Démarche à nombreux pas
Devoir sur l'agrandissement d'un triangle

Sujet du devoir :

La figure ci-contre propose une façon d'agrandir le triangle ABC avec le coefficient 3 :

faire la figure

On agrandit trois fois les côtés [AB] et [AC], ce qui donne [AB'] et [AC'].
D et E sont les points qui, avec B et C, divisent les côtés [AB'] et [AC'] en trois parties égales chacun.
Ensuite, on trace les segments [DE] et [B'C'].
Puis on trace les parallèles à (AB') passant par C et E. Les points d'intersection de ces droites avec les segments précités sont F, G et H.

Décrivez toutes les étapes d'une démonstration du fait que le triangle AB'C' contient neuf triangles superposables au triangle ABC, c'est à dire neuf triangles ayant les mêmes longueurs des côtés que ABC. Vous ne devez pas rédiger le détail de la démonstration, mais uniquement son plan.

Rappel des propriétés pour démontrer qu'un quadrilatre est un : parallélogramme, rectangle, losange ou carré

Th01 : **Si** un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, **alors** c'est un parallélogramme.
Th02 : **Si** un quadrilatère a ses angles opposés égaux, **alors** c'est un parallélogramme.
Th03 : **Si** un quadrilatère a ses angles consécutifs supplémentaires, **alors** c'est un parallélogramme.
Th04 : **Si** un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, **alors** c'est un parallélogramme.
Th05 : **Si** un quadrilatère n.c. a ses côtés opposés de même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
Th06 : **Si** un quadrilatère n.c. a deux côtés à la fois parallèles et égaux, **alors** c'est un parallélogramme.

Th07 : **Si** un quadrilatère a quatre angles droits, **alors** c'est un rectangle.
Th08 : **Si** un parallélogramme a un angle droit, **alors** c'est un rectangle.
Th09 : **Si** un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur, **alors** c'est un rectangle.

Th10 : **Si** un quadrilatère a ses quatre côtés de la même longueur, **alors** c'est un losange.
Th11 : **Si** un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, **alors** c'est un losange.
Th12 : **Si** un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un losange.

Th13 : **Si** un quadrilatère a ses quatre côtés de la même longueur et ses quatre angles droits, **alors** c'est un carré.
Th14 : **Si** un rectangle a deux côtés consécutifs de la même longueur, **alors** c'est un carré.
Th15 : **Si** un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un carré.

Th16 : **Si** un losange a un angle droit, **alors** c'est un carré.
Th17 : **Si** un losange a ses diagonales de la même longueur, **alors** c'est un carré.

Note : « n.c. » signifie « non croisé ».

Démarche à nombreux pas

Intention des auteurs

Les devoirs à la maison sont une occasion précieuse de faire rédiger des raisonnements. Or une objection est souvent soulevée : les élèves se font aider, ils copient. C'est vrai, et nombre d'enseignants partent de ce fait pour ne plus donner de devoir.

Mais les élèves se font aider ou copient surtout lorsque le type de sujet qu'on leur propose s'y prête. On peut trouver bien des parades à cet état de fait, en choisissant des thèmes, des sujets originaux que les parents ne puissent pas maîtriser sans y consacrer un temps prohibitif ou en demandant l'écriture de raisonnements, de plans, de démarches, nécessairement personnels. Il devient alors plus économique de rechercher de l'aide dans le travail mené en commun en classe que dans une intervention familiale ou un cours particulier et l'élève s'implique davantage dans un travail intellectuel authentique.

Le devoir proposé ici donne un exemple d'un tel sujet. Le grand nombre de pas nécessaires à mettre en oeuvre pour mener la démonstration demandée permet une grande variété de réponses. Par ailleurs, il donne de l'intérêt au travail de démonstration. L'écueil, si on exigeait une rédaction complète et détaillée serait la longueur de l'entreprise, source de découragement ou d'échec. On abandonne donc l'exigence d'une rédaction complète. On demande uniquement de donner les étapes d'une démarche organisée de preuve.

Déroulement possible

Le sujet est proposé en devoir à la maison avec un délai d'une semaine mais fait néanmoins l'objet d'une séance de mises au point en classe à mi-pacours. Voici les consignes qui ont été données à la classe qui a été observée :
- vendredi 26/02/10 : chercher le devoir sur l'agrandissement du triangle ; apporter votre brouillon et vos questions.
- mardi 03/03/10 : rédiger le devoir en tenant compte des réponses données vendredi et l'apporter.

