction affine (Propositions 7.2 et 7.3) et nous utilisons ces résultats pour calculer des clôtures intégrales approchées d'idéaux (exemple à la Section 7.3).

Les anneaux considérés seront toujours commutatifs et unitaires. Nous noterons dans la suite $T=(T_1,\dots,T_N)$, $X=(X_1,\dots,X_n)$ et $f=(f_1,\dots,f_p)$. Sauf indication contraire nous noterons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local étudié quand il n'y aura aucune confusion possible.

## 2. Réductions

Nous allons ici énoncer quelques lemmes qui nous permettront de nous ramener à étudier le cas où l'anneau de base est un anneau complet régulier :

**Lemme 2.1** [14]. *Soit $(A,\mathfrak{I})$ un couple nœthérien vérifiant la PA pour l'idéal $(f)$ et tel que l'idéal de $\hat{A}[X]$ engendré par $(f)$ admette une fonction de Artin. Alors $(f)$ admet une fonction de Artin et celle-ci est égale à celle de l'idéal de $\hat{A}[X]$ engendré par $(f)$.*

**Preuve.** Soient $(f)\subset A[X]$, $\hat{\beta}$ sa fonction de Artin vu comme idéal de $\hat{A}[X]$ et $x\in A$ tel que $f(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\hat{\beta}(i)+1}$. Donc il existe $x'\in\hat{A}$ tel que $f(x')=0$ et $x'-x\in\mathfrak{I}^{i+1}$. Comme $A$ vérifie la PA pour $(f)$, il existe $\bar{x}\in A$ tel que $f(\bar{x})=0$ et $\bar{x}-x'\in\mathfrak{I}^{i+1}$.

En combinant cela on a $\bar{x}\in A$ tel que $f(\bar{x})=0$ et $x-\bar{x}\in\mathfrak{I}^{i+1}$.

Inversement, soit $\beta$ la fonction de Artin de $(f)$ vu comme idéal de $A[X]$. Soit $x\in\hat{A}$ tel que $f(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Choisissons $x'\in A$ tel que $x-x'\in\mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Nous avons alors $f(x')\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Donc il existe $\bar{x}\in A$ tel que $f(\bar{x})=0$ et $x'-\bar{x}\in\mathfrak{I}^{i+1}$. D'où $x-\bar{x}\in\mathfrak{I}^{i+1}$. □

**Lemme 2.2** [14]. *Soit $(A,\mathfrak{I})$ un couple nœthérien et $I$ un idéal de $A$. Soient $(f)$ un idéal de $\frac{A}{I}[X]$, $(F)$ un idéal de $A[X]$ égal à $(f)$ modulo $I$ et $(g_1,\dots,g_q)$ un système de générateurs de $I$. Posons*

$$G_k=F_k+\sum_j Y_{kj}g_j,\quad k=1,\dots,m.$$

*Alors si $(G)$ admet une fonction de Artin, alors $(f)$ admet une fonction de Artin bornée par celle de $(G)$.*

**Preuve.** Soient $(f)$, $(F)$ et $(G)$ comme dans l'énoncé. Soit $\beta$ la fonction de Artin de $(G)$.

Soit $x\in\frac{A}{I}$ tel que $f(x)\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}\frac{A}{I}$ avec $i\in\mathbb{N}$. Soit $x'$ un relèvement de $x$ dans $A$. Alors $F(x')\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}+I$, c'est-à-dire qu'il existe des $y_{kj}\in A$ tels que $F(x')+\sum_j y_{kj}g_j\equiv 0 \bmod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Il existe alors une solution $(\bar{x},\bar{y})$ de ce système $G=0$ avec $\bar{x}\equiv x' \bmod \mathfrak{I}^{i+1}$. Modulo $I$ cette solution convient. Et donc $(f)$ admet une fonction de Artin bornée par celle de $(G)$. □

Nous énonçons maintenant un lemme utile pour la suite :

**Lemme 2.3.** *Soit $F(X_1,\dots,X_n)\in A[X_1,\dots,X_n]$ où $(A,\mathfrak{I})$ est un couple nœthérien. Soit $I$ un idéal de $A$, $\{f_1,\dots,f_p\}$ et $\{g_1,\dots,g_q\}$ deux systèmes de générateurs de $I$. Alors les fonctions de Artin de $h_1=F(X_1,\dots,X_n)+\sum_j f_jY_j$ et de $h_2=F(X_1,\dots,X_n)+\sum_l g_lZ_l$ sont égales.*

**Preuve.** Il nous suffit de montrer le résultat quand $q=p+1$, $g_i=f_i$ pour $1\leqslant i\leqslant p$ et $g_q=g_{p+1}\in I$ est quelconque. En effet dans ce cas, par induction nous voyons que la fonction de Artin de $h_1$ (et de la même manière celle de $h_2$) est égale à la fonction de Artin de $F(X_1,\dots,X_n)+\sum_l g_lZ_l+\sum_j f_jY_j$. Donc $h_1$ et $h_2$ ont des fonctions de Artin égales.

Soit $h_1$ comme dans l'énoncé et

$$h_2:=F(X_1,\dots,X_n)+\sum_{j=1}^{p} f_jY_j+fY_{p+1}$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.•••(•••) yjabr10767 [DTD5] P.5 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 5


où $f \in I$. Nous pouvons écrire $f = \sum_j f_j u_j$ où les $u_j$ sont dans $A$. Notons $\beta_i$ la fonction de Artin de $h_i$ ($i = 1$ et 2).

• Montrons tout d'abord que $\beta_2(i) \geqslant \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soient $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_p \in A$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$h_1(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n) + \sum_j^p f_j y_j \in \mathfrak{I}^{\beta_2(i)+1}.$$

Nous avons $h_2(x, y_1, \ldots, y_p, 0) = h_1(x, y_1, \ldots, y_p)$, donc par définition de $\beta_2$, il existe $n + p + 1$ éléments $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p, \bar{y}_{p+1}$ tels que $h_2(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p, \bar{y}_{p+1}) = 0$, et $\bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\bar{y}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, $\bar{y}_{p+1} \in \mathfrak{I}^{i+1}$. Notons alors $\bar{\bar{y}}_j = \bar{y}_j + u_j \bar{y}_{p+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Nous avons alors $h_1(\bar{x}, \bar{\bar{y}}) = 0$ et $\bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\bar{\bar{y}}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Donc $\beta_2(i) \geqslant \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

• Inversement, montrons que $\beta_2(i) \leqslant \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soient $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_p, y_{p+1} \in A$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$h_2(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n) + \sum_j^p f_j y_j + f y_{p+1} \in \mathfrak{I}^{\beta_1(i)+1}.$$

Nous avons

$$h_1(x, y_1 + u_1 y_{p+1}, \ldots, y_p + u_p y_{p+1}) = h_2(x, y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}).$$

Donc par définition de $\beta_1$, il existe $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p$ tels que $h_1(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p) = 0$, et $\bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\bar{y}_j - (y_j + u_j y_{p+1}) \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Notons alors $\bar{\bar{y}}_j = \bar{y}_j - u_j y_{p+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, et $\bar{\bar{y}}_{p+1} = y_{p+1}$. Nous avons $h_2(\bar{x}, \bar{\bar{y}}) = 0$, et $\bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\bar{\bar{y}}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leqslant j \leqslant p + 1$. Donc $\beta_2(i) \leqslant \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $\beta_1 = \beta_2$. □

Nous rappelons ensuite le théorème de structure de I.S. Cohen pour les anneaux complets locaux [13].

**Définition 2.4.** Un anneau de Cohen $R$ est un corps de caractéristique 0 ou un anneau de valuation discrète complet dont le corps résiduel a une caractéristique $p > 0$ et dont l'idéal maximal est engendré par $p.1$.

**Théorème 2.5** [13]. *Soit $A$ un anneau local nœthérien complet. Alors il existe un unique anneau de Cohen $R$ tel que $A$ soit isomorphe au quotient d'un anneau de séries formelles $R[\![T]\!]$.*

## 3. Fonction de Artin d'un système linéaire et lemme d'Artin–Rees

Nous avons le résultat suivant qui nous donne la forme de la fonction de Artin d'un système d'équations linéaires et qui montre au passage que dans le cas linéaire, l'existence

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.6 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 6


de la fonction de Artin n'est absolument pas liée à la propriété hensélienne mais au fait que l'anneau de base est nœthérien.

**Théorème 3.1.** *Soit*

$$\left(f_1^1X_1+\cdots+f_n^1X_n,\ldots,f_1^pX_1+\cdots+f_n^pX_n\right)$$

*un idéal de polynômes linéaires noté* $(f)$ *de* $A[X_1,\ldots,X_n]$ *où* $(A,\mathfrak{I})$ *est un couple. Alors l'idéal* $(f)$ *admet une fonction de Artin bornée par la fonction* $i\mapsto i+i_0$ *si et seulement si nous avons la version faible du lemme de Artin–Rees suivante* :

$$I\cap\overline{\mathfrak{I}^i}\subset\mathfrak{I}^{i-i_0}I\quad\textit{pour } i\geqslant i_0$$

*où* $I$ *est le sous-*$A$*-module de* $A^p$ *engendré par les* $(f_j^1,\ldots,f_j^p)$ *pour* $1\leqslant j\leqslant n$ *et* $\overline{\mathfrak{I}^i}$ *le sous-*$A$*-module de* $A^p$ *égal à* $\bigoplus_{k=1}^p\mathfrak{I}^i$ *pour tout entier* $i$.

*En particulier, si* $(A,\mathfrak{I})$ *est un couple nœthérien,* $(f)$ *admet une fonction de Artin bornée par une fonction linéaire. De plus le plus petit* $i_0$ *tel que* $i\mapsto i+i_0$ *majore la fonction de Artin de* $(f)$ *ne dépend que du* $A$*-module* $I$.

**Preuve.** Avoir $I\cap\overline{\mathfrak{I}^{i+1}}\subset\mathfrak{I}^{i+1-i_0}I$ pour $i_0$ une constante positive, cela est équivalent à ce que pour tout $x_1,\ldots,\ x_n\in A$ tels que

$$\begin{cases} f_1^1x_1+\cdots+f_n^1x_n\in\mathfrak{I}^{i+1},\\ \qquad\vdots\\ f_1^px_1+\cdots+f_n^px_n\in\mathfrak{I}^{i+1}\end{cases}\tag{1}$$

il existe $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\mathfrak{I}^{i+1-i_0}$ tels que

$$\begin{cases} f_1^1x_1+\cdots+f_n^1x_n=f_1^1\varepsilon_1+\cdots+f_n^1\varepsilon_n,\\ \qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ f_1^px_1+\cdots+f_n^px_n=f_1^p\varepsilon_1+\cdots+f_n^p\varepsilon_n.\end{cases}$$

En posant $\bar{x}_k=x_k-\varepsilon_k$, cela est équivalent à ce que pour tout $x_1,\ldots,x_n\in A$ qui vérifient le système (1) précédent, il existe $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in A$ tels que

$$\begin{cases} f_1^1\bar{x}_1+\cdots+f_n^1\bar{x}_n=0,\\ \qquad\vdots\\ f_1^p\bar{x}_1+\cdots+f_n^p\bar{x}_n=0\end{cases}$$

et $\bar{x}_k-x_k\in\mathfrak{I}^{i+1-i_0}$. Cette dernière condition est exactement équivalente à dire que l'idéal $(f)$ admet une fonction de Artin bornée par $i\mapsto i+i_0$.

