



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra



# Bornes effectives des fonctions d'approximation des solutions formelles d'équations binomiales

Guillaume Rond

IML, Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France

## INFO ARTICLE

### Historique de l'article :

Reçu le 21 septembre 2009

Disponible sur Internet le xxxx

Communiqué par Steven Dale Cutkosky

### MSC:

primary 13B40

secondary 13P99, 14B12

### Keywords:

Artin approximation

Artin function

Binomial ideal

## ABSTRACT

The aim of this paper is to give an effective version of the Strong Artin Approximation Theorem for binomial equations. First we give an effective version of the Greenberg Approximation Theorem for polynomial equations, then using the Weierstrass Preparation Theorem, we apply this effective result to binomial equations. We prove that the Artin function of a system of binomial equations is bounded by a doubly exponential function in general and that it is bounded by an affine function if the order of the approximated solutions is bounded.

© 2010 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

Dans [Gr], M. Greenberg a montré le théorème suivant ( $\mathbb{k}$  est un corps quelconque) :

**Théorème 1.1.** (Voir [Gr].) Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{k}[t, X]$  ( $X := (X_1, \dots, X_n)$ ). Alors il existe une fonction  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x_j(t) \in \mathbb{k}[[t]], 1 \leq j \leq n, \text{ tels que } f(t, x(t)) \in (t)^{\beta(i)}, \quad \forall f \in I,$$

$$\exists \bar{x}_j(t) \in \mathbb{k}[[t]], 1 \leq j \leq n, \text{ tels que } f(t, \bar{x}(t)) = 0, \quad \forall f \in I \text{ et } \bar{x}_j(t) - x_j(t) \in (t)^i, \quad \forall j.$$

De plus il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $\forall i \in \mathbb{N} \beta(i) \leq ai + b$ .

Adresse e-mail : rond@iml.univ-mrs.fr.

0021-8693/\$ – see front matter © 2010 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

doi:10.1016/j.jalgebra.2010.02.010

Please cite this article in press as: G. Rond, Bornes effectives des fonctions d'approximation des solutions formelles d'équations binomiales, J. Algebra (2010), doi:10.1016/j.jalgebra.2010.02.010

La plus petite fonction  $\beta$  vérifiant cette propriété est appelée fonction d'approximation de Greenberg ou fonction de Artin–Greenberg de  $I$ . Dans [Ar], M. Artin a généralisé ce résultat au cas où  $t$  est remplacé par un nombre fini quelconque de variables en montrant l'existence d'une fonction d'approximation dans ce cas. On peut énoncer son théorème sous la forme suivante (dans le cas particulier où  $t$  est remplacé par deux variables  $t$  et  $z$ , mais seul ce cas nous intéressera par la suite) :

**Théorème 1.2.** (Voir [Ar].) Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{k}[t, z, X]$  ( $X := (X_1, \dots, X_n)$ ). Alors il existe une fonction  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]], 1 \leq j \leq n, \text{ tels que } f(t, z, x(t, z)) \in (t, z)^{\beta(i)}, \quad \forall f \in I,$$

$$\exists \bar{x}_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]], 1 \leq j \leq n, \text{ tels que } f(t, z, \bar{x}(t, z)) = 0, \quad \forall f \in I$$

$$\text{et } \bar{x}_j(t, z) - x_j(t, z) \in (t, z)^i, \quad \forall j.$$

La plus petite fonction vérifiant cette propriété est appelée fonction de Artin de  $I$ . On peut remarquer que si  $I$  est un idéal de  $\mathbb{k}[X]$  on peut parler de sa fonction de Artin–Greenberg et de sa fonction de Artin en faisant référence à la fonction de Artin–Greenberg de  $I\mathbb{k}[t, X]$  et à la fonction de Artin de  $I\mathbb{k}[t, z, X]$ .

Malheureusement, la preuve donnée par M. Artin (qui utilise essentiellement le théorème des fonctions implicites et le théorème de préparation de Weierstrass) n'apporte que très peu d'information sur la nature de la croissance de cette fonction (exceptée que celle-ci est constructive [La]), et pendant longtemps s'est posée la question de savoir si toute fonction de Artin était bornée par une fonction affine. On peut mentionner qu'il existe une manière différente de celle de M. Artin pour montrer l'existence d'une fonction d'approximation qui utilise les ultraproducts [B-D-L-v.D] et qui n'est pas constructive et donc qui n'apporte aucune information sur ces fonctions d'approximation. Dans [Ro2] est présenté un exemple d'un idéal dont la fonction de Artin n'est pas bornée par une fonction affine (c'est le seul exemple connu jusqu'à présent, l'exemple donné dans [Ro3] concernant le cas où les variables  $t$  et  $z$  sont remplacées par trois variables). Dans cet exemple il est montré que la fonction de Artin considérée est minorée par une fonction polynomiale de degré 2. Néanmoins on ne sait rien de plus sur cette fonction de Artin et on ne connaît toujours aucune borne générale sur aucun exemple autre que quelques cas connus où la fonction de Artin est majorée par une fonction affine. Pour mieux comprendre la croissance des fonctions de Artin, il serait intéressant d'avoir des exemples pour lesquels on ait des bornes effectives de leur fonction de Artin. On peut remarquer que l'exemple cité de [Ro2] a la particularité d'être un idéal principal engendré par un binôme.