Compte-rendu de la séance de réponses aux questions

On trouvera ci-dessous le compte-rendu des deux étapes préconisées dans la section "déroulement possible" : le compte-rendu de la séance de réponses aux questions écrit par le professeur qui a donné le devoir à ses élèves ; le compte-rendu de la lecture et l'analyse des copies, écrit par un enseignant extérieur.

`1- Compte-rendu de la séance de réponses aux questions par le professeur`

Les élèves ont noté le travail à faire dans leur cahier de textes :
Vendredi 26/02/10- Maths : Chercher le devoir sur l'agrandissement du triangle ; apporter votre brouillon et vos questions.

Mardi 02/03/10- Maths : Rédiger le devoir en tenant compte des réponses données vendredi et l'apporter.

Je rappelle aux élèves que dans cette séance, ils peuvent poser deux sortes de questions : des questions sur le fond et des questions sur la forme. J'écris au tableau :
Réponses aux questions sur le devoir :
Comment trouver ? Comment rédiger ?
Je trace la figure à main levée, avec ses codages.

Question de Chloé : ≪ Lorsque vous dites de ne pas rédiger le détail de la démonstration mais uniquement son plan, est-ce qu'il faut citer le nom des théorèmes qu'on utilise ? ≫Je réponds : ≪ Oui, c'est exactement ça ≫, puis je demande à l'élève de nous dire par exemple par quoi commence son plan de démonstration ; pendant qu'elle répond, j'écris au tableau :
(B'C') est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalès.
Je lui demande ensuite de rappeler les hypothèses de la réciproque du théorème de Thalès, puis≪ à quelle valeur sont égaux les deux quotients en question ? ≫. Je complètealors :
(B'C') est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalèsavec le rapport 1/3.
≪ Voici une façon courte mais très complète de résumer la première étape du raisonnement.Quelle est ta deuxième étape ? ≫.
A partir de là, un dialogue avec la classe conduit à deux propositions :
(DE) est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalès avec le rapport 1/2.
ou : *(DE) est parallèle à (BC) par l'un des théorèmes des milieux dans le triangle* ADE.
- Question de Léa : ≪ Moi, j'ai mis ensemble que (B'C') est parallèle à (BC) et que (DE) est parallèle à (BC) en écrivant une seule fois "par la réciproque de Thalès" : ça fait une ou deux étapes ? ≫.
Je réponds : ≪ Si on rédige comme je viens de le faire au tableau, qu'est-ce qui empêche de faire les deux parallélismes d'un coup ? ≫. Léa convient que lorsqu'on donne la valeur des rapports égaux, cela oblige à séparer les deux pas du raisonnement.

- Question de Soha : ≪ Lorsque le théorème qu'on veut utiliser ne porte pas de nom, comment fait-on, faut-il le citer entièrement ? ≫
Réponse : ≪ On trouve un moyen pour faire comprendre de quel théorème il s'agit sans le citer complètement. Par exemple, vous avez un document sur lequel figurent dix-sept théorèmes pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré, tous numérotés : si c'est l'un d'entre eux, il suffit de dire "d'après le th. 6 de la feuille polycopiée sur les parallélogrammes". Mais que peut-on déduire très simplement des deux premières étapes qui sont écrites au tableau ? ≫. Un ou deux élèves aident Soha à répondrequ'on peut en déduire que (DE) et (B'C') sont parallèles elles aussi. J'enchane : ≪ C'est utile car ça va permettre ensuite d'avoir des parallélogrammes et donc de transporter des égalités de longueurs. Pour faire comprendre quel théorème tu utilises pour le prouver, tu peux simplement dire "d'après un théorème de la classe de Sixième sur les parallèles ". Donner le niveau de classe o l'on a étudié le théorème est un autre très bon moyen de permettre au lecteur de savoir auquel on pense ≫.

- A partir de là, un dialogue avec la classe conduit à mettre en place plusieurs nouvelles étapes : les quadrilatères BCFD, DFGB' et FEHG sont des parallélogrammes par le th. 1 de la feuille sur les parallélogrammes ; la longueur AB se retrouve en BD, CF, DB', FG et EH tandis que BC se retrouve en DF et en B'G, d'après l'égalité des côtés opposés dans un parallélogramme. Je ne rédige plus de phrase pour ces étapes, je les montre seulement sur la figure o je code les égalités de longueurs obtenues avec une nouvelle couleur.

- Question de Ryan : ≪ Je ne comprends pas pourquoi vous n'avez pas codé les longueurs FE et GH, on a bien un parallélogramme là aussi ! ≫.