La dernière assertion découle du fait que si $A$ est nœthérien nous avons le lemme d'Artin–Rees (cf. [13], par exemple). □

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.7 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 7



**Remarque 2.** T. Wang [24] a caractérisé le plus petit $i_0$ de la proposition précédente, dans le cas où $A = \Bbbk[\![T_1, \dots, T_N]\!]$ et $\mathfrak{I}$ est son idéal maximal, en terme de bases standards.

## 4. Théorème d'Izumi et version stable du lemme d'Artin–Rees

### 4.1. *Théorème d'Izumi et majoration stable de la fonction de Artin d'une famille de polynômes linéaires*

Nous donnons ici l'énoncé d'un théorème d'Izumi que nous interprétons en terme de linéarité de la fonction de Artin d'un certain type de polynôme. Nous donnons tout d'abord une définition :

**Définition 4.1.** Soit $(R, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien où $R$ est local et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire avec $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $R$. Nous noterons $\nu_{R,\mathfrak{I}}$ la fonction à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par

$$\forall x \in R \setminus \{0\}, \quad \nu_{R,\mathfrak{I}}(x) = n \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathfrak{I}^n \quad \text{et} \quad x \notin \mathfrak{I}^{n+1}$$
$$\text{et} \quad \nu_{R,\mathfrak{I}}(0) = \infty.$$

On appelle cette fonction l'ordre $\mathfrak{I}$-adique sur $R$.

Soit $I$ un idéal de $R$, nous noterons $\nu_{I,\mathfrak{I}}$ pour $\nu_{R/I,\mathfrak{I}}$ quand aucune confusion sur $R$ ne sera possible. Dans le cas où $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $R$, nous noterons $\nu_R := \nu_{R,\mathfrak{I}}$ et $\nu_I := \nu_{R/I,\mathfrak{I}}$ (la dernière notation n'est à pas confondre avec la valuation $I$-adique).

Une telle définition est licite d'après le lemme de Nakayama.

Soit $R$ un anneau local nœthérien et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $R$. Il est clair que nous avons $\nu_{I,\mathfrak{I}}(gh) \geqslant \nu_{I,\mathfrak{I}}(g) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(h)$ $\forall g, h \in R$. Il y a égalité si et seulement si $Gr_{\mathfrak{I}}(R/I)$ est intègre. Nous dirons que $\nu_{I,\mathfrak{I}}$ admet une inégalité complémentaire linéaire (ICL) si il existe $a$ et $b$ réels tels que

$$\nu_{I,\mathfrak{I}}(gh) \leqslant a\big(\nu_{I,\mathfrak{I}}(g) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(h)\big) + b \quad \forall g, h \in R.$$

Nous dirons dans ce cas que $a$ et $b$ sont des constantes apparaissant dans une ICL pour $(R, \mathfrak{I})$. Nous pouvons remarquer que si $a$ et $b$ existent, alors nécessairement $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 0$.

Nous avons alors :

**Théorème 4.2** [10]. *Soit $R$ un anneau local nœthérien. Alors il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que*

$$\nu_R(gh) \leqslant a\big(\nu_R(g) + \nu_R(h)\big) + b \quad \forall g, h \in R \setminus \{0\}$$

*si et seulement si $R$ est analytiquement irréductible.*

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.8 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 8


Soit $I$ un idéal de $A$, un anneau local nœthérien, engendré par $f_1,\dots,f_p$. Nous notons $R:=A/I$. Notons alors $i_I$ le plus petit entier tel que $i\mapsto i+i_I$ majore la fonction de Artin de $f_1X_1+\cdots+f_pX_p\in A[X]$. Pour tout $x\in A$, notons $\beta_x$ la fonction de Artin de $xX_0+f_1X_1+\cdots+f_pX_p$. Nous avons alors :

**Proposition 4.3.** *Avec les notations précédentes, nous avons* :

(i) *Si $R$ admet une ICL avec les coefficients $a$ et $b$, alors, pour tout $x\in A$, nous avons la majoration uniforme suivante* :

$$\forall i\in\mathbb{N}\quad \beta_x(i)\leqslant ai+a\nu_I(x)+ai_I+b.$$

(ii) *Si nous avons une majoration uniforme de la fonction $\beta_x$ par une fonction de la forme $i\mapsto ai+c\nu_I(x)+b$, avec $a+c\geqslant 1$, alors le polynôme $XY+\sum_k f_iX_i\in A[X,Y,X_1,\dots,X_p]$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i\mapsto (a+c)(i+i_I)+\max(b,i_I)$, et de plus l'idéal $I$ est soit premier, soit $\mathfrak{m}$-primaire.*

(iii) *Si le polynôme $XY+\sum_k f_iX_i$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i\mapsto ai+b$ et si $I$ est premier alors $R$ admet une ICL*

$$\nu_I(gh)\leqslant a\big(\nu_I(g)+\nu_I(h)\big)+b\quad \forall g,h\in R.$$

**Preuve.** Montrons (i) :

Soient $x_0,x_1,\dots,x_p\in A$ tels que

$$xx_0+f_1x_1+\cdots+f_px_p\in\mathfrak{m}^{ai+a\nu_I(x)+ai_I+b+1}.$$

Nous avons donc $\nu_I(xx_0)\geqslant ai+a\nu_I(x)+ai_I+b+1$. D'où

$$a\big(\nu_I(x)+\nu_I(x_0)\big)+b\geqslant ai+a\nu_I(x)+ai_I+b+1,$$
$$\nu_I(x_0)\geqslant i+i_I+1.$$

Nous avons donc $x_0=\sum_k f_kz_k+x_0'$ avec $\operatorname{ord}(x_0')\geqslant i+i_I+1$, ce qui implique que

$$\sum_{k=1}^p f_k(x_k+xz_k)\in\mathfrak{m}^{i+i_I+1}$$

car $a\geqslant 1$. Il existe donc, par définition de $i_I$, des $t_k\in A$ qui vérifient

$$\forall k\geqslant 1\quad t_k\in x_k+xz_k+\mathfrak{m}^{i+1}\quad\text{et}\quad \sum_{k=1}^p f_kt_k=0.$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.9 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 9


Nous posons alors $\bar{x}_0 = \sum_k f_k z_k$ et $\bar{x}_k = t_k - x z_k$ pour $k \geqslant 1$. Nous avons alors

$$x\bar{x}_0 + f_1\bar{x}_1 + \cdots + f_p\bar{x}_p = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \quad \bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Donc $\beta_x(i) \leqslant ai + a\nu_I(x) + ai_I + b$ pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$.

Montrons maintenant (ii) :

Nous allons tout d'abord montrer la majoration de la fonction de Artin annoncée, puis nous montrerons que $I$ est soit premier, soit $\mathfrak{m}$-primaire.

Soient $a$, $b$ et $c$ comme dans l'énoncé. Fixons tout d'abord $i \geqslant i_I$. Nous allons montrer que la fonction de Artin de $XY + \sum_k f_i X_i$ est majorée par la fonction $i \mapsto (a+c)i + \max(b, i_I)$. Dans ce cas la fonction de Artin du polynôme $XY + \sum_k f_i X_i$ sera majorée par $i \mapsto (a+c)(i+i_I) + \max(b, i_I)$ comme voulue.

Soit $i \geqslant i_I$ et soient $x$, $y$, $x_1, \ldots, x_p$ tels que

$$xy + f_1x_1 + \cdots + f_px_p \in \mathfrak{m}^{(a+c)i+\max(b,i_I)+1}. \tag{2}$$

Nous allons distinguer deux cas, selon que $x$ et $y$ sont tous les deux dans $I + \mathfrak{m}^{i+1}$ ou non.

(1) Supposons que $x$ et $y$ sont dans $I + \mathfrak{m}^{i+1}$, c'est-à-dire qu'il existe des $z_{1,j}$ et des $z_{2,j}$ tels que $x - \sum_j f_j z_{1,j} \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $y - \sum_j f_j z_{2,j} \in \mathfrak{m}^{i+1}$. En multipliant ces deux termes nous voyons que

$$xy - x\sum_j f_j z_{2,j} - y\sum_j f_j z_{1,j} + \sum_j f_j z_{1,j} \sum_j f_j z_{2,j} \in \mathfrak{m}^{2i+1}.$$

D'après cette relation et la relation (2), on est ramené à

$$\sum_j f_j \left( x_j + yz_{1,j} + xz_{2,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j} \right) \in \mathfrak{m}^{\min(2i,(a+c)i+i_I)+1}.$$

Par définition de $i_I$, il existe donc des $t_j$ tels que $\sum_j f_j t_j = 0$ et

$$t_j - \left( x_j + xz_{2,j} + yz_{1,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j} \right) \in \mathfrak{m}^{\min(2i,(a+c)i+i_I)-i_I+1} \subset \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Nous posons alors

$$\bar{x} = \sum_j f_j z_{1,j}, \qquad \bar{y} = \sum_j f_j z_{2,j} \quad \text{et}$$

$$\bar{x}_j = t_j - \left( \bar{x} z_{2,j} + \bar{y} z_{1,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j} \right) = -\sum_l f_l z_{2,l} z_{1,j}.$$

Nous avons donc

$$\bar{x}\bar{y} + \sum_j f_j \bar{x}_j = 0, \quad \text{et}$$

$$\bar{x} - x,\ \bar{y} - y \text{ et } x_j - \bar{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+1} \quad \text{pour tout } j.$$

(2) Supposons maintenant que $x \in I + \mathfrak{m}^{k+1}$ et $x \notin I + \mathfrak{m}^{k+2}$ avec $k < i$. Notons

$$x = \sum_j f_j z_{1,j} + x'$$

avec $\nu_A(x') = k+1$ et $x' \notin I + \mathfrak{m}^{\nu_A(x')+1}$. En particulier, nous voyons que $\nu_I(x) = \nu_I(x') = k+1$. Nous avons alors

$$x'y + \sum_j f_j (x_j + y z_{1,j}) \in \mathfrak{m}^{(a+c)i + \max(b, i_I) + 1}.$$

Ou encore

$$x'y + \sum_j f_j x'_j \in \mathfrak{m}^{(a+c)i + \max(b, i_I) + 1}$$

avec $x'_j = x_j + y z_{1,j}$. La fonction de Artin de $x'Y + \sum_k f_k X'_k \in A[Y, X'_1, \dots, X'_n]$ est majorée par

$$i \mapsto ai + c\nu_I\big(x'\big) + b \leqslant (a+c)i + b.$$

Donc il existe $\bar{y} \in y + \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\bar{x}'_j \in x'_j + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que

$$x'\bar{y} + \sum_j f_j \bar{x}'_j = 0.$$

Posons alors

$$\bar{x}_j = \bar{x}'_j - \bar{y} z_{1,j} \quad \text{et} \quad \bar{x} = x.$$

Nous avons

$$\bar{x}\bar{y} + \sum_j f_j \bar{x}_j = \left(x' + \sum_j f_j z_{1,j}\right)\bar{y} + \sum_j f_j\big(\bar{x}'_j - \bar{y} z_{1,j}\big) = 0$$

et $\bar{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$, $\bar{y} - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\bar{x}_j - x_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $j$.

Donc pour $i \geqslant i_I$ la fonction de Artin de $XY + \sum_k f_i X_i$ est bornée par la fonction $i \mapsto (a+c)i + \max(b, i_I)$.