Le but de ce travail est justement de donner des bornes générales pour la fonction de Artin d'un idéal binomial  $I$ . Le principe général est le suivant : il est plus facile d'essayer de donner des bornes sur les fonctions de Artin d'une famille d'idéaux que sur un idéal en particulier. En effet, la preuve de M. Artin et ses avatars utilisent toujours une récurrence sur la hauteur de  $I$  : si  $I$  est premier, soit on peut utiliser le théorème des fonctions implicites et on construit la solution approchée cherchée, soit on remplace  $I$  par  $I + (\delta)$  où  $\delta$  est un mineur de la matrice jacobienne de  $I$  bien choisi et on augmente ainsi la hauteur de  $I$ . Cependant, le nouvel idéal obtenu n'est plus premier a priori et l'utilisation du théorème des fonctions implicites nécessitant de travailler avec un idéal premier, il faut remplacer  $I$  par ses idéaux premiers associés et de borner la fonction de Artin de  $I$  par celles de ses idéaux premiers associés. Il se trouve que l'on connaît des bornes sur le degré de générateurs de ces idéaux premiers en fonction du degré des générateurs de  $I$ . Il est donc assez naturel d'essayer de trouver une fonction qui majore toutes les fonctions de Artin des idéaux engendré par des polynômes de degré  $d$  fixé. Cette stratégie fonctionne comme l'a montré M. Artin, i.e. on peut choisir la même fonction  $\beta$  dans le théorème 1.2 pour tous les idéaux engendrés par des polynômes de degré inférieur à une valeur fixée (cf. [Ar]). Néanmoins, il n'est pas possible d'avoir plus d'informations sur cette fonction de Artin « uniforme » que le fait que celle-ci soit constructive (cf. [La]).

Dans notre travail, nous montrons néanmoins que cette stratégie donne une borne effective des fonctions de Artin–Greenberg, c'est-à-dire donne une borne effective sur les coefficients  $a$  et  $b$  du

théorème 1.1 en fonction du degré  $d$  des générateurs de  $I$  et du nombre  $n$  de variables  $X_i$  (cf. théorème 3.1). Celle-ci est assez grande (polynomiale en  $d$ , doublement exponentielle en  $n$ ) mais a le mérite d'être uniforme. Ensuite, grâce au lemme 4.1, nous utilisons le théorème de préparation de Weierstrass de manière à ramener la majoration de la fonction de Artin d'un idéal binomial à deux majorations (cf. section 4) :

- La majoration de la fonction de Artin d'un idéal binomial dont les solutions approchées évitent le lieu singulier (et donc dans ce cas cette fonction est majorée par une fonction affine).
- La majoration des fonctions de Artin–Greenberg d'une famille d'idéaux  $(J_D)_{D \in \mathbb{N}}$  engendrés par des polynômes dépendant d'un nombre croissant de variables mais dont le degré est borné par le degré des générateurs de  $I$ . Pour cela on utilise donc le théorème 3.1.

On en déduit deux choses (sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) : si l'on borne l'ordre des solutions approchées  $x_j(t, z)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , alors la fonction de Artin d'un idéal binomial est majorée par une fonction affine, et en général la fonction de Artin d'un idéal binomial est majorée par une fonction doublement exponentielle (cf. théorème 4.2). Malheureusement on n'a aucune manière de savoir si cette dernière borne est raisonnable ou pas. En effet la famille d'idéaux  $(J_D)$  n'est pas quelconque, mais semble tout de même assez difficile à appréhender : ces idéaux ne sont pas réduits en général et il est vite impossible de calculer leur radical ou une décomposition primaire de ceux-ci du fait du nombre rapidement important de variables qui entrent en jeu.

## 2. Rappels sur certaines bornes effectives en algèbre commutative

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats classiques en algèbre commutative effective que nous allons utiliser librement dans la suite.

**Théorème 2.1.** (Voir [He,Te].) Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{k}[u]$ ,  $u := (u_1, \dots, u_n)$ ,  $I = (f_1, \dots, f_p)$  avec  $\deg(f_r) \leq d$  pour  $1 \leq r \leq p$ . Soit  $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$  une décomposition primaire minimale (i.e. telle que  $\sqrt{Q_1}, \dots, \sqrt{Q_s}$  soient tous distincts). On a alors  $\sqrt{I} = P_1 \cap \dots \cap P_s$  avec  $P_l := \sqrt{Q_l}$  pour  $1 \leq l \leq s$ . On a alors les résultats suivants :

- Soit  $e := \min\{n, p\}(n+2)(d+1)^{\min\{n,p\}+1} \leq (n+2)^2(d+1)^{n+1}$ . On a  $\sqrt{I}^e \subset I$ .
- On  $s \leq d^{\min\{n,p\}}$ .
- Il existe une fonction  $\lambda_1(n, d)$ , polynomiale en  $d$  et de degré exponentiel en  $n$ , tel que chaque  $P_l$  est engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $\lambda_1(n, d)$ .
- Il existe une fonction  $\lambda_2(n, d)$ , polynomiale en  $d$  et de degré exponentiel en  $n$ , tel que chaque  $Q_l$  est engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $\lambda_1(n, d)$ .

**Proposition 2.2.** (Voir [S].) Soient  $I_1, \dots, I_q, q$  idéaux de  $\mathbb{k}[u_1, \dots, u_n]$  engendrés par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ . Alors  $I := I_1 \cap \dots \cap I_q$  est engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n((q-1)d)^{2^{n-1}} + d$ .

