Théorie des probabilités

La théorie discrète des probabilités s'occupe d'évènements dans le cadre d'un univers dénombrable.

Exemples: Lancer de dés, expériences avec des paquets de cartes, et marche aléatoire.

Définition 1 *La probabilité d'un évènement est égale au le nombre de cas favorables pour l'évènement, divisé par le nombre total d'issues possibles à l'expérience aléatoire.*

Par exemple, si l'évènement est obtenir un nombre pair en lançant le dé, sa probabilité est donnée par $1/2$, puisque trois faces sur six ont un nombre pair.

On considère

– un ensemble appelé univers, qui correspond à l'ensemble des résultats possibles à l'expérience dans la définition classique. Il est noté Ω;

– une fonction P définie sur Ω, qui va associer à chaque élément de Ω sa probabilité, satisfaisant donc les propriétés suivantes :

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, \quad P(\omega) \in [0\ 1] \quad , \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Définition 2 *On définit ensuite un évènement comme un ensemble de résultats, c'est à dire un sous-ensemble de Ω. La probabilité d'un évènement E est alors définie de manière naturelle par :*

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$

Ainsi, la probabilité de l'univers est 1, et la probabilité de l'évènement nul (l'ensemble vide) est 0.

Pour revenir à l'exemple du lancer de dé, on peut modéliser cette expérience en se donnant un univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ correspondant aux valeurs possibles du dé, et une fonction P qui à chaque associe qui à chaque i associe $P(i) = 1/6$.

Loi uniforme discrète

En théorie des probabilités, la loi discrète uniforme est une loi de probabilité discrète qui peut être caractérisée en disant que chaque valeur d'un ensemble fini de valeurs possibles a la même probabilité de se réaliser (on parle d'équiprobabilité).

Une variable aléatoire qui peut prendre n valeurs possibles $k_1, k_2, \ldots, k_n$, suit une loi uniforme lorsque la probabilité de n'importe quelle valeur k_i est égale à $1/n$.

Un exemple simple de loi discrète uniforme est le lancer d'un dé honnête. Les valeurs possibles de k sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, et à chaque fois que le dé est lancé, la probabilité d'un score donné est égale à 1/6.

Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle permet de tenir compte dans une prévision d'une information complémentaire. Par exemple, si je tire au hasard une carte d'un jeu, j'estime naturellement à une chance sur quatre la probabilité d'obtenir un cœur ; mais si j'aperçois un reflet rouge sur la table, je corrige mon estimation à une chance sur deux. Cette seconde estimation correspond à la probabilité d'obtenir un cœur sachant que la carte est rouge. Elle est conditionnée par la couleur de la carte ; donc, conditionnelle.

Définition 3 *En théorie des probabilités, la probabilité conditionnelle d'un évènement A, sachant qu'un autre évènement B de probabilité non nulle s'est réalisé (ou probabilité de A, sachant B) est le nombre noté $P(A|B)$ défini par :*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Le réel $P(A|B)$ se lit “ probabilité de A, sachant B”. Nous pourrions vérifier que l’application $P_B$définie par

$$A \longmapsto P(A|B)$$

est une probabilité.

On a le théorème de Bayes

Théorème 1 *Si A et B sont deux évènements, alors*

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Les probabilités $P(A)$ portent le nom de probabilités *a priori*. Les probabilités $P(A|B)$ portent le nom de probabilités *a posteriorii*.

Indépendance

Définition 4 *Deux évènements A et B sont indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dans ce cas, on a

$$P(A|B) = P(A)$$

c'est-à-dire la connaissance de la réalisation de B n'apporte aucune information sur la réalisation de A.

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, telle qu'il soit possible de déterminer la probabilité pour qu'elle prenne une valeur donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné.

Exemples

– le résultat d'un lancer au jeu de pile ou face, qui vaut pile ou face

– le résultat d'un jet de dés, pour lequel les valeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 (si le dé est classiquement cubique).

De telles variables aléatoires sont qualifiées de discrètes car elles prennent des valeurs bien séparées.

L'étude de la répartition des valeurs prises par une variable aléatoire conduit à la notion de **loi de probabilité.**

La mesure image correspondante est appelée la loi de la variable aléatoire X.

Définition 5 *La loi d'une variable discrète est déterminée tout simplement par l'ensemble des probabilités de ses valeurs. Si l'on suppose qu'elle prend des valeurs entières (de signe quelconque), cela s'écrit :* $P_X(i) = P(X = i)$*.*

Ce type de fonction permet de modéliser un phénomène aléatoire, comme par exemple le résultat d'un jet de dés.

On a la formule

Proposition 1 *Si* f *est une fonction sur l'image* $X(\Omega)$ *de* X*, alors*

$$\sum_{\Omega} f(X(\omega))P(\omega) = \sum_{X(\Omega)} f(i)P_X(i)$$

Définition 6 *On appelle espérance de la variable aléatoire le nombre*

$$E(X) = \sum_{\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{X(\Omega)} iP_X(i)$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire se définit comme la moyenne des valeurs prises par cette variable, pondérées par leurs probabilités.