

Laboratoire Pytheas

HIPPOCAMPE-MATHS

Centre d'initiation à la démarche de chercheur en mathématique

Le contexte

- Désaffection des étudiants pour les études scientifiques
- Nécessité d'élargir la diffusion de la culture scientifique
 - Présentation du travail du chercheur au grand public.
 - Expliquer les objectifs, les enjeux de la recherche
 - Difficultés pour les mathématiques.

Hippocampe-maths = Mettre les lycéens en situation dans un laboratoire de recherche

- Les lycéens viennent à l'université (3 jours),
rencontrent des chercheurs.
- Sont confrontés à de vrais problèmes
 - qui illustrent la démarche scientifique en mathématique,
 - d'énoncés compréhensibles par les élèves,
- Ils appliquent la méthodologie d'un chercheur :
 - Poser le problème, expérimenter et conjecturer
 - Démontrer
 - Communiquer ses résultats : exposé oral, posters (argumentation avec les chercheurs)

Stage (3 jours sous la responsabilité de chercheurs) :

- le responsable propose des problèmes liés à son thème de recherche
- les jeunes chercheurs (moniteurs, ATER) encadrent les élèves
- Poster : rencontre lycéens-chercheurs
- Visite de l'IML et si possible du CIRM

Thèmes (déjà expérimentés) :

- Création de nouvelles mathématiques (C. Mauduit)
- La géométrie en action (J-L. Maltret)
- Codes correcteurs et cryptographie (R. Rolland)
- Tresses et noeuds (X. Bressaud)
- Logique (en projet)
- Mathématiques et Médecine (D. Barbolosi)

Historique :

- "Hippocampe" en biologie

créé en 2004 par Constance Hammond, Directeur de recherche à l'Inserm (INMED)

- "Hippocampe-Maths"

- Premier atelier pilote : juin 2005,

- 10 stages effectués en 2006-07

dont deux avec des lycées en ZEP et une classe de troisième

la logistique :

- dans les locaux de l'IREM.

• Classes accueillies : (troisième), seconde, Premières et Terminales

• Subventions de la Faculté des Sciences (service de moniteurs) , de l'Université (Plan quadriennal), du ministère (projet « Egalités des chances »)

Les institutions

- **IREM** (Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques)
- les laboratoires : **IML**, LSIS, ...
- Le **département** de Mathématiques, la **Faculté** des Sciences de Luminy de **Université** de la Méditerranée
- APMEP, « Maths pour Tous », SMF

L'équipe

- Les responsables : des enseignants-chercheurs

Jean-Louis MALTRET (MCF, LSIS)

jlm@lumimath.univ-mrs.fr

Christian MAUDUIT (PR, IML)

mauduit@iml.univ-mrs.fr

Robert ROLLAND (MCF, IML)

rolland@iml.univ-mrs.fr

Marie-Renée FLEURY (MCF, IML)

mrd@lumimath.univ-mrs.fr

Site internet

<http://www.irem.univ-mrs.fr/>

IRRATIONNEL ou IRRATIONNEL?

Un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible de nombre entier.

QUESTION: $\sqrt{2}$ est-il rationnel?

hypothèse: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \iff a^2 = 2b^2$$

a^2 est divisible par 2. DONC a est divisible par 2. ($a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$)

$b^2 = 2k^2$ d'où b divisible par 2.

CONTRADICTION:

a et b ont un diviseur commun: 2.

DONC $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Continuons $\sqrt{3}$ est-il aussi irrationnel?

La démonstration est similaire
DONC $\sqrt{3}$ est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

Démo: Par le même raisonnement on a $a^2 = pb^2$
donc a^2 divisible par p
donc a divisible par p ($a = pk$)
donc b^2 divisible par p
donc b divisible par p

CONTRADICTION

donc a et b ont un diviseur commun: p

\sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE FAUSSE:

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.

CONJECTURE: Si p est un nombre premier, \sqrt{p} est irrationnel.