**Démonstration.** Écrivons  $I_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,s_i})$  où  $\deg(f_{i,j}) \leq d$  pour tous entiers  $i$  et  $j$ . Tout système de générateurs de  $I$ , noté  $g^{(1)}, \dots, g^{(s)}$  correspond à un système générateur, noté  $\{u_{i,j}^{(1)}, \dots, u_{i,j}^{(s)}\}$  pour  $1 \leq i \leq q$  et  $1 \leq j \leq s_i$ , du  $\mathbb{k}[u_1, \dots, u_n]$ -module défini par les équations

$$(f_{1,1}U_{1,1} + \dots + f_{1,s_1}U_{1,s_1}) - (f_{i,1}U_{i,1} + \dots + f_{i,s_i}U_{i,s_i}) = 0, \quad 2 \leq i \leq q$$

et relié par  $g^{(l)} = f_{i,1}u_{i,1}^{(l)} + \dots + f_{i,s_i}u_{i,s_i}^{(l)}$  pour  $1 \leq l \leq s$ . D'après la proposition 55 de [S], il existe un tel système  $\{u_{i,j}^{(1)}, \dots, u_{i,j}^{(s)}\}$  tel que  $\deg(u_{i,j}^{(l)}) \leq n((q-1)d)^{2^{n-1}}$  pour tous  $i, j$  et  $l$ . On en déduit le résultat.  $\square$

**3. Borne effective de la fonction de Artin–Greenberg dans le cas polynomial**

Dans cette partie nous allons redémontrer le théorème de Greenberg en suivant essentiellement sa preuve mais en faisant attention à la complexité de chaque étape. Dans toute cette partie  $\mathbb{k}$  désigne un corps de caractéristique nulle.

**Théorème 3.1.** (Voir [Gr,Ar].) Pour tous  $n, d, i \in \mathbb{N}$ , il existe  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tel que pour tout idéal  $I$  de  $\mathbb{k}[t, x]$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , tel que  $\deg(f_r) \leq d$  pour tout  $r$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f(t, x(t)) \in (t)^{\beta(i)}$  pour tout  $f \in I$ , il existe  $\bar{x}(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f(t, \bar{x}(t)) = 0$  pour tout  $f \in I$  et  $x(t) - \bar{x}(t) \in (t)^i$ .

De plus  $\beta$  peut être choisie affine, de la forme  $i \mapsto a(n, d)i + b(n, d)$  où  $a(n, d)$  et  $b(n, d)$  sont bornés par une fonction polynomiale en  $d$  de degré exponentiel en  $n$ .

**Définition 3.2.** Nous noterons dans la suite  $\beta(n, d, i)$  le plus petit entier  $\beta(i)$  qui vérifie les conclusions du théorème 3.1. Nous allons noter  $\beta_h(n, d, i)$  le plus petit entier qui vérifie les conclusions du théorème 3.1 pour tout idéal  $I$  quelconque de hauteur  $h$  engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ , et  $\beta_h^p(n, d, i)$  le plus petit entier qui vérifie les conclusions du théorème 3.1 pour tout idéal  $I$  premier de hauteur  $h$  engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ .

**Théorème 3.3.** Pour tous  $n, d, d', i, j \in \mathbb{N}$ , nous avons les relations suivantes :

$$\beta_{n+1}^p(n, d, i) \leq 2, \tag{1}$$

$$\beta_k(n, d, i) \leq (n + 3)^2(d + 1)^{2n+3} \max_{h>k} \{ \beta_h^p(n, \lambda_1(n + 1, d), i) \}, \tag{2}$$

$$\beta_k^p(n, d, i) \leq (e' + 1)\beta_{k+1}(n, k(d - 1), i) + 1, \tag{3}$$

$$e' := (n + 3)^2(1 + \lambda_2(n + 1, d) + (n + 1)((d^{n+1} - 2)\lambda_2(n + 1, d))^{n+2}).$$

Ce théorème implique directement le théorème 3.1. Nous allons donner une preuve du théorème 3.1 en montrant au fur et à mesure les inégalités (1), (2) et (3) du théorème 3.3.

- Si  $\text{ht}(I) = n + 1$  et  $I$  est premier, alors  $I$  est un idéal maximal. Supposons qu'il existe  $x(t) \in \mathbb{k}[[t]]^x$  tel que  $f(t, x(t)) \in (t)^2$  pour tout  $f \in I$ , et notons  $\varphi : \mathbb{k}[t, x] \rightarrow \mathbb{k}$  le  $\mathbb{k}$ -homomorphisme défini par  $\varphi(h) = h(0, x(0))$ . Alors  $I \subset \text{Ker}(\varphi)$ , mais  $\text{Ker}(\varphi)$  étant un idéal propre de  $\mathbb{k}[t, x]$  et  $I$  maximal, nous avons  $I = \text{Ker}(\varphi)$ . Donc en particulier  $t \in I$ , mais clairement  $t \notin \text{Ker}(\varphi')$  ce qui contredit l'existence de  $x(t)$ . Donc on peut prendre ici  $\beta = 2$ , le théorème 3.1 est alors valable car l'hypothèse n'est jamais vérifiée, et on a l'égalité (1).

- Supposons que  $\text{ht}(I) = k$ , où  $I = (f_1, \dots, f_p)$ , et que le théorème 3.1 est vrai pour tout idéal de hauteur strictement plus grande que  $k$ .

