

Exercice I. Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } y + 3az = 0\}$
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x e^y = 0\}$
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice II. On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (1, 3, 2), \quad \vec{c} = (1, 1, 0), \quad \vec{d} = (3, 8, 5)$$

Soient $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Comparer F et G .

Exercice III. Soient P_0, P_1, P_2 et P_3 , les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), \quad P_1 = \frac{1}{2}X(X-1), \quad P_2 = 2X(X-2), \quad P_3 = \frac{1}{3}(X-1)(X-3)$$

1. Montrer que P_0, P_1, P_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On pose $F = \text{vect}\{P_0, P_1\}$ et $G = \text{vect}\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$, $\dim(F \cap G)$.

Exercice IV. On considère dans \mathbb{C}^3 les vecteurs $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, i, 3)$ et $x_3 = (-2, 1, i)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice V. On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $x_1 = (1, 1, 1, 2)$, $x_2 = (0, 2, 0, 0)$, $x_3 = (1, -1, 2, 2)$ et $x_4 = (1, -1, 2, 3)$.

1. Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Calculer dans la base \mathcal{X} les composantes des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 .
3. Calculer dans la base \mathcal{X} les composantes d'un élément quelconque de \mathbb{R}^4 .

Exercice VI. On considère dans \mathbb{R}^3 les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de \mathbb{R}^3 et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 .

Exercice VII. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

1. Soit P_0, P_1, \dots, P_n des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E .
2. Soit P un polynôme de degré n . Montrer que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E . Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \dots, P^{(n)})$.
3. Montrer que la dérivation est un endomorphisme linéaire de E , donner sa matrice dans la base $1, X, \dots, X^n$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice VIII. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{C}^3 . On note f l'application linéaire de \mathbb{C}^3 dans lui-même telle que $f(e_1) = (2, 0, 1)$, $f(e_2) = (1, 2i, 1)$, $f(e_3) = (2, \pi, -2)$.

- Déterminer les images par f de $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 0)$ et $u_3 = (-3, 0, 2)$.
- Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de \mathbb{C}^3 .

Exercice IX. On rappelle que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur \mathbb{R} par les formules

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x \cos x & f_2(x) &= e^x \sin x \\ f_3(x) &= e^{-x} \cos x & f_4(x) &= e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

- Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.
- Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$.
- On note d l'application de E dans E qui à f associe f' . Vérifier que d est une application linéaire.
- Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E .

Exercice X. On désigne par \mathcal{I} le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par \mathcal{P} celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice XI. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = (-1 \ 2 \ -1)$.

- Calculer AB , AC , CA , BC , CD et ED .
- Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la matrice $B'_m = \begin{pmatrix} 4+m & 3-m \\ 2 & 1+m \end{pmatrix}$ vérifie-t-elle $B'_m B = B B'_m$?
- Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telles que $BM = MB$

Exercice XII. Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice XIII. 1. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = 0$. Dans quel cas la matrice A peut-elle être inversible ?

Exercice XIV. Soit t l'application linéaire de \mathbb{R}^5 dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $\ker T$ et $\text{Im} T$.