Montrons maintenant que $I$ est premier ou $\mathfrak{m}$-primaire. Montrons tout d'abord que $I$ n'a qu'un idéal premier minimal associé. Supposons le contraire, c'est-à-dire que nous avons

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.11 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 11


$I = I_1 \cap I_2$ avec $I \neq I_1$ et $I \neq I_2$, où $I_1$ est un idéal $P$-primaire avec $P$ premier, et $P$ n'est pas un idéal premier associé à $I_2$. Soit $x \in I_1 \setminus I_1 \cap I_2$. Pour tout entier $l$, il existe $\bar{x}(l)$ tel que $\nu_A(\bar{x}(l)) \geqslant l$ et $x(l) = x + \bar{x}(l) \notin P$. En effet, si cela n'était pas possible, nous aurions $x + \mathfrak{m}^l \subset P$ pour $l \in \mathbb{N}$. Par conséquent, comme $x \in P$ et que $P$ est premier, nous avons $\mathfrak{m} \subset P$, et donc $\mathfrak{m} = P$, ce qui est impossible par hypothèse sur $P$.

Choisissons alors $y \in I_2 \setminus I_1 \cap I_2$. Il existe un entier $k$ tel que $y \notin I_1 + \mathfrak{m}^k$ car $y \notin I_1$. Nous avons $xy \in I_1 I_2 \subset I$, il existe donc des $x_j$ tels que

$$x(l)y = xy + \bar{x}(l)y = -\sum_j f_j x_j + \bar{x}(l)y.$$

Donc $x(l)y + \sum_j f_j x_j \in \mathfrak{m}^l$. Si $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$ vérifient $x(l)\bar{y} + \sum_j f_j \bar{x}_j = 0$, alors $x(l)\bar{y} \in I \subset I_1 \subset P$. Donc $\bar{y} \in I_1$, car $x(l) \notin P$ et $I_1$ et $P$-primaire. Donc $y - \bar{y} \notin \mathfrak{m}^k$. D'autre part, pour $l$ assez grand (en fait pour $l > \nu_I(x)$), nous avons $\nu_I(x(l)) = \nu_I(x) < +\infty$. La fonction de Artin $\beta_x$ n'est donc pas majorée uniformément par une fonction de $\nu_I(x)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, et donc $I$ n'a qu'un idéal premier minimal associé.

Supposons maintenant que $I$ n'a qu'un idéal minimal associé mais que $I$ n'est ni premier ni $\mathfrak{m}$-primaire. C'est-à-dire $I$ est $P$-primaire, $I \neq P$ et $P \neq \mathfrak{m}$. L'idéal $P$ est de la forme $(I : y)$ avec $y \notin I$. Soit $x \in P \setminus P \cap I$. Alors $xy \in I$ par définition de $y$.

Pour tout entier $l$, il existe $\bar{x}(l)$ tel que $\nu_A(\bar{x}(l)) \geqslant l$ et $x(l) = x + \bar{x}(l) \notin P$. Si cela n'était pas possible, alors, comme précédemment, nous aurions $P = \mathfrak{m}$ ce qui est contraire à l'hypothèse donc impossible.

Il existe un entier $k$ tel que $y \notin I + \mathfrak{m}^k$ car $y \notin I$. Or $xy \in I$, donc il existe des $x_j$ tels que

$$x(l)y = xy + \bar{x}(l)y = -\sum_j f_j x_j + \bar{x}(l)y.$$

Donc $x(l)y + \sum_j f_j x_j \in \mathfrak{m}^l$. Comme précédemment, si $\bar{y}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p$ vérifient $x(l)\bar{y} + \sum_j f_j \bar{x}_j = 0$, alors $x(l)\bar{y} \in I \subset P$, donc $\bar{y} \in I$ car $x(l) \notin P$ et $I$ est $P$-primaire. Donc $y - \bar{y} \notin \mathfrak{m}^k$. Comme précédemment, la fonction de Artin $\beta_x$ n'est donc pas majorée uniformément par une fonction de $\nu_I(x)$ et donc $I$ est premier ou $\mathfrak{m}$-primaire.

Montrons finalement (iii) : Soient $x$, $y$ et $i$ tels que $a(i+1) + b \geqslant \nu_I(xy) \geqslant ai + b + 1$. C'est-à-dire $xy \in I + \mathfrak{m}^{ai+b+1}$. Il existe alors des $z_k$ tel que $xy + \sum_k f_k z_k \in \mathfrak{m}^{ai+b+1}$. Il existe donc $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}_k$ tels que $\bar{x}\bar{y} + \sum_k f_k \bar{z}_k = 0$ et $x - \bar{x} \in \mathfrak{m}^{i+1}$, $y - \bar{y} \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Comme $I$ est premier, alors soit $\bar{y} \in I$, soit $\bar{x} \in I$. D'où soit $\nu_I(x) \geqslant i + 1$, soit $\nu_I(y) \geqslant i + 1$. C'est-à-dire

$$\text{soit} \quad a\nu_I(x) + b \geqslant \nu_I(xy), \qquad \text{soit} \quad a\nu_I(y) + b \geqslant \nu_I(xy).$$

Nous avons donc

$$\nu(xy) \leqslant a \max\bigl(\nu_I(x), \nu_I(y)\bigr) + b \leqslant a\bigl(\nu_I(x) + \nu_I(y)\bigr) + b.$$

D'où le résultat. □

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.12 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 12


**Remarque 3.** La preuve de (ii) précédente nous montre en fait que, si $I$ n'est ni premier ni $\mathfrak{m}$-primaire, nous n'avons aucune majoration uniforme de $\beta_x$ par une fonction de $\nu_I(x)$ (même non affine).

*4.2. Version stable du lemme d'Artin–Rees*

Nous avons en fait le résultat suivant dû à Rees [18] qui est un peu plus fort que celui d'Izumi :

**Théorème 4.4** [18]. *Soit $R$ un anneau local nœthérien. Alors $R$ est analytiquement irréductible si pour au moins un idéal $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{m}$-primaire, et seulement si pour tout idéal $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{m}$-primaire, il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que*

$$\nu_{R,\mathfrak{I}}(gh) \leqslant \nu_{R,\mathfrak{I}}(g) + a\nu_{R,\mathfrak{I}}(h) + b \quad \forall g, h \in R \setminus \{0\}.$$

Nous en déduisons :

**Théorème 4.5.** *Soient $A$ un anneau local nœthérien, $I$ un idéal de $A$ et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $A$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $A$, tels que $A/I$ soit analytiquement irréductible. Alors pour tout $x \in A$, nous avons la majoration uniforme suivante* :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \beta_x(i) \leqslant i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + i_I + b$$

*où $\beta_x$ est la fonction de Artin de $xX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_pX_p$ pour le couple $(A, \mathfrak{I})$.*

**Preuve.** Soient $x_0, x_1, \ldots, x_p \in A$ tels que

$$xx_0 + f_1x_1 + \cdots + f_px_p \in \mathfrak{I}^{i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+i_I+b+1}.$$

Nous avons donc $\nu_{I,\mathfrak{I}}(xx_0) \geqslant i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + i_I + b + 1$. D'où

$$a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(x_0) + b \geqslant i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + i_I + b + 1,$$
$$\nu_{I,\mathfrak{I}}(x_0) \geqslant i + i_I + 1.$$

Nous avons donc $x_0 = \sum_k f_kz_k + x_0'$ avec $\nu_{A,\mathfrak{I}}(x_0') \geqslant i + i_I + 1$, ce qui implique que

$$\sum_{k=1}^{p} f_k(x_k + xz_k) \in \mathfrak{I}^{i+i_I+1}.$$

Il existe donc, par définition de $i_I$, des $t_k \in A$ qui vérifient

$$\forall k \geqslant 1 \quad t_k \in x_k + xz_k + \mathfrak{I}^{i+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p} f_kt_k = 0.$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.13 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 13


Nous posons alors $\bar{x}_0 = \sum_k f_k z_k$ et $\bar{x}_k = t_k - x z_k$ pour $k \geqslant 1$. Nous avons alors

$$x\bar{x}_0 + f_1\bar{x}_1 + \cdots + f_p\bar{x}_p = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \quad \bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}. \qquad \square$$

Nous pouvons alors formuler une version stable du lemme d'Artin–Rees :

**Théorème 4.6.** *Soient $A$ un anneau nœthérien, $\mathfrak{I}$ un idéal $P$-primaire de $A$ avec $P$ premier et $I \subset P$ un idéal de $A$ tel que $A_P/IA_P$ soit analytiquement irréductible. Supposons que*

(i) $\forall k \geqslant 1$, $\mathfrak{I}^k A_P \cap A = \mathfrak{I}^k$,
(ii) $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in P$, $((x) + I)\mathfrak{I}^k A_P \cap A = ((x) + I)\mathfrak{I}^k$.

*Alors il existe $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 0$ tels que nous ayons la version faible d'Artin–Rees uniforme suivante*

$$\big((x) + I\big) \cap \mathfrak{I}^{i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + b} \subset \big((x) + I\big)\mathfrak{I}^i \quad \forall x \in P,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.** D'après (i), les ordres $\nu_{A,\mathfrak{I}}$ et $\nu_{A_P,\mathfrak{I}A_P}$ sont égaux. D'après le théorème précédent et le Théorème 3.1, il existe $a$ et $b$ tels que

$$\big((x) + I\big)A_P \cap \mathfrak{I}^{i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + b} A_P \subset \big((x) + I\big)\mathfrak{I}^i A_P \quad \forall x \in PA_P,\ \forall i \in \mathbb{N},$$

car $A_P/IA_P$ est analytiquement irréductible. Choisissons $x \in P$ et $i \in \mathbb{N}$, nous avons alors

$$\big((x) + I\big) \cap \mathfrak{I}^{i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + b} \subset \big((x) + I\big)A_P \cap \mathfrak{I}^{i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + b} A_P \subset \big((x) + I\big)\mathfrak{I}^i A_P.$$

Le résultat découle alors de l'hypothèse (ii). $\square$

**Remarque 4.** Ceci est vrai en particulier si $A$ est local, $P = \mathfrak{m}$ est son idéal maximal, $\mathfrak{I}$ est $\mathfrak{m}$-primaire et $A/I$ est analytiquement irréductible.

**Remarque 5.** Il existe deux versions de ce que l'on appelle lemme d'Artin–Rees uniforme [8] et [3] qui sont à ne pas confondre avec cette version stable.

### *4.3. Exemples*

Nous donnons ici quelques exemples explicites, toujours dans le cas où l'idéal $\mathfrak{I}$ est l'idéal maximal de l'anneau $A$. Nous noterons alors $\mathfrak{m}$ cet idéal. Dans la suite, l'anneau $\mathcal{O}_N$ désignera indifféremment l'anneau des séries formelles en $N$ variables sur un corps $\Bbbk$ et l'anneau des séries convergentes en $N$ variables sur $\Bbbk$ (quand cela a un sens). Nous noterons ord l'ordre $\mathfrak{m}$-adique sur $\mathcal{O}_N$.

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.14 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 14


*4.3.1. Premier exemple*

Si l'anneau gradué $Gr_{\mathfrak{m}}\frac{A}{I}$ est intègre alors $\nu_{A,I}$ est une valuation, i.e.

$$\nu_{A,I}(gh) = \big(\nu_{A,I}(g) + \nu_{A,I}(h)\big) \quad \forall g, h \in A.$$

En particulier d'après la Proposition 4.3, la fonction de Artin du polynôme $xX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_pX_p$ (où $I = (f_1, \ldots, f_p)$) est bornée par une fonction de la forme $i \mapsto i + \nu_{A,I}(x) + p$.

C'est le cas par exemple si $I = (f)$ et $f$ est irréductible et homogène de degré $p$ dans $\mathcal{O}_N$.