Soit  $\sqrt{I} = P_1 \cap \dots \cap P_s$  la décomposition primaire du radical de  $I$ , où  $\text{ht}(P_l) = h_l$ . Notons  $e := (n + 1)(n + 3)(d + 1)^{n+2}$ . Alors l'entier  $\beta' := e \cdot \sum_{l=1}^s \beta_{h_l}^p(n, \lambda_1(n + 1, d), i)$  satisfait les conditions du théorème 3.1 pour  $I$ . En effet soit  $x(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f(t, x(t)) \in (t)^{\beta'}$  pour tout  $f \in I$ . Donc il existe un entier  $l$  tel que  $g(t, x(t)) \in (t)^{\beta_{h_l}^p(n, \lambda(n+1, d), i)}$  pour tout  $g \in P_l$ . En effet, dans le cas contraire, pour tout  $l$ , il existerait  $g_l \in P_l$  tel que  $g_l(t, x(t)) \notin (t)^{\beta_{h_l}^p(n, \lambda(n+1, d), i)}$ . Notons alors  $g := (g_1 \dots g_s)^e$ . On a  $g \in I$  par définition de  $e$  et des  $P_l$ , mais  $g(t, x(t)) \notin (t)^{\beta'}$  ce qui contredit ce qui précède, et donc il existe un entier  $l$  tel que  $g(t, x(t)) \in (t)^{\beta_{h_l}^p(n, \lambda(n+1, d), i)}$  pour tout  $g \in P_l$ . Donc il existe  $\bar{x}(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $g(t, \bar{x}(t)) = 0$  pour tout  $g \in P_l$  et tel que  $\bar{x}(t) - x(t) \in (t)^l$ . Comme  $I \subset P_l$ , on obtient la conclusion voulue. On a montré ainsi l'inégalité (2).

- Nous supposons donc maintenant que  $I = (f_1, \dots, f_p)$  est premier de hauteur  $k$ . Alors  $\mathbb{k}[t, x]_I$  est régulier, et on peut supposer que  $f_1, \dots, f_k$  engendrent  $I\mathbb{k}[t, x]_I$ . Il existe donc un mineur d'ordre  $k$

de la matrice jacobienne  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(t, x)}$ , noté  $\delta$ , tel que  $\delta \notin I$  (cf. par exemple proposition 1 [Wa]). Notons  $J := (f_1, \dots, f_p, \delta)$ . On a alors  $\text{ht}(J) = k + 1$ . Remarquons que  $\text{deg}(\delta) \leq k(d - 1)$ .

Notons alors  $I' := (f_1, \dots, f_k)$  et soit  $I' = Q_1 \cap \dots \cap Q_q$  une décomposition primaire réduite de  $I'$ . Nous allons renommer les  $Q_l$  de telle sorte que  $Q_l \subset I$  pour  $1 \leq l \leq s$  et  $Q_l \not\subset I$  pour  $l > s$ . Or  $I\mathbb{k}[t, x]_l = I'\mathbb{k}[t, x]_l$  et  $Q_1\mathbb{k}[t, x]_l \cap \dots \cap Q_s\mathbb{k}[t, x]_l$  est une décomposition primaire réduite de  $I\mathbb{k}[t, x]_l$  (cf. Theorem 17, chapter 4 [Z-S]), donc  $s = 1$  et  $I = Q_1$ . Soit  $J' := Q_2 \cap \dots \cap Q_q$  si  $q \neq 1$  et  $J' = A$  si  $q = 1$ . On pose alors  $J = J'$  si  $I \not\subset J'$  et  $J := A$  si  $I \subset J'$ . On a donc  $I' = I \cap J$  et  $J \not\subset I$ .

Chaque idéal  $Q_l$  est engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $\lambda_2(n + 1, d)$ . Donc  $J'$  est engendré par des polynômes de degré inférieur ou égal à  $(n + 1)((q - 2)\lambda_2(n + 1, d))^{2^n} + \lambda_2(n + 1, d)$ . On a  $\delta \in \sqrt{I + J}$  (cf. lemma 7 [Wa]). Notons

$$e' := (n + 3)^2(1 + \lambda_2(n + 1, d) + (n + 1)((d^{n+1} - 2)\lambda_2(n + 1, d))^{2^n})^{n+2}.$$

Alors  $\delta^{e'} \in I + J$  car  $q \leq d^{n+1}$ . Soit

$$\alpha := (e + 1)\beta_{k+1}(n, k(d - 1), i) + 1.$$

Soit  $x(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f(t, x(t)) \in (t)^\alpha$  pour tout  $f \in I$ .

**Cas 1 :** Si  $\delta(t, x(t)) \in (t)^{\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$ , comme  $\alpha \geq \beta_{k+1}(n, k(d - 1), i)$ , par définition de  $\beta_{k+1}$ , il existe  $\bar{x}(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f(t, \bar{x}(t)) = \delta(t, \bar{x}(t)) = 0$  pour tout  $f \in I$  et  $\bar{x}(t) - x(t) \in (t)^i$ , et on a la conclusion voulue.

**Cas 2 :** Supposons maintenant que  $\delta(t, x(t)) \notin (t)^{\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$ . En dérivant la relation

$$f_r(t, x(t)) \in (t)^{(e'+1)\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)+1}$$

par rapport à  $t$ , on obtient

$$\frac{\partial f_r}{\partial t}(t, x(t)) = - \sum_{\lambda} \frac{\partial f_r}{\partial x_{\lambda}}(t, x(t)) \frac{\partial x_{\lambda}(t)}{\partial t} \text{ mod. } (t)^{(e'+1)\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}.$$

On en déduit l'existence d'un mineur d'ordre  $k$  de la matrice jacobienne de  $f$ , encore noté  $\delta$ , qui ne fait intervenir que des dérivées partielles par rapport aux  $x_{\lambda}$  (i.e.  $\delta = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$ ) quitte à renommer les variables  $x_{\lambda}$ , tel que  $\delta(t, x(t)) \notin (t)^{\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$ . En particulier  $\delta \notin (f_1, \dots, f_p)$ .