INTRODUCTION

EXEMPLES : SCRAMBLE

A	Y	10 ⁴
B	Z	10 ³
C	A	10 ²
D	B	10 ¹
E	C	10 ⁰
F	D	10 ⁻¹
G	E	10 ⁻²
H	F	10 ⁻³
I	G	10 ⁻⁴
J	H	10 ⁻⁵
K	I	10 ⁻⁶
L	J	10 ⁻⁷
M	K	10 ⁻⁸
N	L	10 ⁻⁹
O	M	10 ⁻¹⁰
P	N	10 ⁻¹¹
Q	O	10 ⁻¹²
R	P	10 ⁻¹³
S	Q	10 ⁻¹⁴
T	R	10 ⁻¹⁵
U	S	10 ⁻¹⁶
V	T	10 ⁻¹⁷
W	U	10 ⁻¹⁸
X	V	10 ⁻¹⁹
Y	W	10 ⁻²⁰
Z	X	10 ⁻²¹

CODE DE CIPHER

1. Message : BAC

2. Clé : 2, 3, 3

3. Message chiffré : 8, 1, 7

Crypter / Decrypter

RUIZ-HUIDOBARO TRICARD
MOULINAS
VENTURA

Choix des Clés:

- On choisit p et q premiers (très grands)
- $n = pq$
- $\phi(n) = (p-1)(q-1)$
- On choisit e tel que $\text{PGCD}(e, \phi(n)) = 1$
- On trouve le d tel que $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$

Exemple de Clés:

$p=2, q=3$ | $\text{PGCD}(e, \phi(n))=1$
 $n=6, \phi(n)=2$ | $d=3$

Message	Clé
1	2
2	3
3	1
4	2
5	3
6	1

DECRYPTAGE $((m^e)^d)^{1/n} \equiv m \pmod{n}$

A envoie le message crypté m^e , et B doit le decrypter pour récupérer le message original. Alors, on doit avoir $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$.

On a $\begin{cases} m^e \equiv m \pmod{p} \\ m^e \equiv m \pmod{q} \end{cases}$

p et q sont premiers, donc $\text{PPCM}(p, q) = pq = n$.

$m^e \equiv m \pmod{p} \Rightarrow m^{ed} \equiv m \pmod{p}$
 $m^e \equiv m \pmod{q} \Rightarrow m^{ed} \equiv m \pmod{q}$

On retrouve alors le message m , decrypté.

$* ed = 1 + k(q-1)(p-1)$
 $m^{1+k(q-1)(p-1)} \equiv m \pmod{p}$
 $(m^k)^{1+k(q-1)(p-1)} \equiv m \pmod{p}$
 (théorème de Fermat)



Exemple:

* Alice envoie un message m

Bob donc:

- Message: BAC
- Clé: 2, 3, 3

$\Rightarrow 2^2 = 2^3 = 8$

$1^2 = 1^3 = 1$

$3^2 = 3^3 = 27$

* Message crypté: 8, 1, 7

* Bob reçoit le message crypté 8, 1, 7

- Il va le decrypter avec la clé privée d

$8^3 = 8^3 = 512$

$1^3 = 1^3 = 1$

$7^3 = 7^3 = 343$

- Le message decrypté est donc: BAC

CODAGE A LEATOIRE

* Si on doit avoir $m^e \equiv m \pmod{n}$

On peut prendre un m' tel que:

$(m \cdot m')^e \equiv m \pmod{n}$

Cherchons m' tel que $(m \cdot m')^e \equiv m \pmod{n}$

Si $m^e \equiv m \pmod{n}$, alors pour avoir $(m \cdot m')^e \equiv m \pmod{n}$, il faut $m'^e \equiv 1 \pmod{n}$

donc $m' \equiv 1 \pmod{n}$

On peut prendre un φ tel que $(m \cdot \varphi)^e \equiv m \pmod{n}$, alors on a $e \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$

$ed = 1 + k(q-1)(p-1)$

$\Rightarrow ed \equiv 1 \pmod{p-1} \Rightarrow (p-1) \nmid d$

$\Rightarrow ed \equiv 1 \pmod{q-1} \Rightarrow (q-1) \nmid d$

$\Rightarrow (p-1) \nmid \varphi$

$(q-1) \nmid \varphi \Rightarrow \text{PPCM}(p-1, q-1) \nmid \varphi$

*** THEOREMES UTILISES:**

THEOREME DE BEZOUT:
 $ax + by = 1$ avec a, b entiers premiers entre eux, $x, y \in \mathbb{Z}$

PETIT THEOREME DE FERMAT:
 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, avec p premier

THEOREME DES RESTES CHINOIS:
 $\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$ si p et q sont premiers entre eux \Leftrightarrow toujours une solution unique modulo $p \cdot q$

LES EMBOUTEILLAGES.

Comment faire un embouteillage ?
 Comment faire un embouteillage ?
 Comment faire un embouteillage ?

Quelle est la différence ?