*4.3.2. Deuxième exemple*

Nous allons donner tout d'abord le

**Lemme 4.7.** *Soit* $L(X_1, \ldots, X_n) = f_1X_1 + \cdots + f_nX_n \in \mathcal{O}_N[X_1, \ldots, X_n]$ *avec* $\mathrm{ord}(f_1) \leqslant \mathrm{ord}(f_2) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{ord}(f_n)$. *Supposons que les termes de plus bas ordre* (*termes initiaux*) *des* $f_k$ *forment une suite régulière. Alors* $L$ *admet une fonction de Artin qui est majorée, pour tout* $i \geqslant 0$, *par la fonction affine* $i \mapsto i + \mathrm{ord}(f_n)$.

**Preuve.** Les termes initiaux des $f_k$ formant une suite régulière, les $f_k$ forment une suite régulière et nous savons donc que les zéros de $L$ sont de la forme

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k z(k,1), \ldots, \sum_{k=1}^{n} f_k z(k,n)\right)$$

avec $z(k, j) = -z(j, k)$ pour tous $k$ et $j$. En particulier $z(k, k) = 0$ pour tout $k$.

Dans la suite, pour tout élément $x$ de $\mathcal{O}_N$, nous noterons $x(p)$ le terme homogène de degré $p$ de $x$.

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_N$ tels que $f_1x_1 + \cdots + f_nx_n \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)+1}$. Si nous avons $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j)) \geqslant i + \mathrm{ord}(f_n) + 1$, nous posons $\bar{x}_j = 0$ pour tout $j$. Nous avons $L(\bar{x}) = 0$ et $x_j - \bar{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $j$.

Dans le cas contraire, nous allons construire, par récurrence sur $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j))$, des éléments $\bar{x}_j$, pour tout $j$, tels que $\sum_j f_j\bar{x}_j = 0$ et $\bar{x}_j - x_j \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)-\mathrm{ord}(f_j)+1}$ pour tout $j$.

Comme $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j)) < i + \mathrm{ord}(f_n) + 1$, nous avons

$$\mathrm{in}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\big(\mathrm{ord}(f_j)\big)x_j\big(\mathrm{ord}(x_j)\big)\right) = 0$$

où $\mathrm{in}(x)$ désigne le terme initial de $x$ pour ord. C'est-à-dire

$$\sum_{j\in I_1} f_j\big(\mathrm{ord}(f_j)\big)x_j\big(\mathrm{ord}(x_j)\big) = 0$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.15 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 15


où $I_1$ est l'ensemble

$$I_1 := \left\{ j \in \{1, \dots, n\} \;\middle|\; \operatorname{ord}(f_j x_j) \leqslant \operatorname{ord}(f_k x_k),\ \forall k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Il existe donc des polynômes homogènes $z^1(k, j) \in \mathcal{O}_N$ tels que

$$z^1(k, j) = 0 \quad \text{si } j \notin I_1, \qquad z^1(k, j) = -z^1(j, k) \quad \text{et}$$
$$x_j\big(\operatorname{ord}(x_j)\big) = \sum_{k=1}^{n} f_k\big(\operatorname{ord}(f_k)\big) z^1(k, j) \quad \text{pour tout } j \in I_1,$$

car les termes initiaux des $f_j$, où $j \in I_1$, forment une suite régulière. Nous posons alors

$$x_j^1 = x_j - \sum_{k=1}^{n} f_k z^1(k, j) \quad \forall j.$$

Nous avons donc $f_1 x_1^1 + \cdots + f_n x_n^1 \in \mathfrak{m}^{i+\operatorname{ord}(f_n)+1}$ et $\operatorname{ord}(x_j^1) > \operatorname{ord}(x_j)$ si $j \in I_1$ et $\operatorname{ord}(x_j^1) = \operatorname{ord}(x_j)$ sinon. Nous avons aussi que

$$\min_j\big(\operatorname{ord}(f_j x_j)\big) < \min_j\big(\operatorname{ord}\big(f_j x_j^1\big)\big).$$

Nous pouvons alors continuer ce processus jusqu'au rang $l$ de manière à avoir construit des $x_j^l$ tels que $f_j x_j^l \in \mathfrak{m}^{i+\operatorname{ord}(f_n)+1}$ pour tout $j$ avec

$$x_j^l = x_j - \sum_{k=1}^{n} f_k \bar{z}(k, j) \quad \text{tels que } \bar{z}(k, j) = -\bar{z}(j, k)\ \forall k, j.$$

C'est-à-dire qu'il existe $\bar{x}_j = \sum_{j=1}^{n} f_k \bar{z}(k, j)$ tels que

$$f_1 \bar{x}_1 + \cdots + f_n \bar{x}_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall j, \quad x_j - \bar{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+\operatorname{ord}(f_n)-\operatorname{ord}(f_j)+1} \subset \mathfrak{m}^{i+1}. \qquad \square$$

Nous en déduisons :

**Corollaire 4.8.** *Soit $I = (f_1, \dots, f_n)$ un idéal de $\mathcal{O}_N$. Si l'idéal engendré par les termes initiaux des éléments de $I$ est premier et d'intersection complète alors nous avons l'inégalité*

$$\nu_I(gh) \leqslant 2\big(\nu_I(g) + \nu_I(h)\big) + 3 \max_k \big\{\operatorname{ord}(f_k)\big\} \quad \forall f, g \in \mathcal{O}_N.$$

**Preuve.** Soit $f_1, \dots, f_n$ une famille d'éléments de $I$ dont les termes initiaux forment une suite régulière et engendrent l'idéal des termes initiaux de $I$. Alors cette famille engendre $I$ en tant qu'idéal. Soit $f \in \mathcal{O}_N$ et $f'$ son reste après division par $I$ (théorème de division

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.16 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 16



d'Hironaka, cf. [1]). Si $f' = 0$, alors $f \in I$ et la fonction de Artin de $fX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$ est bornée par $i \mapsto i + i_I$.

Si $f' \neq 0$, alors $\nu_I(f) = \nu_I(f')$, et la suite formée des termes initiaux des $f_l$ et du terme initial de $f'$ est régulière. En effet, en notant $\mathrm{in}(g)$ le terme initial de $g \in \mathcal{O}_N$, supposons qu'il existe $x \in \mathrm{in}(I + (f))$ tel que nous ayons $x\,\mathrm{in}(f') = 0$ dans $\mathrm{in}(I + (f))/(\mathrm{in}(f_1, \ldots, f_n))$. Comme $\mathrm{in}(I)$ est premier, nécessairement $x \in \mathrm{in}(I)$ et donc la suite $(\mathrm{in}(f_1), \ldots, \mathrm{in}(f_n), \mathrm{in}(f'))$ est régulière.

D'après le Théorème 3.1, la fonction de Artin de $fX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$ est égale à celle de $f'X_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$, qui est bornée, d'après le Lemme 4.7, par

$$i \mapsto i + \max\bigl\{\mathrm{ord}\bigl(f'\bigr), \mathrm{ord}(f_k)\bigr\} \leqslant i + \mathrm{ord}\bigl(f'\bigr) + \max_k\bigl\{\mathrm{ord}(f_k)\bigr\}.$$

En utilisant alors le (ii) de la Proposition 4.3 ($a = c = 1$ et $b = \max_k\{\mathrm{ord}(f_k)\}$), nous voyons que le polynôme $XY + \sum_k f_kZ_k$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i \mapsto 2(i + i_I) + \max(\max_k\{\mathrm{ord}(f_k)\}, i_I)$ ($i_I$ est une constante telle que $i \mapsto i + i_I$ majore la fonction de Artin de $\sum_k f_kZ_k$). Comme $i_I \leqslant \max_k\{\mathrm{ord}(f_k)\}$ d'après le Lemme 4.7, le polynôme $XY + \sum_k f_kZ_k$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i \mapsto 2i + 3\max_k\{\mathrm{ord}(f_k)\}$. En utilisant alors le (iii) de la Proposition 4.3, nous déduisons le résultat. □

*4.3.3. Troisième exemple*

Soit $f = T_1^2 + g(T_2, T_3) \in \mathcal{O}_3$ avec $g(0, 0) = 0$. Alors d'après [10], $(f)$ admet une ICL avec les coefficients 1 et $\mathrm{ord}(g) - 2$ si $\mathrm{ord}(g)$ est impair. En utilisant le (i) de la Proposition 4.3 ($a = 1$ et $b = \mathrm{ord}(g) - 2$), nous voyons que la fonction de Artin de $xX_0 + fX_1$ est bornée par

$$i \mapsto i + \nu_{(f),\mathfrak{m}}(x) + \mathrm{ord}(g) - 2 + i_{(f)}$$

où $i_{(f)}$ est tel que $i \mapsto i + i_{(f)}$ majore la fonction de Artin de $fX_1$. En particulier nous pouvons choisir $i_{(f)} = \mathrm{ord}(f) = 2$. Donc la fonction de Artin de $xX_0 + fX_1$ est bornée par

$$i \mapsto i + \nu_{(f),\mathfrak{m}}(x) + \mathrm{ord}(g).$$

*4.3.4. Quatrième exemple*

Nous allons donner une ICL dans le cas où $f = T_1^k + g \in \mathcal{O}_N$ avec $\mathrm{ord}(g) = k + 1$ et $T_1$ ne divisant pas le terme initial de $g$. Nous avons tout d'abord le

**Lemme 4.9.** *Soit $f = T_1^k + g$ avec $\mathrm{ord}(g) = k + 1$ et $T_1$ ne divisant pas le terme initial de $g$. Alors pour tout $h$ la fonction de Artin de $fX + hY$ est bornée par*

$$i \mapsto i + \max\bigl\{k, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h) + 1\bigr\}.$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.17 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 17


**Preuve.** Soit $h = af + h_0T_1^l + \sum_{j\geqslant 1} h_j$ avec $l < k$ et $T_1$ ne divisant pas $h_0$, et les $h_j$ sont homogènes de degré $j > \operatorname{ord}(h_0) + l$ et ne sont pas divisibles par $T_1^k$. Notons $h' = h_0T_1^l + \sum_{j\geqslant 1} h_j$.

Soient $x$ et $y$ tels que $fx + hy \in \mathfrak{m}^{i+\max\{k,\nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\}+2}$. Nous avons donc

$$f(x + ay) + h'y \in \mathfrak{m}^{i+\max\{k,\nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\}+2}.$$

Nous pouvons faire le changement de variables $X = X + aY$, $Y = Y$ et supposer que $h = h'$.

Notons $x_j$ le terme homogène de degré $j$ dans l'écriture de $x$ (idem pour $y$). Si $\operatorname{ord}(x) \geqslant i + \max\{k, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h) + 1\} - k + 1 \geqslant i + 1$, nous posons $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Nous avons bien $\bar{x} - x$, $\bar{y} - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $f\bar{x} + h'\bar{y} = 0$.

Autrement nous avons

$$T_1^k x_{\operatorname{ord}(x)} + h_0T_1^l y_{\operatorname{ord}(y)} = 0,$$
$$T_1^k x_{\operatorname{ord}(x)+1} + \operatorname{in}(g)x_{\operatorname{ord}(x)} + h_0T_1^l y_{\operatorname{ord}(y)+1} + h_1 y_{\operatorname{ord}(y)} = 0.$$

La première équation nous donne que $T_1^{k-l}$ divise $y_{\operatorname{ord}(y)}$. La seconde équation nous donne alors que $T_1^{\min\{l,k-l\}}$ divise $x_{\operatorname{ord}(x)}$.

