ALGEBRE LINEAIRE 2: DEVOIR MAISON NUMERO 2

Algèbre linéaire 2. Cours/TD: M.-H. Nicole
Devoir maison II.

Nom: ________________________
Numéro d'étudiant:_____________

Devoir optionnel à remettre au début des TD le 2 octobre.

Attention, un devoir maison a deux buts. Le premier est de développer votre compréhension mathématique, et le second de vous faire pratiquer la rédaction mathématique. Pour le premier but, vous pouvez travailler en équipe avec profit et plaisir; mais pour le second, il faut absolument que vous rédigiez le tout entièrement seul(e), et sans plus utiliser l'aide d'internet. Il faut viser à écrire un texte aussi clair que possible, et qui puisse être muni de suffisamment d'explications avec des phrases complètes pour être lu à voix haute.[1]

Problème $\mathbf{B_1}$:

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}_1$ d'équations $x + 2y - z = 0$. Donnez une base de ce plan, après avoir rappelé la définition de la base.
(2) Montrez que les vecteurs $u = (1, 0, 2)$ et $v = (-1, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires.
(3) Donnez une équation cartésienne[2] du plan vectoriel $\mathcal{P}_2$ engendré par u et v.
(4) Les plans vectoriels $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont-ils supplémentaires?
(5) Quelle est l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$?
(6) Trouvez un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Problème $\mathbf{B_2}$:

Soient U, W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V. Montrez que:

$$V = U \oplus W$$

ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $V = U + W$;
(2) Si $0 = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$, alors $u = 0$ et $w = 0$.

[1] L'écrivain Gustave Flaubert appliquait cette technique qu'il appelait le gueuloir pour ses propres textes. Pourquoi pas pour les maths?

[2] i.e., en $x, y, z, ...$

Problème $\mathbf{B_3}$:

Soit $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$ les matrices 2×2 à coefficients dans K. Montrez que si $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors l'espace vectoriel engendré par $\{M_1, M_2, M_3\}$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$.

Problème $\mathbf{B_4}$:

Soient S_1, S_2 deux sous-ensembles (attention, pas sous-espaces!) d'un espace vectoriel V.

a) Prouvez que

$$Vect(S_1 \cap S_2) \subseteq Vect(S_1) \cap Vect(S_2).$$

b) Donnez un exemple où $Vect(S_1 \cap S_2)$ et $Vect(S_1) \cap Vect(S_2)$ sont égaux, et donnez-en un autre où ils sont différents.