I Introduction
 L'embouteillage est un phénomène qui se produit dans les fluides lorsqu'ils sont soumis à un écoulement. Il se caractérise par la formation de zones de congestion où le fluide s'accumule, entraînant une diminution de la vitesse et une augmentation de la pression. Ce phénomène est observé dans de nombreux contextes, tels que le trafic routier, les écoulements de fluides dans les tuyaux, les écoulements de gaz dans les moteurs, etc. L'étude de l'embouteillage est importante pour comprendre les mécanismes de transport et pour optimiser les systèmes de circulation.

II Définition d'un embouteillage
 Un embouteillage est une situation où le débit d'un fluide est limité par une section étroite ou par une perturbation dans l'écoulement. Cela se traduit par une accumulation de fluide en amont de la section étroite, ce qui entraîne une augmentation de la pression et une diminution de la vitesse. Les embouteillages peuvent être observés dans des systèmes à écoulement continu ou intermittent, et ils sont souvent associés à des phénomènes de turbulence et de formation de vagues de choc.



III Définition d'un embouteillage
 Un embouteillage est une situation où le débit d'un fluide est limité par une section étroite ou par une perturbation dans l'écoulement. Cela se traduit par une accumulation de fluide en amont de la section étroite, ce qui entraîne une augmentation de la pression et une diminution de la vitesse. Les embouteillages peuvent être observés dans des systèmes à écoulement continu ou intermittent, et ils sont souvent associés à des phénomènes de turbulence et de formation de vagues de choc.



IV Définition d'un embouteillage
 Un embouteillage est une situation où le débit d'un fluide est limité par une section étroite ou par une perturbation dans l'écoulement. Cela se traduit par une accumulation de fluide en amont de la section étroite, ce qui entraîne une augmentation de la pression et une diminution de la vitesse. Les embouteillages peuvent être observés dans des systèmes à écoulement continu ou intermittent, et ils sont souvent associés à des phénomènes de turbulence et de formation de vagues de choc.



V Définition d'un embouteillage
 Un embouteillage est une situation où le débit d'un fluide est limité par une section étroite ou par une perturbation dans l'écoulement. Cela se traduit par une accumulation de fluide en amont de la section étroite, ce qui entraîne une augmentation de la pression et une diminution de la vitesse. Les embouteillages peuvent être observés dans des systèmes à écoulement continu ou intermittent, et ils sont souvent associés à des phénomènes de turbulence et de formation de vagues de choc.



VI Conclusion
 L'embouteillage est un phénomène complexe qui résulte de l'interaction entre la géométrie de l'écoulement, les propriétés du fluide et les conditions aux limites. Sa compréhension est essentielle pour la conception et l'optimisation de systèmes de transport de fluides. Des techniques avancées de modélisation et d'analyse sont nécessaires pour prédire et contrôler les embouteillages dans des environnements réels.



CONJECTURE:

Si $a = 2^m P$ avec $m \geq 1$ et P premier
alors a est parfait.

AFFINEMENT DE LA CONJECTURE:

Si $a = 2^m (2^{m+1} - 1)$ avec $2^{m+1} - 1$ premier et
 $m \geq 1$
alors a est parfait.

Idee de la demo:

Hypothèse: $a = 2^m \underbrace{(2^{m+1} - 1)}_{\text{premier}} \quad m \geq 1$

\Downarrow
 2^m et $2^{m+1} - 1$ sont premiers entre eux

$$SD(a) = \underbrace{SD(2^m)}_{2^{m+1} - 1} \times \underbrace{SD(2^{m+1} - 1)}_{2^{m+1}}$$

$$SD(a) = (2^{m+1} - 1) \underbrace{2^{m+1}}_{2^{m+1}} = 2 \underbrace{(2^m (2^{m+1} - 1))}_a$$

Conclusion:

$$SD(a) = 2a$$

\Downarrow
 a est parfait



PAVAGES DU PLAN AVEC DES POLYÈNES RÉGULIERS

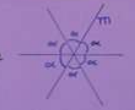
COMMENT PAVER LE PLAN AVEC UN SEUL TYPE DE POLYÈNE RÉGULIER

• LEMME → Soit un polygone régulier à n côtés où n est un entier ≥ 3 . Alors l'angle α défini par deux côtés adjacents vaut

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$$



• THEOREME → On peut paver le plan avec un polygone régulier à n côtés si et seulement si $n=3, 4$ ou 6
 $m\alpha = 360^\circ \Rightarrow m \frac{n-2}{n} = 2$
 si $n \neq 4$ alors $n-2 > 4 \Rightarrow \frac{1}{n-2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{n-2} < 2 \rightarrow$ impossible



n	3	4	5	6	
m	6	4	$\frac{6}{5}$	3	

Or $n=5$, impossible car m doit être un entier. Exemple avec $m=6$

COMMENT PAVER LE PLAN AVEC PLUSIEURS TYPES DE POLYÈNES RÉGULIERS

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	60	90	108	120	128.57	135	144	144	150	150