J'explique : ≪ on est sr que FE et GH sont égales, mais on ne sait pas qu'elles sont égales à BC, du moins au point o on en est ≫. Une discussion assez vive s'en suit, o interviennent plusieurs élèves, pour savoir si FE et GH sont égales à BC ou pas. Ryan ne fait pas bien la part entre ce dont il est sr et ce qu'il a démontré. Je précise ≪ je crois que tout le monde est d'accord pour dire que FE est srement égale à DF, nous en avons tous l'intuition et même la certitude ; mais si on en reste aux intuitions, autant dire tout de suite que les neuf triangles ont les mêmes longueurs des côtés et en rester là : ça aussi personne n'en doute ; non, ce que nous cherchons à faire, c'est le démontrer, ce qui est tout autre chose et nous ne l'avons pas encore fait ≫. Samy propose alors son idée : utiliser la droite des milieux dans le triangle ADE pour dire que BC est la moitié de DE. Le raisonnement est plus ou moins donné oralement et on remarque que la même question se pose pour HC : ≪ il faudra mettre tout ça au point ≫.

- On évoque ensuite les étapes qui restent : elles concernent le "transport" de la longueur AC.

Léa propose d'utiliser ≪ les parallèles (DG), (BH) et (AC') ≫. Mais ces droites sont-elles parallèles ? Il faudrait d'abord le démontrer. D'autre part, le point F est-il sur [BH] ? Nouvelle discussion o l'évidence fait obstacle à la démonstration. Je fais remarquer : ≪ dans ce travail, il est capital d'avoir en tête la façon dont la figure a été construite ; si on ne tient pas compte de la façon dont on a tracé les différents éléments, il est impossible de faire des démonstrations car on ne sait plus faire la part entre ce qui parat évident et ce qui est prouvé ; c'est le cas pour les segments [BF] et [FH] ≫.

Vincent prend la parole : il croyait avoir réussi à prouver que BF et FH sont égales, mais il ne sait plus s'il n'a pas utilisé l'alignement de B, F et H sans s'en rendre compte. Je précise : ≪ en effet, on peut très bien prouver que BF et FH sont égales sans se servir de l'alignement ; mais il faut rechercher d'autres idées que celles qui ont été proposées jusqu'à maintenant ; c'est peut-être ce que tu as fait, à toi de voir ça en détail ≫. Vincent conclut :≪ pour prouver que BF, FH et DG sont égales à AC, il faut trouver un autre chemin, c'est ça ? ≫.

Je déclare qu'on va s'arrêter là : ≪ Toutes les étapes n'ont pas été données, il vous reste à trouver les dernières et à tout mettre en ordre ; dans votre rédaction, séparez nettement une étape de la suivante pour qu'on voie bien les différents pas de votre raisonnement et l'articulation entre eux ≫.

- Bianca pose une dernière question : ≪ Comment on fait pour prouver que les triangles ont tous la même aire ? ≫.

Je réponds : ≪ on s'arrête avant de le prouver ; on démontre simplement que les triangles ont les mêmes longueurs des côtés ≫puis je rappelle qu'en Cinquième, ils ont vu qu'avec trois longueurs données, on construit un seul triangle. Je résume la construction au compas par un dessin à main levée au tableau et fais remarquer que le triangle obtenu est le même quel que soit le côté par lequel on commence et la position dans laquelle on le place. Pas besoin de calcul alors pour être sr que l'aire est aussi la même.

La partie de la séance consacrée au devoir à la maison a duré 35 min ou un peu plus.

`2- Analyse des copies`

A la lecture du compte-rendu de la séance en classe "réponses aux questions", l'exercice m'a semblé très intéressant et fort bien installé.
Le présent compte-rendu de la lecture des copies dans lesquelles les élèves devaient exposer, sans détails, le raisonnement permettant la résolution de l'exercice est organisé comme suit : un commentaire général et un bref survol de chacune des copies.

Commentaire général Dans l'ensemble j'ai été très agréablement surprise par la qualité d'écriture des élèves. En outre, les élèves semblent se prendre au jeu et être bien engagés dans la résolution de l'exercice (qui pourtant est assez aride). En témoigne le nombre d'élèves qui s'émancipent de la démarche indiquée en séance et proposent une démarche personnelle (10 sur 23). Un assez grand nombre d'élèves semblent dominer une démarche globale de raisonnement. Ce commentaire est toutefois à nuancer puisque une démarche avait été dégagée en classe et que 11 élèves sur 23 l'ont suivie dans leurs copies, il est difficile de percevoir à quel point ils se la sont appropriée. Les élèves qui s'en émancipent semblent dominer un raisonnement global.

Copie par copie J'ai repéré 11 élèves qui ont repris plus ou moins scrupuleusement la démarche dégagée pendant la séance "répose aux questions", que j'appelerai "démarche indiquée" et 9 qui s'en sont émancipés, de diverses manières et deux qui n'ont pas vraiment fait l'exercice. J'indique par la suite, ces différents groupes d'élèves par "groupe 1", "groupe 2" et "groupe 3".

