

**Exercice I.** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Trigonalisables ? Donnez, le cas échéant, une base de diagonalisation ou de trigonalisation.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.} & A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 18 \\ -8 & -3 & -15 \\ -5 & -1 & -11 \end{pmatrix} & \mathbf{2.} & B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 7 \end{pmatrix} & \mathbf{3.} & C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{4.} & D = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 11 \\ -24 & -7 & 21 \\ -26 & -6 & 21 \end{pmatrix} & \mathbf{5.} & E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 12 & -7 & 3 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{6.} & F = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 8 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Exercice II.** Trouver une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ , alors  $P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (où  $F$  est la matrice de l'exercice précédent).

**Exercice III.** Déterminer en fonction du paramètre réel  $a$ , si la matrice  $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable ou trigonalisable.

**Exercice IV.** Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$ , telle que  $M \neq Id$  et  $M^3 = Id$ .

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de  $M$  ?

2. Montrer que  $M$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

**Exercice V.** Quelles sont les matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  qui vérifient  $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$ .

**Exercice VI.** On considère l'ensemble  $\mathcal{A}$  des matrices inversibles  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifient :

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 3 tel que toute matrice  $M \in \mathcal{A}$  vérifie  $P(M) = 0$ .

2. Montrer que  $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$ .

3. Montrer que si  $M \in \mathcal{A}$ , alors  $\text{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$  (où  $\text{Sp}(M)$  désigne le spectre de  $M$ ).

4. Montrer que toute matrice  $M \in \mathcal{A}$  est diagonalisable.

**Exercice VII.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que  $\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$  et déterminer les dimensions respectives de  $\ker A$  et  $\ker A^2$ .
2. Déterminer un vecteur  $e_1$  tel que  $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \langle e_1 \rangle$ .
3. Montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1)$  est une famille libre.
4. Montrer que  $Ae_1 \in \ker A^2$ , et que  $\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Ae_1 \rangle$ .
5. Montrer que  $A^2e_1 \in \ker A$  et déterminer un vecteur  $e_2$  tel que

$$\ker A = \langle A^2e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle.$$

6. Montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
7. Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2)$ . Calculer  $P^{-1}AP$ .
8. Trouver, de même, des matrices de passage  $Q$  et  $R$  telles que  $A^{-1}BQ$  et  $R^{-1}CR$  sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients juste au dessus de la diagonale qui sont des 0 ou des 1.