Si $l \leqslant k - l$ alors nous avons $x_{\operatorname{ord}(x)} = h_0T_1^l z_0$ et $y_{\operatorname{ord}(y)} = -T_1^k z_0$. Nous posons alors $x(1) = x - hz_0$ et $y(1) = y + fz_0$. Nous avons $\operatorname{ord}(x(1)) > \operatorname{ord}(x)$ et $\operatorname{ord}(y(1)) > \operatorname{ord}(y)$.

Si $l > k - l$, la première équation nous donne que $T_1^{2(k-l)}$ divise $y_{\operatorname{ord}(y)}$ et la seconde que $T_1^{\min\{l,2(k-l)\}}$ divise $x_{\operatorname{ord}(x)}$.

Par induction nous pouvons continuer cette procédure jusqu'au rang $p$ tel que $l \leqslant p(k - l)$ et tel que $T_1^{\min\{l,p(k-l)\}} = T_1^l$ divise $x_{\operatorname{ord}(x)}$. Il existe donc $z_0$ tel que $x_{\operatorname{ord}(x)} = h_0T_1^l z_0$ et $y_{\operatorname{ord}(y)} = -T_1^k z_0$. Nous posons alors $x(1) = x - hz_0$ et $y(1) = y + fz_0$. Nous avons $\operatorname{ord}(x(1)) > \operatorname{ord}(x)$ et $\operatorname{ord}(y(1)) > \operatorname{ord}(y)$.

Nous recommençons alors la procédure précédente et nous construisons ainsi $z$ tel que $\operatorname{ord}(x - hz) \geqslant i + \max\{k, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\} - k + 1 \geqslant i + 1$. Nous posons alors $\bar{x} = hz$ et $\bar{y} = -fz$. Clairement $\bar{x} - x$, $\bar{y} - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $f\bar{x} + h'\bar{y} = 0$. □

D'après le (ii) la Proposition 4.3 (avec $a = c = 1$ et $b = k$), nous voyons donc que le germe d'hypersurface défini par $f = T_1^k + g = 0$ avec $\operatorname{ord}(g) = k + 1$ et $\operatorname{pgcd}(T_1, \operatorname{in}(g)) = 1$ admet une ICL :

$$\nu_{(f),\mathfrak{m}}(gh) \leqslant 2\big(\nu_{(f),\mathfrak{m}}(g) + \nu_{(f),\mathfrak{m}}(h)\big) + 3k \quad \forall g, h \in \mathcal{O}_N.$$

## 5. Étude de la fonction de Artin de $X_1X_2 - X_3X_4$

Nous donnons ici un exemple de polynôme dont la fonction de Artin n'est pas bornée par une fonction affine. L'idée est d'utiliser le fait que la fonction de Artin de $X_1X_2 - (T_1T_2 - T_3^i)X_4 \in \mathcal{O}_N[X_1, X_2, X_4]$ pour $N \geqslant 3$ est la fonction $k \mapsto ik - 1$ (cf.

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.18 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 18


Exemple 5.6(iv) de [10]) et que tout élément égal à $T_1T_2 - T_3^i$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ est toujours irréductible. Ce polynôme peut être alors vu comme une « spécialisation » du polynôme $X_1X_2 - X_3X_4 \in \mathcal{O}_N[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

**Théorème 5.1.** *La fonction de Artin du polynôme*

$$X_1X_2 - X_3X_4 \in \mathcal{O}_N[X_1, X_2, X_3, X_4]$$

*est bornée inférieurement par la fonction* $i \mapsto i^2 - 1$ *si* $N \geqslant 3$.

Nous savions déjà qu'en général une fonction de Artin n'était pas bornée par une fonction affine (cf. [19]). L'exemple étudié ici correspond à une singularité isolée d'hypersurface, dont la fonction de Artin–Greenberg a déjà été étudiée (cf. [7,12]).

**Preuve.** Appelons $P$ le polynôme $X_1X_2 - X_3X_4$ et fixons un entier $i \in \mathbb{N}$ quelconque. Notons $x_1(i) := T_1^i$, $x_2(i) := T_2^i$ et $x_3(i) := T_1T_2 - T_3^i$. Nous avons

$$x_1(i)x_2(i) = \left(x_3(i) + T_3^i\right)^i = x_3(i)x_4(i) + T_3^{i^2}$$

avec $x_4(i)$ bien choisi. Nous avons donc

$$P\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i), x_4(i)\right) \in \mathfrak{m}^{i^2}.$$

Supposons que nous ayons $x_1, x_2, x_3$ et $x_4$ tels que $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, alors deux cas peuvent se produire :

(1) soit $x_3 - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Alors $x_3$ est irréductible. En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $x$ et $y$ tels que $xy = x_3$. Alors $xy - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$, ce qui est impossible. En effet, d'après le Lemme 5.2 dont nous donnons la preuve à la fin, la fonction de Artin du polynôme $XY - x_3(i)$ vaut $i$, et cela impliquerait que $x_3(i)$ est réductible, ce qui est clairement faux. Donc soit $x_1 \in (x_3)$, soit $x_2 \in (x_3)$ car $(x_3)$ est irréductible et $\mathcal{O}_N$ est factoriel. Or

$$\sup_{f \in \mathcal{O}_N} \left(\operatorname{ord}\left(x_1(i) - fx_3\right)\right) = \sup_{f \in \mathcal{O}_N} \left(\operatorname{ord}\left(x_2(i) - fx_3\right)\right) = i$$

car $x_1(i) - fx_3 = x_1(i) - fx_3(i)$ modulo $\mathfrak{m}^i$ et ce dernier terme est non nul modulo $\mathfrak{m}^i$, le terme initial de $x_1(i)$ n'étant pas divisible par $T_1T_2$ (idem pour $x_2(i)$).

(2) Soit $\operatorname{ord}(x_3 - x_3(i)) \leqslant i$. Dans tous les cas nous avons

$$\sup\Bigl(\min_{j=1,\dots,4}\left(\operatorname{ord}\left(x_j(i) - x_j\right)\right)\Bigr) \leqslant i$$

où la borne supérieure est prise sur tous les 4-uplets $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tels que $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. La fonction de Artin de $P$ est donc minorée par la fonction $i \to i^2 - 1$. $\square$

Nous donnons maintenant la preuve du lemme utilisé :

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.19 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 19


**Lemme 5.2.** *La fonction de Artin du polynôme $XY - x_3(i) \in \mathcal{O}_N[X, Y]$ est la fonction constante égale à $i$.*

**Preuve.** Soient $x$ et $y$ dans $\mathcal{O}_N$, non inversibles, tels que $xy - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Ecrivons

$$x = \sum_{j=1}^{i+1} x_j \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{i+1} y_j$$

où $x_j$ (respectivement $y_j$) est le terme homogène d'ordre $j$ dans l'écriture de $x$ (respectivement de $y$). Quitte à intervertir $x$ et $y$, nous avons nécessairement $x_1 = aT_1$ et $y_1 = a^{-1}T_2$. Nous allons montrer par induction, que pour tout $j \in \{1, \ldots, i-2\}$, $x_j \in (T_1)$ et $y_j \in (T_2)$. Supposons que ceci soit vrai pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ avec $n < i - 1$. Le terme homogène d'ordre $n+1$ de $xy$ est nul car $n + 1 < i$. Nous avons alors

$$aT_1 y_n + a^{-1}T_2 x_n + \sum_{j=2}^{n-1} x_j y_{n+1-j} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{j=2}^{n-1} x_j y_{n+1-j} \in (T_1T_2)$. Par factorialité de $\mathcal{O}_N$, nous voyons donc que $y_n \in (T_2)$ et $x_n \in (T_1)$.

Le terme homogène d'ordre $i$ de $xy$ est donc égal à

$$aT_1 y_{i-1} + a^{-1}T_2 x_{i-1} + \sum_{j=2}^{i-2} x_j y_{i-j}.$$

Or ce terme appartient à l'idéal engendré par $T_1$ et $T_2$. Il ne peut donc pas être égal à $T_3^i$. Il n'existe donc pas de tels $x$ et $y$, d'où le résultat. □

## 6. Fonction de Artin d'un monôme

Nous allons utiliser ici les résultats précédents pour montrer que la fonction de Artin de certains polynômes, en particulier des monômes, est bornée par une fonction affine, dans le cas où l'anneau de base est réduit ou analytiquement irréductible. Nous avons tout d'abord le résultat suivant qui est un corollaire direct de la Proposition 4.3 :

**Corollaire 6.1.** *Soit*

$$g(X, Y, Z_j) := XY + \sum_{j=1}^{p} f_j Z_j$$

*avec $I = (f_1, \ldots, f_p)$ un idéal propre de $A$ nœthérien tel que $A/I$ soit analytiquement irréductible. Alors $g$ admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine.*

Nous donnons ensuite une généralisation du Corollaire 6.1 :

**Théorème 6.2.** *Soient $A$ un anneau local nœthérien et $I=(f_j)$ un idéal de $A$ tels que $A/I$ soit analytiquement irréductible ou tels que $A/I$ soit réduit et $A$ vérifie la PA. Alors tout polynôme à coefficients dans $A$ de la forme $f\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}+\sum_{j=1}^p f_jZ_j$ admet une fonction de Artin majorée par une fonction linéaire.*

**Remarque 6.** Le théorème précédent est vrai en particulier pour un monôme vu comme polynôme à coefficients dans un anneau analytiquement irréductible ou réduit et vérifiant la PA.

**Preuve.** Notons $g(X_k,Z_j)=f\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}+\sum_{j=1}^p f_jZ_j$.

*Première étape.* Nous allons d'abord nous ramener au cas où $I=(0)$, c'est-à-dire au cas où $g$ est un monôme. Nous notons $\bar g(X_k)$ le polynôme $f\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}\in A/I[X_k]$ et supposons que ce polynôme admette une fonction de Artin bornée par une fonction affine $a\mapsto ai+b$. Soient $x_1,\dots,x_r,z_1,\dots,z_p$ tels que $g(x_k,z_j)\in\mathfrak m^{i+1}$. Alors $\bar g(x_k)\in\mathfrak m^{i+1}$ et donc il existe $\bar x_k\in A$ tel que $\bar g(\bar x_k)=0$ dans $A/I$ et $\bar x_k-x_k\in\mathfrak m^{(i-b)/a}$. Donc il existe des $z'_j$ tels que $f\prod_{k=1}^r\bar x_k^{n_k}=\sum_j f_jz'_j$ dans $A$. D'où $\sum_j f_j(z_j+z'_j)\in\mathfrak m^{(i-b)/a}$ et d'après Artin–Rees (Théorème 3.1) il existe des $t_j$ tels que $\sum_j f_jt_j=0$ et $t_j-(z_j+z'_j)\in\mathfrak m^{(i-b)/a-i_0}$ où $i_0$ ne dépend que de $I$. Nous posons alors $\bar z_j=t_j-z'_j$ pour tout $j$. Nous avons alors $g(\bar x_k,\bar z_j)=0$, et $\bar x_k-x_k\in\mathfrak m^{(i-b)/a}$ et $\bar z_j-z_j\in\mathfrak m^{(i-b)/a-i_0}$ pour tous $k$ et $j$. Il nous suffit donc de montrer que $\bar g$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.