Par définition de  $\alpha$  et en utilisant le théorème des fonctions implicites de Tougeron (cf. théorème 3.2 [To] ou Lemma 5.11 [Ar]), il existe  $\bar{x}(t) \in \mathbb{k}[[t]]^n$  tel que  $f_r(t, \bar{x}(t)) = 0$ , pour  $1 \leq r \leq k$ , et  $\bar{x}(t) - x(t) \in (t)^{e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$ . On a alors  $\delta(t, x(t)) - \delta(t, \bar{x}(t)) \in (t)^{e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$  et  $e' \geq 1$ . Donc

$$\delta(t, \bar{x}(t)) \notin (t)^{\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}.$$

Or  $\delta^{e'} \in I + J$ , donc  $\delta^{e'} = \sum_{r=1}^p h_r f_r + h_0$  où  $h_0 \in J$ . Comme  $f_r(t, x(t)) - f_r(t, \bar{x}(t)) \in (t)^{e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$  et  $f_r(t, x(t)) \in (t)^\alpha$ , pour  $1 \leq r \leq p$ , on voit que

$$f_r(t, \bar{x}(t)) \in (t)^{e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)} \quad \text{pour } 1 \leq r \leq p$$

(car  $\alpha \geq e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)$ ). Donc nécessairement  $h_0(t, \bar{x}(t)) \notin (t)^{e'\beta_{k+1}(n, k(d-1), i)}$ , d'où  $h_0(t, \bar{x}(t)) \neq 0$ . Or  $h_0 f_r \in I \cap J = I' = (f_1, \dots, f_k)$  pour  $1 \leq r \leq p$ . On en déduit  $f_r(t, \bar{x}(t)) = 0$  pour  $1 \leq r \leq p$ . Comme  $\beta_{k+1}(n, k(d-1), i) \geq i$ , on a  $\bar{x}(t) - x(t) \in (t)^i$  ce qui conclut la démonstration.

**4. Fonction de Artin d'un idéal binomial**

Pour étudier la fonction de Artin d'un idéal binomial, nous allons mettre les  $x_i(t, z)$  sous forme de Weierstrass et nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** Soit  $\mathbb{k}$  un corps quelconque. Soient  $P = u(x)(a_0(\tilde{x}) + a_1(\tilde{x})x_n + \dots + a_{d-1}(\tilde{x})x_n^{d-1} + x_n^d)$  et  $Q = v(x)(b_0(\tilde{x}) + b_1(\tilde{x})x_n + \dots + b_{e-1}(\tilde{x})x_n^{e-1} + x_n^e) \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$  deux polynômes de Weierstrass en  $x_n$  (avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})$ ) tels que  $P - Q \in (x)^i$  avec  $i > d$ . Alors  $d = e$ ,  $u(x) - v(x) \in (x)^{i-d}$  et  $a_j(\tilde{x}) - b_j(\tilde{x}) \in (\tilde{x})^{i-d+\text{ord}(P)-j}$  pour  $0 \leq j \leq d - 1$ .

**Démonstration.** Tout d'abord comme  $i > d$ , on voit que  $e = d$  car  $(P - Q)(0, \dots, 0, x_n) \in (x_n)^i$  et le terme constant de  $u$  est égal au terme constant de  $v$ . De même  $\text{ord}(P) = \text{ord}(Q)$ . D'autre part, si  $P - Q \in (x)^i$  alors  $u^{-1}P - u^{-1}Q \in (x)^i$ . On peut donc supposer que  $u = 1$ .

La division de Weierstrass de  $x_n^d$  par  $P$  par rapport à la variable  $x_n$  est la suivante :

$$x_n^d = 1 \cdot P + R(x) = P + (-a_{d-1}(\tilde{x})x_n^{d-1} - \dots - a_0(\tilde{x})).$$

Considérons la division de Weierstrass de  $x_n^d$  par  $Q$  par rapport à la variable  $x_n$  :

$$x_n^d = C(x)Q + R'(x) = C(x)Q + D_{d-1}(\tilde{x})x_n^{d-1} + \dots + D_0(\tilde{x}).$$

Par unicité dans le théorème de division de Weierstrass, on a  $C(x) = v^{-1}(x)$  et  $D_j(\tilde{x}) = -b_j(\tilde{x})$  pour  $0 \leq j \leq d - 1$ . Cette division peut se faire de manière algorithmique. En effet on construit les suites  $(C_k(x))_k$  et  $(R_k(x))_k$  par récurrence de la manière qui suit : on pose  $x_n^d = C_0(x)Q + R_0$  avec  $C_0(x) = 1$ . Puis par induction, pour  $k \geq 0$ , si  $x_n^d = C_k(x)Q + R_k(x)$ , on considère le plus petit monôme de  $R_k(x)$  divisible par  $x_n^d$ , noté  $M_k$ , et on pose  $R_{k+1}(x) := R_k(x) - \frac{M_k}{x_n^d}Q$ . Alors la suite  $(\text{ord}(R_{k+1}(x) - R_k(x)))_k$  est strictement croissante et  $(R_k(x))_k$  converge vers  $R'(x)$  pour la topologie  $(x)$ -adique. De même la suite  $(\text{deg}(M_k))_k$  est strictement croissante et  $C(x) = \sum_k \frac{M_k}{x_n^d}$ . En particulier, comme  $R_0(x) - R(x) = Q - P \in (x)^i$ ,  $M_0$  est un monôme de degré supérieur ou égal à  $i$ , et  $C(x) - 1 \in (x)^{i-d}$ . On en déduit que  $R(x) - R'(x) \in (x)^i$ , donc  $a_j(\tilde{x}) - b_j(\tilde{x}) \in (x)^{i-d+\text{ord}(P)-j}$ , pour  $0 \leq j \leq d - 1$ .  $\square$