- Groupe 1 :

1. Soha
   suit scrupuleusement la démarche indiquée sans toujours noter précisément les conclusions intermédiaires. Je relève une confusion dans l'utilisation des théorèmes : dans sa 6^{eme} étape elle semble confondre théorème 6 (de la fiche) et théorème des milieux. La dernière étape n'est pas du tout claire.
2. Chloé
   suit scrupuleusement la démarche indiquée avec, me semble-t-il, de la maîtrise. Sa 8^{eme} étape, qui n'avait pas été très commentée en classe est un peu confuse, car superpose deux applications de la réciproque du théorème de Thalès.
   Erreur de vocabulaire :*contraposée* de Thalès à la place de *réciproque* de Thalès.
3. Claire
   reprend la démarche indiquée mais il y a confusion entre étapes de constructions (de la figure) et étapes de raisonnement, entre énoncés déduits du raisonnement et énoncés donnés par la construction. Et sa démarche tourne vite court.
4. Léa.
   semble confondre les théorèmes : i) de Thalès, ii) parallèles à une même troisième. Dès la troisième étape on relève une assez grande confusion entre ce qui vient d'un raisonnement et ce qui fait partie des données. Et puis, certains passages (la conclusion de l'étape 5, le début de l'étape 6) ne sont pas du tout justifiées.

5. Anaïs
   semble avoir seulement recopié les notes prises pendant la séance.

6. Thomas
   commence par suivre la démarche indiquée en rédigeant un peu plus que ce qui était demandé. La rédaction est toutefois un peu trop elliptique. Il décrit les étapes de sa pensée sans rendre vraiment compte de l'articulation logique. Par contre il est plus efficace dans les étapes 3 et 4, dans lesquelles il est pourtant plus autonome (par rapport à la démarche indiquée), mais il ne conclut pas.

7. Arnaud
   rédige plus qu'exigé mais plutt bien, tant que le raisonnement convient. Je relève des problèmes de notation : (FE) n'est pas une longueur. Une étape semble non jusifiée $FE = HC'$. Et ensuite une tentative de passer par les losanges qui est déplacée. La fin ne va pas du tout, du point de vue du raisonnement.
   En fait, il semble que dès que l'on quitte la démarche dégagée en classe, cela ne va plus du tout.

8. Ruth.
   Confusion entre données et résultats d'étapes de raisonnement, mais aussi confusion dans le langage. Il n'est pas clair que ses écrits fassent sens pour cette élève.

9. Ryan.
   Il répète les deux premières étapes et cela semble convenir, la 3eme étape dérape complètement, on ne sait pas ce qu'il veut faire quand il annonce qu'il veut montrer l'égalité de deux droites, à moins que cela ne soit une égalité entre longueurs, mais le théorème semblerait conclure sur un parallélisme ... Il se reprend ensuite mais les méthodes à utiliser pour résoudre les différentes étapes pointées ne sont pas explicitées.

10. Oriane.
    Il n'est pas clair qu'elle maîtrise bien les étapes qu'elle pointe, surtout pas la première. Elle semble plus à l'aise à la fin mais peut-être parce qu'elle reste très elliptique et qu'on ne peut voir les manques. La démarche toutefois est bien restituée, la vision d'ensemble semble correcte.

11. Mélanie.
    Cela semble aller tant qu'elle suit les étapes qui ont été explicitées en classe mais elle ne donne pas la fin de la démonstration.

- Groupe 2 :

1. Ivana.
   Confusion entre données et "évidences ". Elle perd, en court de rédaction, l'objectif de la démonstration.

2. Emile.
   Démarche assez louable de reformuler les données et d'expliciter leur conséquences. Une bonne utilisation des théorèmes mais il ne conclut pas.