- $60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 + 120 = 360^\circ$
- $60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 90 + 90 = 360^\circ$
- $60 \cdot 60 + 120 + 120 = 360^\circ$



- $60 \cdot 90 + 90 + 120 = 360^\circ$
- $135 + 135 + 90 = 360^\circ$
- $150 + 150 + 60 = 360^\circ$

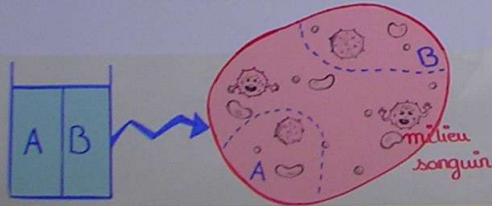




La Recherche d'associations médicamenteuses à l'aide des Mathématiques

PROBLEMATIQUE
 Quelle est la procédure à suivre pour éradiquer les cellules cancéreuses de catégories A et B?

Introduction: Nous allons déterminer quelle est la procédure à suivre pour éradiquer les cellules cancéreuses de catégorie A et B. Cela revient en Mathématiques à montrer que la somme des cellules A et B composant la tumeur après le n-ième traitement tend vers 0. Donc aboutir à la destruction totale des cellules cancéreuses.



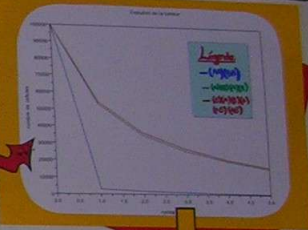
Pour modéliser ce problème, on appelle x_n le nombre de cellules sensibles au produit A, et y_n le nombre de cellules sensibles au produit B, après le n-ième traitement. Soient (x_n) et (y_n) , $n \in \mathbb{N}$, deux suites numériques réelles telles que

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n \\ y_{n+1} = \beta y_n + \alpha x_n \end{cases}$$

Si $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$ alors $(x_n + y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion: Afin d'éradiquer les cellules de catégories A et B il est nécessaire d'établir un traitement à l'aide de produits A et B. Le problème était de savoir comment l'établir pour qu'il soit le plus efficace. Nous avons donc constaté que le traitement le plus efficace est le (AA) (BB), administré avec 14 jours d'intervalle, après avoir essayé plusieurs possibilités.