Nous allons maintenant étudier la fonction de Artin d'un idéal binomial. Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos et soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{k}[[t, z]][X_1, \dots, X_n]$  engendré par  $f_1, \dots, f_p$  avec

$$f_k := a_k X^{\alpha_k} + b_k X^{\beta_k}$$

où  $a_k, b_k \in \mathbb{k}$  et  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}^n$  pour  $1 \leq k \leq p$ . Considérons  $x_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tels que  $f_k(x_j(t, z)) \in (t, z)^i$ ,  $1 \leq k \leq p$ . On peut supposer, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées en  $t$  et  $z$ , que les  $x_j$  sont régulières en la variable  $z$ . On a donc

$$x_j(t, z) = u_j(t, z)(x_{j,0}(t) + x_{j,1}(t)z + \dots + x_{j,d_j-1}(t)z^{d_j-1} + z^{d_j})$$

où  $d_j$  est l'ordre de  $x_j(t, z)$  avec  $x_{j,l} \in (t)\mathbb{k}[[t]]$ , pour  $1 \leq j \leq n$  et  $0 \leq l < d_j$ .

Supposons que  $i > \sum_j \alpha_{k,j} d_j$  pour tout  $k$ . En utilisant le lemme 4.1, on a alors

$$D_k := \sum_j \alpha_{k,j} d_j = \sum_j \beta_{k,j} d_j, \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$f_k(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^{i-D_k}, \quad 1 \leq k \leq p$$

et

$$P_d(X_{j,l}(t)) \in (t)^{i-d}$$

où  $P_d(X_{j,l}) \in \mathbb{k}[X_{j,l}, 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq d_j - 1]$  est le coefficient de  $z^d$  dans

$$\prod_j (X_{j,0} + \dots + X_{j,d_j-1} z^{d_j-1} + z^{d_j})^{\alpha_{k,j}} + \prod_j (X_{j,0} + \dots + X_{j,d_j-1} z^{d_j-1} + z^{d_j})^{\beta_{k,j}}.$$

Notons  $D := \max_k D_k$ . On obtient alors deux systèmes d'équations indépendants l'un de l'autre :

$$f_k(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^{i-D}, \quad 1 \leq k \leq p, \tag{1}$$

$$P_d(x_{j,l}(t)) \in (t)^{i-d}, \quad 0 \leq d \leq D - 1. \tag{2}$$

On va chercher la fonction d'approximation de Artin de ces deux systèmes, le premier ayant une fonction de Artin bornée par une fonction affine puisque  $u_i(0, 0) \neq 0$  pour tout  $i$  et que le lieu singulier d'une variété torique est inclus dans l'union des axes de coordonnées, et le second étant un système à coefficients dans  $\mathbb{k}[[t]]$ .

**Théorème 4.2.** *Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors on a les propriétés suivantes :*

- i) *Pour tout  $d' \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\underline{d} := (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $a_{\underline{d},d'}, b_{\underline{d},d'}$  vérifiant la propriété suivante : Soit  $I$  un idéal binomial de  $\mathbb{k}[U_1, \dots, U_n]$  engendré par des binômes  $f_1, \dots, f_p$  de degré inférieur à  $d'$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$  et soient  $x_1(t, z), \dots, x_n(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  tels que  $\text{ord}(x_j(t, z)) = d_j$  et  $f_k(x_j(t, z)) \in (t, z)^{a_{\underline{d},d'}i + b_{\underline{d},d'}}$ , pour tous  $k$ . Alors il existe  $\tilde{x}_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$ , tels que  $f_k(\tilde{x}_j(t, z)) = 0$  pour tout  $k$  et tels que  $\tilde{x}_j(t, z) - x_j(t, z) \in (t, z)^i$  pour tout  $j$ .*
- ii) *Pour tout  $d' \in \mathbb{N}$  il existe une fonction doublement exponentielle en  $i$ , notée  $\beta_{d'}$ , telle que pour tout idéal binomial  $I$  de  $\mathbb{k}[U_1, \dots, U_n]$  engendré par des binômes de degré inférieur à  $d'$ , la fonction de Artin de  $I\mathbb{k}[[t, z]][U]$  est bornée par  $\beta_{d'}$ .*

**Démonstration.** Nous allons d'abord montrer i) dont on déduira ensuite ii).

Supposons, comme précédemment, que  $I$  est engendré par les  $f_k := a_k X^{\alpha_k} + b_k X^{\beta_k}$ , où  $a_k, b_k \in \mathbb{k}$  et  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}^n$  pour  $1 \leq k \leq p$ .

L'idéal  $I$  étant un idéal binomial,  $\sqrt{I}$  est encore un idéal binomial et, si  $\sqrt{I} = I_1 \cap \dots \cap I_q$  est une décomposition primaire minimale de  $\sqrt{I}$ , alors les  $I_k$  sont des idéaux binomiaux [E-S]. Soit  $e \in \mathbb{N}$  tel que  $\sqrt{I}^e \subset I$ . Supposons que  $f_l(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^{qe_l}$ ,  $1 \leq l \leq p$  où  $u_{j,0} := u_j(0, 0) \neq 0$  pour tout  $j$ . Alors  $g(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^{qi}$  pour tout  $g \in \sqrt{I}$ , et donc il existe un entier  $k$  tel que  $g(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^i$  pour tout  $g \in I_k$ . Comme  $I_k$  est un idéal premier binomial de  $\mathbb{k}[U]$  alors  $(\mathbb{k}[U]/I_k)_{(U_1-u_{1,0}, \dots, U_n-u_{n,0})}$  est régulier car  $u_{1,0} \dots u_{n,0} \neq 0$  (le lieu singulier d'une variété torique est toujours inclus dans l'union des hyperplans de coordonnées). Donc  $\mathbb{k} \rightarrow (\mathbb{k}[U]/I_k)_{(U_1-u_{1,0}, \dots, U_n-u_{n,0})}$  est lisse, donc  $\mathbb{k}[[t, z]] \rightarrow (\mathbb{k}[[t, z]][U]/I_k)_{(t,z,U_1-u_{1,0}, \dots, U_n-u_{n,0})}$  est lisse ; ceci implique qu'il existe  $\bar{u}_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tels que  $g(\bar{u}_1(t, z), \dots, \bar{u}_n(t, z)) = 0$  pour tout  $g \in I_k$  et  $\bar{u}_j(t, z) - u_j(t, z) \in (t, z)^i$ .

