

Diagrammes et co-opérations

RANNOU Pierre

15 juin 2010

Un premier exemple

$$\begin{aligned}\delta_{[,] [X, Y] &= 2(X \otimes Y - Y \otimes X) \\ &+ \frac{1}{2}(X_{[1]} \otimes [X_{[2]}, Y] + [X, Y_{[1]}] \otimes Y_{[2]} \\ &+ Y_{[1]} \otimes [X, Y_{[2]}] + [X_{[1]}, Y] \otimes X_{[2]})\end{aligned}$$

$$\text{Diagram} = 2 \left(\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right) \right)$$

The diagram on the left consists of two trivalent vertices connected by a horizontal line. The top vertex has two inputs on the left and one output on the right. The bottom vertex has one input on the left and two outputs on the right.

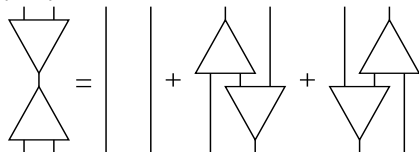
The first term in the expansion is a sum of two diagrams: the first is three parallel vertical lines, and the second is three parallel vertical lines with a crossing between the first and second lines.

The second term is a sum of four diagrams, each representing a different way to connect the inputs and outputs of the two trivalent vertices.

Quelques définitions,

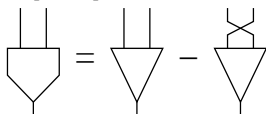
nonunitary infinitesimal

$$\delta(XY) = X \otimes Y + X_1 \otimes X_2 Y + XY_1 \otimes Y_2$$



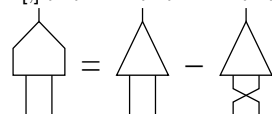
Lie bracket

$$[X, Y] = XY - YX$$



Lie cobracket

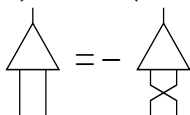
$$\delta_{[.,.]}(X) = \delta(X) - \tau\delta(X)$$



Et quelques propriétés,

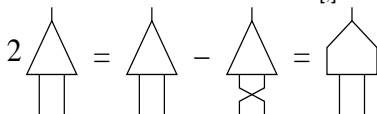
anti-cocommutativity for Lie polynomials

$$\delta(X) = -\tau\delta(X) \text{ where } \tau(X \otimes Y) = (Y \otimes X)$$



corollary

$$2\delta(X) = \delta(X) - \tau\delta(X) = \delta_{[,]}(X)$$



Preuve

$$\begin{aligned}\delta_{[1]}[X, Y] &= (\delta - \tau\delta)(XY - YX) \\ &= \delta(XY) - \delta(YX) - \tau\delta(XY) + \tau\delta(YX) \\ &= X \otimes Y + X_1 \otimes X_2 Y + XY_1 \otimes Y_2 - Y \otimes X - Y_1 \otimes Y_2 X - YX_1 \otimes X_2 \\ &\quad - Y \otimes X - X_2 Y \otimes X_1 - Y_2 \otimes XY_1 + X \otimes Y + Y_2 X \otimes Y_1 + X_2 \otimes YX_1 \\ &= X \otimes Y + X_1 \otimes X_2 Y + XY_1 \otimes Y_2 - Y \otimes X - Y_1 \otimes Y_2 X - YX_1 \otimes X_2 \\ &\quad - Y \otimes X + X_1 Y \otimes X_2 + Y_1 \otimes XY_2 + X \otimes Y - Y_1 X \otimes Y_2 - X_1 \otimes YX_2 \\ &= 2(X \otimes Y - Y \otimes X) + X_1 \otimes X_2 Y - X_1 \otimes YX_2 + XY_1 \otimes Y_2 - Y_1 X \otimes Y_2 \\ &\quad + Y_1 \otimes XY_2 - Y_1 \otimes Y_2 X + X_1 Y \otimes X_2 - YX_1 \otimes X_2 \\ &= 2(X \otimes Y - Y \otimes X) \\ &\quad + X_1 \otimes [X_2, Y] + [X, Y_1] \otimes Y_2 + Y_1 \otimes [X, Y_2] + [X_1, Y] \otimes X_2 \\ &= 2(X \otimes Y - Y \otimes X) + \frac{1}{2}(X_{[1]} \otimes [X_{[2]}, Y] + [X, Y_{[1]}] \otimes Y_{[2]} \\ &\quad + Y_{[1]} \otimes [X, Y_{[2]}] + [X_{[1]}, Y] \otimes X_{[2]})\end{aligned}$$