Par: Emma Louie Jessica Sarah



(AA) (BB)	(AA) (A)	(A) (BB)	(A) (A)
100000	100000	100000	100000
99500	99500	99500	99500
99000	99000	99000	99000
98500	98500	98500	98500
98000	98000	98000	98000
97500	97500	97500	97500
97000	97000	97000	97000
96500	96500	96500	96500
96000	96000	96000	96000
95500	95500	95500	95500
95000	95000	95000	95000
94500	94500	94500	94500
94000	94000	94000	94000
93500	93500	93500	93500
93000	93000	93000	93000
92500	92500	92500	92500
92000	92000	92000	92000
91500	91500	91500	91500
91000	91000	91000	91000
90500	90500	90500	90500
90000	90000	90000	90000
89500	89500	89500	89500
89000	89000	89000	89000
88500	88500	88500	88500
88000	88000	88000	88000
87500	87500	87500	87500
87000	87000	87000	87000
86500	86500	86500	86500
86000	86000	86000	86000
85500	85500	85500	85500
85000	85000	85000	85000
84500	84500	84500	84500
84000	84000	84000	84000
83500	83500	83500	83500
83000	83000	83000	83000
82500	82500	82500	82500
82000	82000	82000	82000
81500	81500	81500	81500
81000	81000	81000	81000
80500	80500	80500	80500
80000	80000	80000	80000
79500	79500	79500	79500
79000	79000	79000	79000
78500	78500	78500	78500
78000	78000	78000	78000
77500	77500	77500	77500
77000	77000	77000	77000
76500	76500	76500	76500
76000	76000	76000	76000
75500	75500	75500	75500
75000	75000	75000	75000
74500	74500	74500	74500
74000	74000	74000	74000
73500	73500	73500	73500
73000	73000	73000	73000
72500	72500	72500	72500
72000	72000	72000	72000
71500	71500	71500	71500
71000	71000	71000	71000
70500	70500	70500	70500
70000	70000	70000	70000
69500	69500	69500	69500
69000	69000	69000	69000
68500	68500	68500	68500
68000	68000	68000	68000
67500	67500	67500	67500
67000	67000	67000	67000
66500	66500	66500	66500
66000	66000	66000	66000
65500	65500	65500	65500
65000	65000	65000	65000
64500	64500	64500	64500
64000	64000	64000	64000
63500	63500	63500	63500
63000	63000	63000	63000
62500	62500	62500	62500
62000	62000	62000	62000
61500	61500	61500	61500
61000	61000	61000	61000
60500	60500	60500	60500
60000	60000	60000	60000
59500	59500	59500	59500
59000	59000	59000	59000
58500	58500	58500	58500
58000	58000	58000	58000
57500	57500	57500	57500
57000	57000	57000	57000
56500	56500	56500	56500
56000	56000	56000	56000
55500	55500	55500	55500
55000	55000	55000	55000
54500	54500	54500	54500
54000	54000	54000	54000
53500	53500	53500	53500
53000	53000	53000	53000
52500	52500	52500	52500
52000	52000	52000	52000
51500	51500	51500	51500
51000	51000	51000	51000
50500	50500	50500	50500
50000	50000	50000	50000
49500	49500	49500	49500
49000	49000	49000	49000
48500	48500	48500	48500
48000	48000	48000	48000
47500	47500	47500	47500
47000	47000	47000	47000
46500	46500	46500	46500
46000	46000	46000	46000
45500	45500	45500	45500
45000	45000	45000	45000
44500	44500	44500	44500
44000	44000	44000	44000
43500	43500	43500	43500
43000	43000	43000	43000
42500	42500	42500	42500
42000	42000	42000	42000
41500	41500	41500	41500
41000	41000	41000	41000
40500	40500	40500	40500
40000	40000	40000	40000
39500	39500	39500	39500
39000	39000	39000	39000
38500	38500	38500	38500
38000	38000	38000	38000
37500	37500	37500	37500
37000	37000	37000	37000
36500	36500	36500	36500
36000	36000	36000	36000
35500	35500	35500	35500
35000	35000	35000	35000
34500	34500	34500	34500
34000	34000	34000	34000
33500	33500	33500	33500
33000	33000	33000	33000
32500	32500	32500	32500
32000	32000	32000	32000
31500	31500	31500	31500
31000	31000	31000	31000
30500	30500	30500	30500
30000	30000	30000	30000
29500	29500	29500	29500
29000	29000	29000	29000
28500	28500	28500	28500
28000	28000	28000	28000
27500	27500	27500	27500
27000	27000	27000	27000
26500	26500	26500	26500
26000	26000	26000	26000
25500	25500	25500	25500
25000	25000	25000	25000
24500	24500	24500	24500
24000	24000	24000	24000
23500	23500	23500	23500
23000	23000	23000	23000
22500	22500	22500	22500
22000	22000	22000	22000
21500	21500	21500	21500
21000	21000	21000	21000
20500	20500	20500	20500
20000	20000	20000	20000
19500	19500	19500	19500
19000	19000	19000	19000
18500	18500	18500	18500
18000	18000	18000	18000
17500	17500	17500	17500
17000	17000	17000	17000
16500	16500	16500	16500
16000	16000	16000	16000
15500	15500	15500	15500
15000	15000	15000	15000
14500	14500	14500	14500
14000	14000	14000	14000
13500	13500	13500	13500
13000	13000	13000	13000
12500	12500	12500	12500
12000	12000	12000	12000
11500	11500	11500	11500
11000	11000	11000	11000
10500	10500	10500	10500
10000	10000	10000	10000
9500	9500	9500	9500
9000	9000	9000	9000
8500	8500	8500	8500
8000	8000	8000	8000
7500	7500	7500	7500
7000	7000	7000	7000
6500	6500	6500	6500
6000	6000	6000	6000
5500	5500	5500	5500
5000	5000	5000	5000
4500	4500	4500	4500
4000	4000	4000	4000
3500	3500	3500	3500
3000	3000	3000	3000
2500	2500	2500	2500
2000	2000	2000	2000
1500	1500	1500	1500
1000	1000	1000	1000
500	500	500	500
0	0	0	0

On constate que le traitement (AA) (BB) est le plus efficace. En effet, le nombre de cellules cancéreuses est passé de 100 000 à 452. A ce stade le patient est quasiment guéri car il est impossible d'éradiquer complètement la tumeur.