Soit  $i \rightarrow ai + b$  la fonction de Artin de l'idéal de  $\mathbb{k}[[t]][X_{j,l}]$  engendré par les  $P_d(X_{j,l})$ ,  $0 \leq d \leq D - 1$ . Posons  $a_{\underline{d}} := \max\{qe, a\}$  et  $b_{\underline{d}} := b + D$ . D'après les théorèmes 2.1 et 3.1, on voit que  $a_{\underline{d}}$  et  $b_{\underline{d}}$  peuvent être bornées par une fonction dépendant uniquement de  $d'$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$ , on a alors  $a_{\underline{d}}i + b_{\underline{d}} > D$ .

D'après ce qui précède, si  $f_k(x_j(t, z)) \in (t, z)^{a_d i + b_d} \forall k$ , alors

$$f_k(u_1(t, z), \dots, u_n(t, z)) \in (t, z)^{q e_i}, \quad 1 \leq k \leq p$$

et

$$P_d(x_{j,l}(t)) \in (t)^{a_i + b_d}, \quad 0 \leq d \leq D.$$

Donc il existe  $\bar{u}_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tels que  $g(\bar{u}_1(t, z), \dots, \bar{u}_n(t, z)) = 0$  pour tout  $g \in I$  et  $\bar{u}_j(t, z) - u_j(t, z) \in (t, z)^i$ , et il existe  $\bar{x}_{j,l}(t) \in \mathbb{k}[[t]]$  tels que  $P_d(x_{j,l}(t)) = 0$ ,  $0 \leq d \leq D$ , et  $\bar{x}_{j,l}(t) - x_{j,l}(t) \in (t)^i$ . On pose alors  $\bar{x}_j = \bar{u}_j(t, z)(\bar{x}_j, 0 + \bar{x}_{j,1}t + \dots + \bar{x}_{j,d_j-1}t^{d_j-1} + t^{d_j})$ . On a bien  $f_k(\bar{x}_j(t, z)) = 0$ ,  $1 \leq k \leq p$ , et  $\bar{x}_j(t, z) - x_j(t, z) \in (t, z)^i$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Ceci prouve i).

On peut remarquer que  $a$  et  $b$  sont bornées par une fonction polynomiale en  $\max_k \{|\alpha_k|, |\beta_k|\}$  de degré exponentiel en  $\sum_j d_j$ , d'après le théorème 3.1. Donc il existe une constante  $C$  telle que  $a_d, b_d \leq C^{C^{\sum_j d_j}}$ . Notons  $a_d^\mathcal{E}$  et  $b_d^\mathcal{E}$  les plus petites constantes satisfaisant i) pour l'idéal engendré par les  $f_k$ ,  $k \in \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, p\}$ . Là encore il existe une constante  $C_\mathcal{E}$  telle que  $C_\mathcal{E}^{C^{\sum_{j \in \mathcal{E}} d_j}}$  majore  $a_d^\mathcal{E}$  et  $b_d^\mathcal{E}$ . Donc en posant  $C := \max_{\mathcal{E}} C_\mathcal{E}$  on a  $a_d^\mathcal{E}, b_d^\mathcal{E} \leq C^{C^{\sum_j d_j}}$  pour tout sous-ensemble  $\mathcal{E}$  de  $\{1, \dots, p\}$ .

Soit  $x_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tels que  $f_k(x_j(t, z)) \in (t, z)^{C^{mi}(i+1)}$ ,  $1 \leq k \leq p$ . Si  $d_j := \text{ord}(x_j(t, z)) \geq i$ , alors on pose  $\bar{x}_j(t, z) = 0$ , sinon on pose  $\bar{x}_j(t, z) = x_j(t, z)$ . Alors  $f_k(\bar{x}_j(t, z)) = 0$  ou  $f_k(\bar{x}_j(t, z)) = f_k(x_j(t, z))$  selon l'entier  $k$ . On peut donc remplacer les  $x_j(t, z)$  par les  $\bar{x}_j(t, z)$  et supposer que  $\text{ord}(x_j(t, z)) < i$  pour tout  $j$ . On suppose que  $C^{mi}(i+1) > D := \max_k \{\sum_j \alpha_{k,j} d_j, \sum_j \beta_{k,j} d_j\}$  en choisissant  $i$  assez grand. Comme  $d_j < i$ ,  $1 \leq j \leq n$ , on a  $f_k(x_j(t, z)) \in (t, z)^{a_d i + b_d}$ ,  $1 \leq k \leq p$ . On applique alors i), et on a l'existence de  $\bar{x}_j(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  tels que  $f_k(\bar{x}_j(t, z)) = 0$ ,  $1 \leq k \leq p$ , et  $\bar{x}_j(t, z) - x_j(t, z) \in (t, z)^i$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Ceci prouve ii). □

**Exemple 4.3.** Dans [Ro2], il est montré que la fonction de Artin du polynôme  $X^2 - ZY^2$  n'est pas bornée par une fonction affine. On voit que la non-linéarité de la fonction de Artin dans ce cas provient du fait que les fonctions de Artin–Greenberg des systèmes  $P_d(X_{j,l}) = 0$ ,  $0 \leq d \leq D$ , sont bornées par des fonctions affines dont les coefficients croissent vite en fonction de l'ordre des  $x_{j,l}(t)$ .