Preuve

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (\text{by 2 and 3})$$

$$= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (\text{by 1})$$

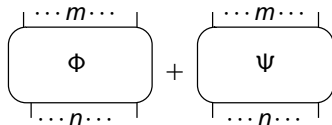
$$= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (\text{by 4})$$

$$= 2 \left(\text{Diagram} \right) + \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} - \text{Diagram} + \text{Diagram} - \text{Diagram} \quad (\text{by 2})$$

$$= 2 \left(\text{Diagram} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \right) \quad (\text{by 5})$$

Σ -diagrammes

Les Σ -diagrammes sur Q sont des diagrammes avec une nouvelle opération : la somme (et la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{Z}$).



Interprétation :

- ▶ Σ -diagrammes : $f : \mathbb{Z}(Q^m) \rightarrow \mathbb{Z}(Q^n)$
- ▶ Composition parallèle : $f \otimes f'$
- ▶ Somme et multiplication scalaire : $\lambda f + g$

Règles :

$$\phi \rightarrow \Psi$$

Où ϕ est un diagramme, et Ψ un Σ -diagramme.

Déconcatenation sur le semi-groupe libre

L'alphabet A , et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$,

Déconcatenation sur le semi-groupe libre

L'alphabet A , et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in S$:

$$\delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Exemple : $\delta(abaa) = a \otimes baa + ab \otimes aa + aba \otimes a$

Déconcatenation sur le semi-groupe libre

L'alphabet A , et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in S$:

$$\delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Exemple : $\delta(aba) = a \otimes ba + ab \otimes a + aba \otimes \epsilon$

définition réursive :

- ▶ $\forall a \in A, \delta(a) = 0$
- ▶ for $u, v \in S, \delta(u \cdot v) = \delta(u) \cdot v + u \otimes v + u \cdot \delta(v)$
 $u \cdot (v \otimes v') = (u \cdot v) \otimes v' + (u \cdot v) \cdot (v \otimes v') = v \otimes (v' \cdot u)$

Théorème

La déconcatenation sur S est coassociative :

Théorème

La déconcatenation sur S est coassociative :

$$\begin{aligned}\delta(w) &= \sum u_i \otimes v_i \text{ alors,} \\ \sum \delta(u_i) \otimes v_i &= \sum u_i \otimes \delta(v_i)\end{aligned}$$

Σ -diagramme et déconcaténation (semi-groupe)

Portes :

Concaténation



Déconcaténation



Σ -diagramme et déconcaténation (semi-groupe)

Portes :

Concaténation



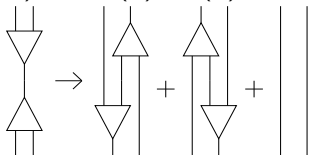
Déconcaténation



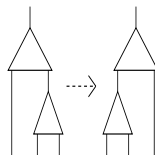
Règles :

Interaction

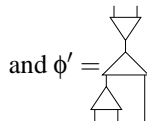
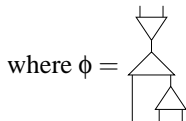
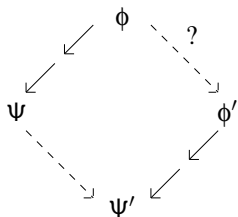
$$\delta(u \cdot v) = u \cdot \delta(v) + \delta(u) \cdot v + u \otimes v$$



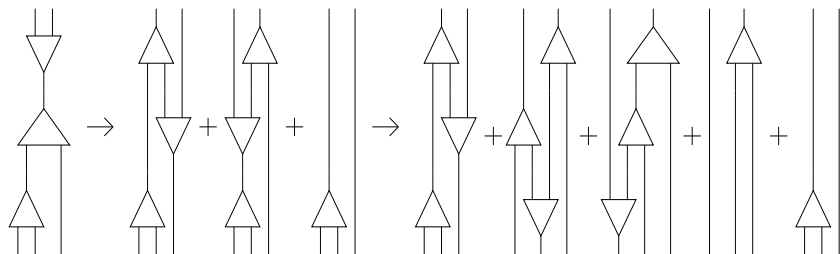
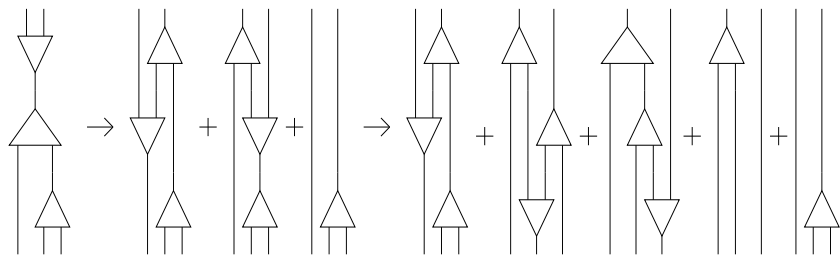
Coassociativité