*Deuxième étape.* Nous allons nous ramener au cas où $f=1$. Nous avons $f\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}=0$ si et seulement si $\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in((0):f)$. De plus si nous avons $f\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in\mathfrak m^{i+1}$, alors d'après Artin–Rees, il existe $i_0$ qui ne dépend que de $((0):f)$, tel que $\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in((0):f)\mathfrak m^{i-i_0+1}$. Donc montrer que le polynôme $f\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}\in A[X_k]$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine revient à montrer que $\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}\in A/((0):f)[X_k]$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.

Nous pouvons remarquer que si $A$ est réduit et si $x^k\in((0):(f))$ alors $fx^k=0$ et donc $xf=0$ et $x\in((0):f)$, d'où $((0):f)$ est radical et $A/((0):f)$ est réduit.

De même nous pouvons remarquer que si $A$ est analytiquement irréductible alors $A$ est intègre et donc $((0):f)=(0)$. Donc $A/((0):f)=A$ est analytiquement irréductible.

*Troisième étape.* Nous allons traiter le cas où $A/I$ est analytiquement irréductible. Supposons que $f=1$ et $I=(0)$. Soit $i\in\mathbb N$ et soient $x_1,\dots,x_r$ tels que $g(x_k)\in\mathfrak m^{i+1}$. Alors nous avons

$$\nu_I\left(\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\right)\geqslant i+1\quad\text{et}\quad a\left(\nu_I\left(\prod_{k=1}^{r-1} x_k^{n_k}\right)+\nu_I\left(x_r^{n_r}\right)\right)+b\geqslant i+1$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.21 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 21


où $a$ et $b$ sont les constantes d'une ICL vérifiée par $I$. Par récurrence sur $r$ il existe $k_0 \in \{1,\dots,r\}$ tel que

$$\nu_I\left(x_{k_0}^{n_{k_0}}\right) \geqslant \left\lfloor \frac{i-b'}{a'} \right\rfloor + 1$$

pour $a'$ et $b'$ des constantes indépendantes des $x_k$ et de $i$ et où $\lfloor c \rfloor$ est la partie entière de $c$. Ensuite si $\nu_I(x^n) \geqslant \lfloor \frac{i-b'}{a'} \rfloor + 1$, alors par récurrence sur $n$ nous avons

$$\nu_I(x) \geqslant \left\lfloor \frac{i-b''}{a''} \right\rfloor + 1$$

pour $a''$ et $b''$ des constantes indépendantes de $x$ et de $i$. Il suffit alors de poser $\bar{x}_{k_0} = 0$ et $\bar{x}_k = x_k$ pour $k \neq k_0$. Nous avons alors

$$g(\bar{x}_k) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}_k - x_k \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-b'')/a'' \rfloor + 1}.$$

Donc le théorème est prouvé pour $A/I$ analytiquement irréductible.

*Quatrième étape.* Nous allons montrer qu'il suffit, dans le cas où $A$ est réduit et vérifie la PA, de montrer le résultat pour $A$ complet nœthérien et régulier et $I$ radical. Cela découle des lemmes 2.1 et 2.2, et du lemme suivant :

**Lemme 6.3** [11, Section 4]. *Soit $A$ un anneau local réduit nœthérien vérifiant la PA. Alors $\hat{A}$ (le complété de $A$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique) est réduit.*

*Dernière étape.* Supposons maintenant que $A$ est complet, nœthérien et régulier et $I$ radical et soient $i \in \mathbb{N}$ et $x_1,\dots,x_r,z_1,\dots,z_p$ fixés tels que $g(x_k,z_j) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Soit

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_q$$

la décomposition primaire de $I$ avec les $P_j$ premiers. Alors nous avons

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{n_k} \in P_1 \cap \cdots \cap P_q + \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Donc pour tout $j$, $\prod_{k=1}^r x_k^{n_k} \in P_j + \mathfrak{m}^{i+1}$. Donc d'après ce qui précède, il existe $k$ tel que $x_k \in P_j + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d)/c \rfloor + 1}$ avec $c$ et $d$ des constantes qui ne dépendent que des $P_j$. Fixons $k \in \{1,\dots,r\}$. Notons $J_k$ l'ensemble des $j$ tel que $x_k \in P_j + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d)/c \rfloor + 1}$. Si $J_k = \emptyset$, nous posons alors $\bar{x}_k = x_k$. Dans le cas contraire, pour tout $j \in J_k$,

$$x_k = \sum_{l \in H_j} p_{j,l} x_{j,l} + m_{k,j}$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.22 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 22



où les $p_{j,l}$ (quand $l$ parcourt l'ensemble $H_j$) engendrent $P_j$ et $m_{k,j} \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d)/c \rfloor +1}$ pour tout $j$. Soit $l_{j_1,j_2}$ la forme linéaire

$$l_{j_1,j_2}(X_{j_1,l}, X_{j_2,l'}) := \sum_{l \in H_{j_1}} p_{j_1,l} X_{j_1,l} - \sum_{l' \in H_{j_2}} p_{j_2,l'} X_{j_2,l'}.$$

Nous avons $l_{j_1,j_2}(x_{j_1,l}, x_{j_2,l'}) \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d)/c \rfloor +1}$ pour tout $j_1$ et $j_2$ dans $J_k$. D'après le Théorème 3.1, pour tous $j \in J_k$ et pour tout $l \in H_j$, il existe donc des

$$\bar{x}_{j,l} \in x_{j,l} + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d')/c' \rfloor +1}$$

tels que :

$$l_{j_1,j_2}(\bar{x}_{j_1,l}, \bar{x}_{j_2,l'}) = 0 \quad \text{pour tout } j_1,\ j_2 \in J_k,\ \text{tout } l \in H_{j-1} \text{ et tout } l' \in H_{j_2},$$

avec $c'$ et $d'$ des constantes qui ne dépendent que des $P_j$. Nous notons alors $\bar{x}_k = \sum p_{j_1,l} \bar{x}_{j_1,l}$ et d'après ce qui précède

$$\forall k \quad \bar{x}_k \in \left( \bigcap_{j \in J_k} P_j \right) \cap \left( x_k + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d')/c' \rfloor +1} \right).$$

Comme $\bigcup_k J_k = \{1, \ldots, r\}$, nous avons

$$\prod_{k=1}^{r} \bar{x}_k^{n_k} \in I \cap \left( \prod_{k=1}^{r} x_k^{n_k} + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d')/c' \rfloor +1} \right).$$

Donc il existe des $z_j^*$ tels que $\prod_{k=1}^{r} \bar{x}_k^{n_k} + \sum_{j=1}^{p} f_j z_j^* = 0$ ou encore

$$\sum_{j=1}^{p} f_j \left( z_j^* - z_j \right) \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d')/c' \rfloor +1}.$$

Donc, d'après le lemme d'Artin–Rees, il existe des

$$\varepsilon_j \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d'')/c'' \rfloor +1}$$

tels que $\sum f_j (z_j^* - z_j + \varepsilon_j) = 0$, où $c''$ et $d''$ ne dépendent que des $P_j$ et de $I$. Nous posons alors $\bar{z}_j = z_j - \varepsilon_j$ pour tout $j$. Nous avons donc

$$\prod_{k=1}^{r} \bar{x}_k^{n_k} + \sum_{j=1}^{p} f_j \bar{z}_j = 0 \quad \text{et} \quad \forall j,\ \forall k, \quad \bar{x}_k - x_k,\ \bar{z}_j - z_j \in \mathfrak{m}^{\lfloor (i-d'')/c'' \rfloor +1}. \qquad \square$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.23 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 23


**Exemple 6.4.** Soit $f$ un germe de fonction de Nash (respectivement de fonction holomorphe). Alors si $f = gh$ avec $g$ et $h$ deux séries formelles non inversibles alors $f$ peut s'écrire comme le produit de deux germes de fonctions de Nash (respectivement de deux fonctions holomorphes) non inversibles.

**Exemple 6.5.** Il est en général faux que $XY$ admette une fonction de Artin. Considérons, par exemple, l'anneau

$$A := \frac{\Bbbk[T_1, T_2]_{(T_1,T_2)}}{T_1^2 - T_2^2(1+T_2)} \quad \text{avec } \Bbbk \text{ un corps de caractéristique nulle.}$$

$A$ est irréductible mais pas analytiquement irréductible. Nous avons la relation $T_1^2 - T_2^2(1+T_2) = (T_1 - T_2\sqrt{1+T_2})(T_1 + T_2\sqrt{1+T_2})$ où $\sqrt{1+T_2}$ est une des deux séries formelles dont le carré vaut $1+T_2$. Soit $(\sqrt{1+T_2})_n$ la série $\sqrt{1+T_2}$ tronquée à l'ordre $n$. Nous avons

$$\operatorname{ord}\bigl(\bigl(\sqrt{1+T_2}\bigr)_n - \sqrt{1+T_2}\bigr) = n+1.$$

Regardons le polynôme

$$g(X,Y,Z) = XY - \bigl(T_1^2 - T_2^2(1+T_2)\bigr)Z$$

de l'anneau $\Bbbk[T_1, T_2]_{(T_1,T_2)}[X,Y,Z]$. Posons

$$x_n = T_1\bigl(T_1 - T_2\bigl(\sqrt{1+T_2}\bigr)_n\bigr), \qquad y_n = T_1 + T_2\bigl(\sqrt{1+T_2}\bigr)_n \quad \text{et} \quad z = T_1.$$

Nous avons $x_n y_n - (T_1^2 - T_2^2(1+T_2))z \in \mathfrak{m}^{n+4}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Or $x_n \notin (T_1^2 - T_2^2(1+T_2)) + \mathfrak{m}^3$ et $y_n \notin (T_1^2 - T_2^2(1+T_2)) + \mathfrak{m}^2$. Donc il n'existe pas de solution de $g$ « proche » de $(x_n, y_n, z)$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

La preuve précédente est constructive, dans le sens où l'on peut donner une expression d'une fonction affine bornant la fonction de Artin de $g$ en terme de coefficients apparaissant dans des ICL et de coefficients pour lesquels le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour des idéaux dépendants de $I$. Néanmoins ces bornes peuvent être améliorées à l'aide d'un théorème dû à Rees. Nous donnons un exemple ci-dessous.

### 6.1. *Bornes explicites*

Nous allons donner ici deux majorations affines de la fonction de Artin du polynôme $X^n + \sum_j f_j Z_j$ : l'une à l'aide du théorème d'Izumi et l'autre à l'aide d'un théorème de Rees (cf. Théorème 6.7).

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.24 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 24


**Lemme 6.6.** *Soient $A$ un anneau local nœthérien complet et $I$ un idéal radical de $A$ engendré par $f_1, \dots, f_p$. Soit $g(X, Z_j) := X^n + \sum_j f_j Z_j$. Alors $g$ admet une fonction de Artin majorée par*

$$i \mapsto (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i + i_P + i_I) + b\big(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}\big)$$

*où $a$ et $b$ sont les plus petites constantes d'une ICL vérifiée par tous les idéaux premiers associés à $I$, $i_P$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour les idéaux engendré par deux idéaux premiers associés à $I$ et $i_I$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour $I$ (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).*

**Preuve.** Soient $x$ et des $z_j$ tels que

$$x^n + \sum_j f_j z_j \in \mathfrak{m}^{(2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i+i_P+i_I) + b(1+2a+\cdots+(2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}) + 1}.$$

Soit

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$$

la décomposition primaire de $I$ avec les $P_l$ premiers. Alors

$$\nu_{P_l}\big(x^n\big) \geqslant (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i + i_P + i_I) + b\big(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}\big) + 1$$

pour tout $l$.