3. Walid.
   Dès la première étape, il manque des hypothèses et le raisonnement conduit n'est pas explicité.

4. Maxime.
   Démarche originale par rapport à celle donnée en séance. Il n'utilise que le théorème des milieux, d'ailleurs correctement.
5. Sacha
   utilise des résultats intermédiaires non établis (ou bien il y a trop d'implicite). Certaines étapes pointées ne sont pas vraiment intégrées à une démarche globale. La fin est une tentative intéressante, malheureusement non justifiée.
6. Samy
   utilise un résultat non justifié : "F est le mileu de DE", et semble en être plus ou moins conscient, ce qui justifierait qu'il tourne un peu en rond entre les étapes 4 et 5. A la fin des justifications intermédiaires manquent également.
7. Paul.
   Il manque une justification "(BH) est parallèle à (AC')" et plus loin que les droites (AC), (BF), (DG) sont parallèles 2 à 2, c'est dommage car la démarche originale se tient.
8. Sophiane
   rappelle en préalable l'objectif de l'exercice : la comparaison du coefficient d'agrandissement des aires avec celui des longueurs mais sans être bien au clair sur ce qu'il faut montrer.
   Pour la suite il fait preuve d'autonomie en suivant une démarche originale et qui se tient. Dommage que les détails ne soient pas bien maîtrisés ; il néglige de justifier de nombreux résultats intermédiaires.
9. Elias
   extrapole sans justification les conclusions de l'application de la réciproque de Thalès, et répète cette erreur de raisonnement tout au long.
10. Sébastien
    fait preuve d'autonomie en suivant une démarche originale et qui se tient. Dommage que les détails ne soient pas bien maîtrisés ; il néglige de justifier de nombreux résultats intermédiaires : $BD = CF$; les deux triangles obtenus en partageant un parallélogramme selon la diagonale sont superposables ...

- Groupe 3 : Mélissa et Nicolas rappellent dans leur copie l'objectif de l'exercice : vérifier que le coefficient d'agrandissement de l'aire est le carré de celui de l'agrandissement des longueurs. Ce sont presque les seuls à le faire. Malheureusement, ils ne font que cela.

Bilan, discussion

`Richesse de l'exercice pour appréhender les difficultés des élèves`

Cet exercice permet de mettre en évidence une difficulté particulière pour les élèves : le fait qu'ils considèrent comme des données des résultats intermédiaires qu'il faudrait établir (souvent car ils leur paraissent évidents). Le type d'exercice paraît adéquat pour pointer ces confusions et en faire prendre conscience aux élèves ; justement parce qu'il est long, parce que la séparation entre données et résultats à établir n'est pas déjà résolue par l'habitude d'un raisonnement éprouvé sur d'autres exercices semblables. La nécessité de prendre des initiatives comporte aussi la nécessité de choisir les résultats intermédiaires et exige alors de les manipuler avec le statut qui convient : données ou résultats à établir.

Un des avantages notables de cet exercice est bien-sér que sa résolution exige d'établir un "plan" de raisonnement, un démarche globale permettant de répondre à la question posée. Toutefois, deux raisons font que l'expérience n'est pas complètement satisfaisante sur ce point : seuls les élèves qui ont proposé une autre démarche que celle indiquée en séance ont été confrontés à cette difficulté ; il y a deux niveaux auxquels on peut repérer des étapes et selon les élèves c'est l'un ou l'autre qui a été privilégié :
- le calcul de l'aire et sa décomposition ;
- l'isométrie des triangles qui se décompose elle-même en plusieurs parties avec des sous-démarches différentes.

`Les questions qui se posent, les suites possibles`

Voici quelques questions relatives à cette proposition que me suggère la lecture des copies :
- Il me semble que la consigne de ne pas complètement rédiger les détails mais uniquement le plan met les élèves en difficulté. Ceci n'est pas, en soi, un soucis mais est-ce bien la difficulté qu'on avait anticipée ? C'est vrai que, les élèves se posent des "bonnes questions" : est-ce qu'il faut citer les théorèmes ? qu'est-ce qu'une étape de démonstration ? ... Je repointe toutefois ma petite réserve sur les deux niveaux d'articulation : les différents triangles et pour chacun des triangles. Il n'atit pas alors évident pour les élèves que pour chacun des triangles aussi il fallait expliciter toutes les étapes et les théorèmes utilisés. C'est peut-être la raison pour laquelle certains ont carrément rédigé ces étapes ?
- L'exercice est assez long, cela explique peut-être la difficulté pour les élèves (qu'ils doivent néanmoins dépasser c'est entendu) de garder toujours en tête ce qui fait partie des données, ce qui a été justifié, ce qui saute aux yeux mais qui ne l'a pas été ...
- Il est difficile de voir si finalement le détail de l'application des théorèmes est maîtrisé. La deuxième étapes : la rédaction aboutie semble bien nécessaire en complément.
- En complément également, cela pourrait peut-être être intéressant d'échanger les copies entre les élèves et leur demander de commenter les différentes propositions. Cela me semblerait intéressant pour voir s'ils parviennent de l'extérieur à repérer les confusions données/résultats à établir.
- Dernière remarque, cela serait bien dans ce type d'exercice, d'avoir un premier rendu sans indication en séances d'une démarche à suivre.

Annexe

Est-ce bien le lieu ? Synthèse-Propriété pour avoir un ...