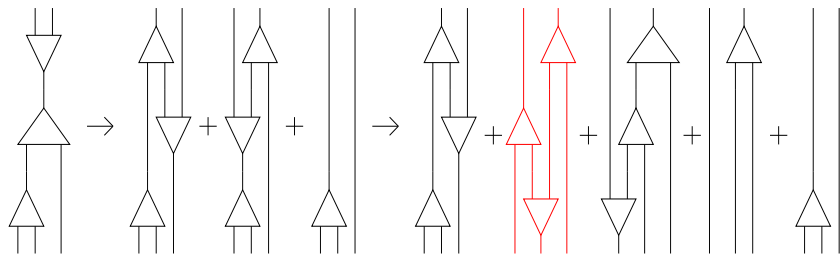
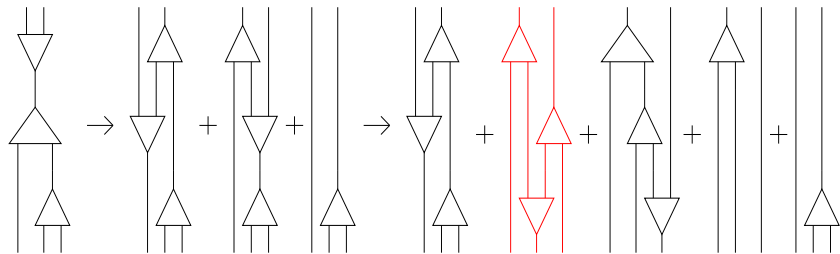
Structure de la preuve



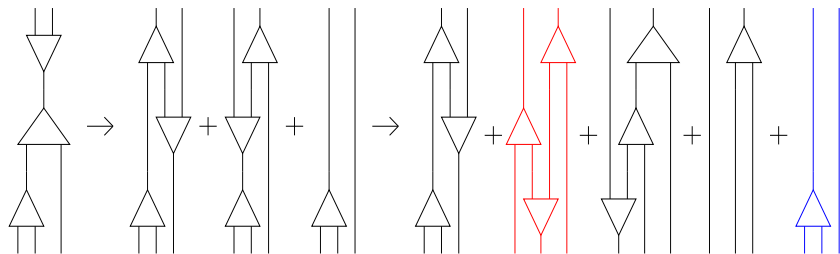
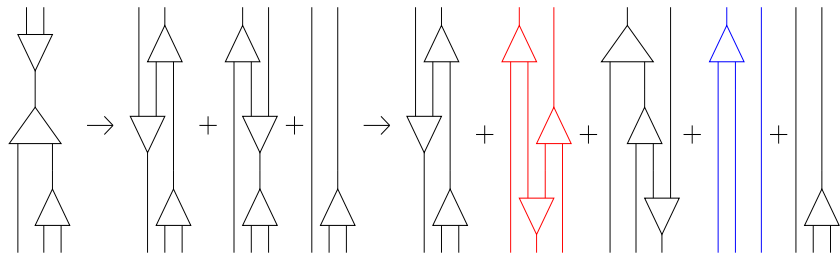
Preuve I