Nous pouvons construire la suite suivante par récurrence (où $n_0 = n$) :

Si $n_k$ est pair on pose $n_{k+1} = n_k/2$, sinon on pose $n_{k+1} = (n_k + 1)/2$. Ecrivons $n_k$ et $n_{k+1}$ en base 2 :

$$n_k = \alpha_0 + \alpha_1 2 + \cdots + \alpha_{q-1} 2^{q-1} + 2^q \quad \big(q = \big\lfloor \ln_2(n_k) \big\rfloor\big),$$
$$n_{k+1} = \beta_0 + \beta_1 2 + \cdots + \beta_{q-1} 2^{q-1} + \beta_q 2^q$$

avec les $\alpha_j$ et les $\beta_j$ dans $\{0, 1\}$.

Si $\alpha_0 = 0$, alors $\beta_q = 0$ et $\beta_{q-1} = 1$. Si $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 1$ alors $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-1} = 0$ et $\beta_q = 1$. Si l'un des $\alpha_j$, pour $0 \leqslant j \leqslant q - 1$, est nul, alors $\beta_q = 0$.

Si $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 0$ alors $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-2} = 0$ et $\beta_{q-1} = 1$. Nous voyons donc, si $q = \lfloor \ln_2(n) \rfloor$, que $n_q = 1$ ou $n_{q+1} = 1$.

Donc, d'après les hypothèses, nous avons

$$\nu_{P_l}\big(x^{n_1}\big) \geqslant (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}(i + i_P + i_I) + b\big(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor - 1}\big) + 1.$$

Par induction nous avons alors

$$\nu_{P_l}(x) \geqslant i + i_P + i_I + 1.$$

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.25 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 25


Il existe donc des $x_{l,j}$ tels que $x - \sum_j p_{l,j} x_{l,j} \in \mathfrak{m}^{i+i_P+i_I+1}$ où les $p_{l,j}$ engendrent $P_l$. D'après la dernière étape de la preuve du Théorème 6.2, il existe donc $\bar{x} \in (P_1 \cap \cdots \cap P_r) \cap (x + \mathfrak{m}^{i+i_I+1})$.

Il existe alors des $z_j^*$ tels que $\bar{x} = \sum_j f_j z_j^*$ et $x - \sum_j f_j z_j^* \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$. Notons $\bar{x}^n = \sum_j f_j z_j^{**}$ avec les $z_j^{**}$ dans $A$. Nous avons alors $\sum_j f_j (z_j + z_j^{**}) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ et il existe alors des $t_j \in z_j + z_j^{**} + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que $\sum_j f_j t_j = 0$. On pose alors $\bar{z}_j = t_j - z_j^{**}$. Nous avons bien $g(\bar{x}, \bar{z}_j) = 0$ et $\bar{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\bar{z}_j - z_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $j$. □

Nous voyons ici que le coefficient $\lambda$ de la fonction $i \to \lambda i + c$ décrite ci-dessus est de la forme $n^c$ pour une constante $c \geqslant 1$. Il est possible dans ce cas d'améliorer cette borne à l'aide du théorème suivant :

**Théorème 6.7** [16]. *Soit $A$ un anneau local et nœthérien et $I$ un idéal de $A$ tel que $A/I$ est non ramifié. Alors, pour tout $x$ dans $A$, la limite $\lim_n (\nu_I(x^n))/n$ existe et est égale à la limite supérieure de cette suite. Notons $\bar{\nu}_I$ la fonction définie par*

$$\forall x \in A, \quad \bar{\nu}_I(x) = \lim_n \frac{\nu_I(x^n)}{n}.$$

*Il existe alors une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$\forall x \in A, \quad \nu_I(x) \leqslant \bar{\nu}_I(x) \leqslant \nu_I(x) + c.$$

Pour un entier $c$ nous notons $\lceil c \rceil$ sa partie entière supérieure, c'est-à-dire $\lceil c \rceil = c$ si $c$ est entier et $\lceil c \rceil = \lfloor c \rfloor + 1$ si $c$ n'est pas entier. Nous pouvons alors déduire le lemme suivant

**Lemme 6.8.** *Soit $A$ un anneau local nœthérien complet et $I$ un idéal radical de $A$ engendré par $f_1, \ldots, f_p$. Soit $g(X, Z_j) := X^n + \sum_j f_j Z_j$. Alors $g$ admet une fonction de Artin majorée par la fonction*

$$i \mapsto n\left\lceil \frac{i + i_I}{n} \right\rceil + nc \leqslant i + i_I + n(c+1)$$

*où $c$ est la plus petite constante telle que $\forall x \in A$, $\bar{\nu}_I(x) \leqslant \nu_I(x) + c$ et $i_I$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour $I$ (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).*

**Preuve.** Soient $x$ et des $z_j$ tels que

$$x^n + \sum_j f_j z_j \in \mathfrak{m}^{n\lceil (i+i_I)/n \rceil + nc+1}$$

avec les notations du lemme. Alors

$$\frac{\nu_I(x^n)}{n} \leqslant \bar{\nu}_I(x) \leqslant \nu_I(x) + c$$

d'après le théorème de Rees. Or nous avons $\nu_I(x^n) \geqslant n\lceil (i+i_I)/n\rceil + nc + 1$, donc $\nu_I(x) \geqslant \lceil (i+i_I)/n\rceil + 1$. Il existe alors des $z_j^*$ tels que

$$x - \sum_j f_j z_j^* \in \mathfrak{m}^{\lceil (i+i_I)/n\rceil + 1},$$

c'est-à-dire $x = \sum_j f_j z_j^* + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathfrak{m}^{\lceil (i+i_I)/n\rceil+1}$. D'où $x^n = \sum_j f_j R_j(z_j^*, \varepsilon) + \varepsilon^n$ avec $R_j$ des polynômes en $p+1$ variables. D'où $\sum_j f_j(z_j + R_j(z_j^*, \varepsilon)) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ et il existe alors des $t_j \in z_j + R_j(z_j^*, \varepsilon) + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que $\sum_j f_j t_j = 0$. On pose alors $\bar{z}_j = t_j - R_j(z_j^*, \varepsilon)$ et $\bar{x} = \sum_j f_j z_j^*$. $\square$

Nous allons maintenant utiliser ce dernier lemme pour obtenir des déterminations explicites de clôtures intégrales approchées d'idéaux.

## 7. Application à des déterminations explicites de clôtures intégrales approchées d'idéaux

### *7.1. Clôture intégrale approchée d'un idéal*

Nous commençons tout d'abord par rappeler certains résultats connus. Si $I$ est un idéal d'un anneau $A$ intègre, nous notons $\bar{I}$ sa clôture intégrale. Il est bien connu (voir, par exemple, [5]) que $I \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}$. En particulier si $I$ est radical alors $\bar{I} = I$. D'autre part si $A$ est principal, alors $\bar{I} = I$.

D. Delfino et I. Swanson ont montré le théorème suivant qui est une généralisation d'un théorème de Rees [17] :

**Théorème 7.1** [4]. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien excellent. Soit $I$ un idéal de $A$. Alors il existe $a$ et $b$ des entiers tels que*

$$\overline{I + \mathfrak{m}^{ai+b}} \subset \bar{I} + \mathfrak{m}^i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$
$$\textit{ou encore} \quad \overline{I + \mathfrak{m}^i} \subset \bar{I} + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-b)/a\rfloor}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pour prouver ce théorème, D. Delfino et I. Swanson se ramènent au cas où $I$ est principal et $A$ complet et normal. Dans ce cas elles montrent que tout élément de $\overline{I + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une relation de la forme

$$X^n + X^{n-1}\sum_j g_j X_{1,j} + \cdots + \sum_{j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_n} g_{j_1}\cdots g_{j_n} X_{n,j_1,\ldots,j_n} \in \mathfrak{m}^{\lfloor i/l\rfloor}$$

où $n$ et $l$ sont indépendants de l'élément choisi et de l'entier $i$. Ensuite elles montrent, toujours sous les mêmes hypothèses ($I$ principal et $A$ complet et normal), que le polynôme précédent admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine (Théorème 3.10 de [4]).

ARTICLE IN PRESS
S0021-8693(05)00544-2/FLA AID:10767 Vol.●●●(●●●) yjabr10767 [DTD5] P.27 (1-31)
YJABR:m1 v 1.50 Prn:29/10/2005; 14:43 by:SL p. 27


Nous allons donner dans cette partie une généralisation du Théorème 3.10 de [4]. L'intérêt de notre preuve vient du fait que celle-ci est constructive et permet d'obtenir des bornes explicites en termes de coefficients apparaissant dans certaines ICL.

### 7.2. *Généralisation d'un résultat de Delfino et Swanson*

En utilisant le Lemme 6.8, nous allons donc donner deux propositions qui généralisent le Théorème 3.10 de [4] :

**Proposition 7.2.** *Soit*

$$g(X, X_{1,j}, \dots, X_{n,j_1,\dots,j_n}, Y_1, \dots, Y_q) := X^n + X^{n-1}\sum_j g_j X_{1,j} + \cdots + \sum_{j_1\leqslant\cdots\leqslant j_n} g_{j_1}\cdots g_{j_n} X_{n,j_1,\dots,j_n} + \sum_{l=1}^{q} f_l Y_l$$

*avec les $g_j$ et les $f_l$ dans $A$, local complet nœthérien, tels que $I=(f_l)+(g_j)$ soit radical. Alors $g$ admet une fonction de Artin majorée par la fonction*

$$i \mapsto i + i_I + n(c+1)$$

*où $c$ est la plus petite constante telle que $\forall x \in A$, $\bar{\nu}_I(x) \leqslant \nu_I(x) + c$, et $i_I$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour $I$ (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).*

**Preuve.** Soient $(x, x_{1,j}, \dots, x_{n,j_1,\dots,j_n}, y_1, \dots, y_q) \in A$ tels que

$$g(x, x_{1,j}, \dots, x_{n,j_1,\dots,j_n}, y_l) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+n(c+1)}.$$

Posons

$$t'_j = x^{n-1}x_{1,j} + x^{n-2}\sum_{j_2\geqslant j} g_{j_2}x_{2,j,j_2} + \cdots + \sum_{j_n\geqslant\cdots\geqslant j_2\geqslant j} g_{j_2}\cdots g_{j_n}x_{n,j,j_2,\dots,j_n}.$$

Alors nous avons

$$x^n + \sum_j g_j t'_j + \sum_l f_l y_l = g(x, x_{1,j}, \dots, x_{n,j_1,\dots,j_n}, y).$$

D'après la preuve du Lemme 6.8, il existe $\bar{x} \in x + \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ tel que $\bar{x} \in I$. Nous pouvons écrire $\bar{x} = \sum_j g_j x'_j + \sum_l f_l z_l$. Nous avons alors

$$g(\bar{x}, x_{1,j}, \dots, x_{n,j_1,\dots,j_n}, y_l) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}.$$