**Exemple 4.4.** On peut remarquer que la famille de solutions approchées de l'équation  $X^2 - Y^3$  dans [Ro1] sont des solutions dont l'ordre est borné.

**Exemple 4.5.** Soit  $f := X^2 - Y^3$ . Si  $x(t, z), y(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  vérifient  $\text{ord}(x(t, z)) = 3$  et  $\text{ord}(y(t, z)) = 2$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} x(t, z) &= u(t, z)(x_0(t) + x_1(t)z + x_2(t)z^2 + z^3), \\ y(t, z) &= v(t, z)(y_0(t) + y_1(t)z + z^2). \end{aligned}$$

Si  $x^2(t, z) - y^3(t, z) \in (t, z)^i$  avec  $i > 6$ , alors

$$u^2(t, z) - v^3(t, z) \in (t, z)^{i-6}$$

et les  $x_j(t)$  et  $y_j(t)$  sont solutions du système suivant modulo  $(t)^{i-6}$  :

$$\begin{cases} 2x_2 - 3y_1 = 0, \\ x_2^2 + 2x_1 - 3y_1^2 - 3y_0 = 0, \\ 2x_0 + 2x_1x_2 - y_1^3 - 6y_0y_1 = 0, \\ x_1^2 + 2x_0x_2 - 3y_0y_1^2 - 3y_0^2 = 0, \\ 2x_0x_1 - 3y_0^2y_1 = 0, \\ x_0^2 - y_0^3 = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier à l'aide de Macaulay2 [M2] que l'idéal de  $\mathbb{k}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1]$  défini par ces polynômes n'est pas réduit. Ceci semble assez général. On peut remarquer que les variétés algébriques définies par  $P_d(X_{j,i}) = 0$ ,  $0 \leq d \leq D$ , sont très proches des espaces de jets de la variété définie par  $I$  qui ne sont pas réduits en général.

**Exemple 4.6.** On considère ici le problème suivant : soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux. Si  $x(t, z)$  est une série formelle telle que  $x^p(t, z)$  est proche d'une puissance  $q$ -ième, est-ce que  $x(t, z)$  est proche d'une puissance  $q$ -ième ? Y a-t-il une fonction qui mesure le rapport entre la distance de  $x^p(t, z)$  à une puissance  $q$ -ième et celle de  $x(t, z)$  à une puissance  $q$ -ième ? On a la réponse suivante :

**Proposition 4.7.** Soient  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Il existe une fonction  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{k}[[t, z]]$ , si il existe  $u(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  telle que  $x^p(t, z) - u^q(t, z) \in (t, z)^{\beta(i)}$ , alors il existe  $v(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  telle que  $x(t, z) - v^q(t, z) \in (t, z)^i$ .

On peut choisir pour  $\beta$  une fonction doublement exponentielle en  $i$ .

Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , si on se restreint à tous les  $x(t, z)$  dont l'ordre vaut  $d$ , alors on peut choisir pour  $\beta$  une fonction affine.

**Démonstration.** Soit  $\beta$  la fonction de Artin de  $X^p - Y^q$ . Supposons que  $x^p(t, z) - u^q(t, z) \in (t, z)^{\beta(i)}$ . Alors il existe  $x'(t, z), u'(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  tels que  $x'^p(t, z) - u'^q(t, z) = 0$  et  $x(t, z) - x'(t, z), u(t, z) - u'(t, z) \in (t, z)^i$ . Comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et que  $\mathbb{k}[[t, z]]$  est factoriel il existe  $v(t, z) \in \mathbb{k}[[t, z]]$  tel que  $x'(t, z) = v^p(t, z)$  et  $u'(t, z) = v^q(t, z)$ . On a alors le résultat avec le théorème 4.2.  $\square$

## Références

- [Ar] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 36 (1969) 23–58.
- [B-D-L-v.D] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in local rings I, Invent. Math. 51 (1979) 189–203.
- [E-S] D. Eisenbud, B. Sturmfels, Binomial ideals, Duke Math. J. 84 (1) (1996) 1–45.
- [Gr] M.J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 31 (1966) 59–64.
- [He] G. Hermann, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Ann. 95 (1) (1926) 736–788.
- [La] D. Lascar, Caractère effectif des théorèmes d'approximation d'Artin, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 287 (14) (1978) A907–A910.
- [M2] D.R. Grayson, M.E. Stillman, Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry, available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [Ro1] G. Rond, À propos de la fonction de Artin en dimension  $N \geq 2$ , C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (8) (2005) 577–580.
- [Ro2] G. Rond, Sur la linéarité de la fonction de Artin, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 38 (6) (2005) 979–988.
- [Ro3] G. Rond, Lemme d'Artin-Rees, théorème d'Izumi et fonction de Artin, J. Algebra 299 (1) (2006) 245–275.
- [S] A. Seidenberg, Constructions in Algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (October 1974) 273–313.
- [Te] B. Teissier, Résultats récents d'algèbre commutative effective, in : Séminaire Bourbaki, vol. 1989/1990, Astérisque No. 189–190, Exp. No. 718, 1990, pp. 107–131.
- [To] J.-C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Ergeb. Math. Grenzgeb., Band 71, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.
- [Wa] J.J. Wavrik, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, Math. Ann. 216 (1975) 127–142.
- [Z-S] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra I, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1958.