# DEVOIR MAISON I

Cours de M1: Mesure et probabilités, M.-H. Nicole, campus de Luminy.
Devoir maison (optionnel), à rendre le 2 octobre.

Nom: ______________________
Numéro d'étudiant:____________

**Ce devoir maison est optionnel, et il ne compte pas pour la note du cours.**
Si vous ne vous rappelez pas bien de la théorie de la mesure, je vous recommande fortement de répondre au maximum de questions et de me soumettre le tout. Vous pouvez bien sûr travailler en équipe si vous le souhaitez. Pour que l'exercice soit utile, rédigez toutefois vos solutions tout seul; en particulier, sans utiliser internet.

**Problème 0:** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) Montrez qu'une fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est mesurable ssi les ensembles de niveau $\{x \in X | f(x) > \lambda\}$ sont $\mathcal{M}$-mesurables.
(2) Montrez que la fonction indicatrice $\chi_E$ d'un ensemble $E \subset X$ est mesurable ssi $E$ lui-même est $\mathcal{M}$-mesurable.
(3) Montrez qu'une fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ (respectivement $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$) est mesurable ssi $f^{-1}(E)$ est $\mathcal{M}$-mesurable pour tout ensemble borélien $E$ de $[0, +\infty]$ (resp. de $\mathbb{C}$).
(4) Montrez qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable ssi ses parties réelles et imaginaires sont mesurables.
(5) Montrez qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable ssi les fonctions $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := \max(-f, 0)$ sont mesurables.
(6) Si $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est une suite de fonctions mesurables convergent ponctuellement vers une limite $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$, alors montrez que $f$ est aussi measurable. Est-ce vrai si $[0, \infty]$ est remplacé par $\mathbb{C}$?

**Problème 1:**
Construisez deux nouveaux exemples de $\sigma$-algèbres (appelées aussi tribus) qui ne sont pas $\sigma$-finies.

**Problème 2:**

a) Construisez une mesure extérieure $\mu_*$ sur un espace métrique $X$ tel qu'existent deux sous-ensembles $A, B$ à distance $d(A, B) > 0$ et, toutefois,

$$\mu_*(A \cup B) \neq \mu_*(A) \cup \mu_*(B).$$

b) Dans votre exemple en a), les ensembles boréliens $X$ (définis à partir de la classe des boules ouvertes) sont-ils toujours mesurables? Si c'est le cas, prouvez-le. Sinon, construisez un contrexemple.

**Problème 3:** a) Enoncez et prouvez le théorème d'Egorov (ou Egoroff).
b) Montrez que si $\mu$ n'est pas une mesure finie, l'énoncé du théorème d'Egorov n'est pas nécessairement vrai i.e., construisez un contrexemple.

**Problème 4:** Soit $X = \mathbb{R}^\omega := \prod_{i=1}^\infty \mathbb{R}$ le produit d'un nombre dénombrable de copies de $\mathbb{R}$. Construisez un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$. En particulier, prouvez toutes les propriétés d'un espace mesuré pour votre exemple.