D'où

$$\sum_{j_1\leqslant\cdots\leqslant j_n} g_{j_1}\cdots g_{j_n}\left(x_{n,j_1,\ldots,j_n}+h_{j_1,\ldots,j_n}\left(x_{1,j},\ldots,x_{n-1,j'_1,\ldots,j'_{n-1}},x'_j\right)\right)+\sum_l f_l t_l\in\mathfrak{m}^{i+i_I+1}$$

avec $t_l=y_l+t_l^*(x'_j,z_l)$ et $h_{j_1,\ldots,j_n}$ polynomiale à coefficients dans $A$. D'après Artin et Rees, il existe alors $(\bar t_1,\ldots,\bar t_q)\in(t_1,\ldots,t_q)+\mathfrak{m}^{i+1}$ et

$$\bar t_{j_1,\ldots,j_n}\in x_{n,j_1,\ldots,j_n}+h_{j_1,\ldots,j_n}\left(x_{1,j},\ldots,x_{n-1,j'_1,\ldots,j'_{n-1}},x'_j\right)+\mathfrak{m}^{i+1}$$

tels que $\sum_{j_1\leqslant\cdots\leqslant j_n} g_{j_1}\cdots g_{j_n}\bar t_{j_1,\ldots,j_n}+\sum_l f_l\bar t_l=0$. Posons alors

$$\bar x_{i,j_1,\ldots,j_i}=x_{i,j_1,\ldots,j_i}\quad\text{pour tout } i<n$$

et

$$\bar x_{n,j_1,\ldots,j_n}=\bar t_{j_1,\ldots,j_n}-h_{j_1,\ldots,j_n}\left(x_{1,j},\ldots,x_{n-1,j'_1,\ldots,j'_{n-1}},x'_j\right).$$

Nous avons $\bar x_{i,j_1,\ldots,j_i}-x_{i,j_1,\ldots,j_i}\in\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $i$ et $j_k$. Posons $\bar y_l=\bar t_l-t_l^*$ pour tout $l$. Nous avons donc $\bar y_l-y_l\in\mathfrak{m}^{i+1}$ et $\bar x-x\in\mathfrak{m}^{i+1}$. De plus il est clair que $g(\bar x,\bar x_j,\bar y_l)=0$. □

**Proposition 7.3.** *Soit*

$$g(X,X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_q)=X^n+f^tX^{n-1}X_1+\cdots+f^{nt}X_n+\sum_{l=1}^q f_lY_l$$

*avec les $f_j$ et $f$ dans $A$, local complet nœthérien, tels que $((f_j):f)=(f_j)$ et $I:=(f,f_j)$ soit radical, et soit $t$ un entier strictement positif. Alors $g$ admet une fonction de Artin majorée par*

$$i\to i+i_I+ti_{J_n}+tn(c+1)$$

*où $c$ est la plus petite constante telle que $\forall x\in A$, $\bar\nu_I(x)\leqslant\nu_I(x)+c$, et $i_{J_n}$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour $J_n=(f^n,(f_j))$ (c'est-à-dire $J_n\cap\mathfrak{m}^{i+i_{J_n}}\subset J_n\mathfrak{m}^i$) et $i_I$ est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin–Rees est vérifié pour $I$.*

**Preuve.** Notons $I:=(f,f_l)$. Soit $i$ un entier positif. Soient $x$, des $x_j$ et des $y_k$ tels que

$$g(x,x_j,y_k)\in\mathfrak{m}^{i+i_I+ti_{J_n}+tn(c+1)+1}.$$

Supposons tout d'abord qu'il existe $\bar x$ et des $\bar x_j$ tels que $\bar x-x$, $\bar x_j-x_j\in\mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ pour tout $j$, et $\bar x^n+f^t\bar x^{n-1}\bar x_1+\cdots+f^{nt}\bar x_n\in(f_l)$. Il existe alors des $t_l$ tels que $\bar x^n+f^t\bar x^{n-1}\bar x_1+$

$\cdots + f^{nt}\bar{x}_n = \sum_l f_l t_l$. Nous avons alors $\sum_l f_l(y_l + t_l) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$. Il existe alors des $z_l \in y_l + t_l + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que $\sum_l f_l z_l = 0$. Nous posons alors $\bar{y}_l = z_l - t_l$. Nous avons $\bar{y}_l - y_l \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $l$ et $g(\bar{x}, \bar{x}_j, \bar{y}_l) = 0$. Nous pouvons donc supposer que $(f_l) = (0)$.

Supposons alors $(f_l) = (0)$. Alors, comme dans la preuve de la proposition précédente, il existe $\bar{x} \in I$ tel que nous ayons $\bar{x} = x$ modulo $\mathfrak{m}^{i+ti_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$. Donc nous avons

$$x = fx' + \varepsilon_1$$

avec $\varepsilon_1 \in \mathfrak{m}^{i+i_I+ti_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$. Nous avons alors

$$f^n x'^n + f^{t+n-1}x'^{n-1}x_1 + \cdots + f^{nt}x_n \in \mathfrak{m}^{i+i_I+ti_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}.$$

D'où

$$f^n\left(x'^n + f^{t-1}x'^{n-1}x_1 + \cdots + f^{n(t-1)}x_n\right) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+ti_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}.$$

Donc nous avons $x'^n + f^{t-1}x'^{n-1}x_1 + \cdots + f^{n(t-1)}x_n \in \mathfrak{m}^{i+i_I+(t-1)i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$, car $((0) : f) = (0)$.

On obtient le résultat par récurrence sur $t$, car pour $t = 0$ le polynôme est lisse en tout point (le coefficient de $x_n$ est égal à 1). $\square$

### 7.3. *Exemple effectif*

Cet exemple est cité dans [4] mais incorrectement étudié car les auteurs utilisent un résultat de M. Lejeune-Jalabert uniquement valable pour $A = \Bbbk[\![T]\!]$. Pour étudier cet exemple, nous allons utiliser ici la Proposition 7.3 et un résultat de Delfino et Swanson [4].

Soient $a, t, N \in \mathbb{N}$ tels que $a \geqslant 2$, $t \geqslant 1$ et $N \geqslant 3$ et $\Bbbk$ un corps contenant les racines $a$-ièmes de l'unité et de caractéristique ne divisant pas $a$. Notons

$$A := \frac{\Bbbk[\![T_1, \ldots, T_N]\!]}{(T_1^a + \cdots + T_N^a)}.$$

Soit $B = \Bbbk[\![T_1, T_2, \ldots, T_{N-1}]\!]$. L'extension $\mathrm{Frac}(A) \subset \mathrm{Frac}(B)$ est galoisienne et séparable et notons $n = [\mathrm{Frac}(A) : \mathrm{Frac}(B)]$. L'entier $n$ divise $\Phi(a)$, la fonction d'Euler de $a$, donc $n < a$. Nous utilisons alors :

**Lemme 7.4** [4]. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local complet normal nœthérien et soit $f$ un élément non nul de $A$. Soit $B = \Bbbk[\![f, f_2, \ldots, f_N]\!]$ où $(f, f_2, \ldots, f_N)$ est un système de paramètres de $A$. Supposons que* $\mathrm{Frac}(A) \subset \mathrm{Frac}(B)$ *est une extension galoisienne séparable et notons* $n = [\mathrm{Frac}(A) : \mathrm{Frac}(B)]$. *Alors tout élément de $\overline{f^t A + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une équation de degré $n$ sur $f^t A + \mathfrak{m}^{\lfloor i/(nt)\rfloor}$.*

Donc d'après le lemme précédent, tout élément de $\overline{T_1^t A + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une équation de degré $n$ sur $T_1^t A + \mathfrak{m}^{\lfloor i/(nt)\rfloor}$.

ARTICLE IN PRESS


Soit $x \in A$ vérifiant une équation de degré $n$ sur $T_1^t A + \mathfrak{m}^{\lfloor i/(nt) \rfloor}$. Notons $I$ l'idéal $(T_1, T_2^a + \cdots + T_N^a)$. Si $N > 3$, $\nu_I$ est une valuation car $Gr_{\mathfrak{m}} A/I$ est intègre.

Si $N \geqslant 3$, l'idéal $I$ étant homogène et radical, nous avons aussi $c = 0$. D'après le Corollaire 4.8, nous avons $i_{J_n} = a$.

Si $N \geqslant 3$, d'après le Lemme 4.7, comme $T_1$ et $T_2^a + \cdots + T_N$ forment une suite régulière, $i_I = a$.

Donc, d'après la Proposition 7.3, il existe $\bar{x} \in T_1^t A \cap (x + \mathfrak{m}^{\lfloor (i-a)/(nt) \rfloor - t(a+n)})$. Nous obtenons alors :

**Proposition 7.5.** *Soient $a, t, N \in \mathbb{N}$ tels que $a \geqslant 2$, $t \geqslant 1$ et $N \geqslant 3$ et $\Bbbk$ un corps contenant les racines $a$-ièmes de l'unité et de caractéristique ne divisant pas $a$ et*

$$A = \frac{\Bbbk[\![T_1, \ldots, T_N]\!]}{(T_1^a + \cdots + T_N^a)}.$$

*Alors*

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \overline{T_1^t A + \mathfrak{m}^i} \subset T_1^t A + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{(i-a)}{nt} \rfloor - t(a+n)} \tag{3}$$

*où* $n = [\mathrm{Frac}(A) : \mathrm{Frac}(B)]$.

## Remerciements

Je tiens à remercier M. Hickel et M. Spivakovsky pour leurs conseils et remarques. Je suis gré au premier de m'avoir fait remarquer que le lemme d'Artin–Rees et le théorème d'Izumi étaient des cas particuliers de linéarité de fonctions de Artin. Je tiens aussi à remercier vivement le referee pour ses remarques et sa patience face à une première version très pénible.

## Références

[1] J.M. Aroca, H. Hironaka, J.L. Vicente, The theory of maximal contact, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan 29 (1975).
[2] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 36 (1969) 23–58.
[3] E. Bierstone, P.D. Milman, Relations among analytic functions I, Ann. Inst. Fourier 37 (1987) 187–239.
[4] D. Delfino, I. Swanson, Integral closure of ideals in excellent local rings, J. Algebra 187 (1997) 422–445.
[5] D. Eisenbud, Commutative Algebra, Springer-Verlag, New York, 1995.
[6] M.J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 31 (1966) 59–64.
[7] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, Amer. J. Math. 115 (1993) 1299–1334.
[8] C. Huneke, Uniform bounds in Noetherian rings, Invent. Math. 107 (1992) 203–223.
[9] S. Izumi, Linear complementary inequalities for orders of germs of analytic functions, Invent. Math. 65 (1982) 459–471.
[10] S. Izumi, A measure of integrity for local analytic algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985) 719–736.

[11] H. Kurke, T. Mostowski, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen, Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Lecture Notes in Math., vol. 634, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
[12] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, Amer. J. Math. 112 (1990) 525–568.
[13] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
[14] G. Pfister, D. Popescu, Die strenge Approximationeigenschaft lokaler Ringe, Invent. Math. 30 (1975) 145–174.
[15] D. Popescu, General Neron desingularisation and approximation, Nagoya Math. J. 104 (1986) 85–115.
[16] D. Rees, Valuations associated with a local ring (II), J. London Math. Soc. 31 (1956) 228–235.
[17] D. Rees, A note on analytically unramifed local rings, J. London Math. Soc. 36 (1961) 24–28.
[18] D. Rees, Izumi's theorem, in: Commutative Algebra, Berkeley, CA, 1987, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 15 (1989) 407–416.
[19] G. Rond, Contre-exemple à la linéarité de la fonction de Artin, prépublication ArXiv, 2004.
[20] M. Spivakovsky, Non-existence of the Artin function for henselian pairs, Math. Ann. 299 (1994) 727–729.
[21] M. Spivakovsky, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, J. Amer. Math. Soc. 12 (2) (1999) 381–444.
[22] R. Swan, Néron–Popescu desingularization, in: Algebra and Geometry, Taipei, 1995, in: Lect. Algebra Geom., vol. 2, Internat. Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 135–192.
[23] B. Teissier, Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative [d'après Artin, Popescu et Spivakovsky], Sém. Bourbaki 784 (1994).
[24] T. Wang, A stratification given by Artin–Rees estimates, Canad. J. Math. 44 (1992) 194–205.