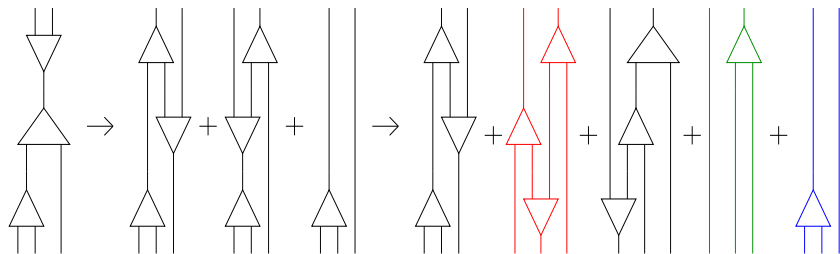
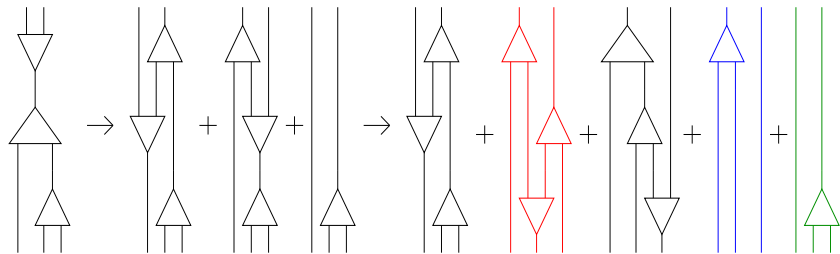
Preuve I



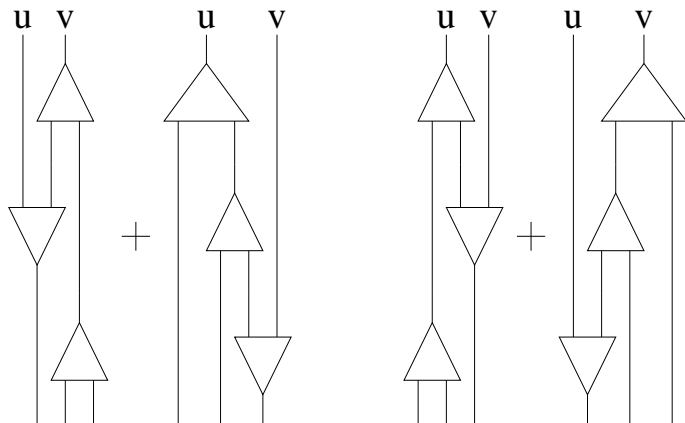
Preuve I



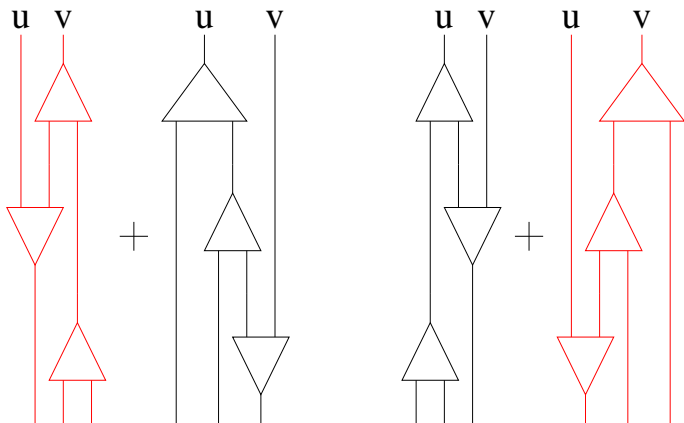
Preuve I



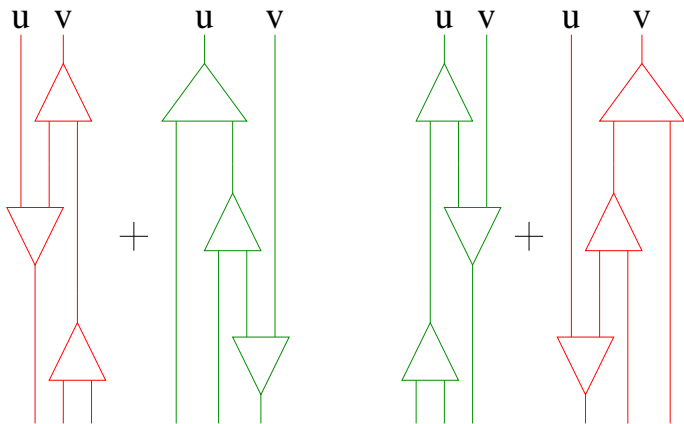
Preuve II



Preuve II



Preuve II



Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A , et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A , et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

- ▶ $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u \cdot v \\ u, v \neq \varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$
- ▶ $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A , et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

- ▶ $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u \cdot v \\ u, v \neq \varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$
- ▶ $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Remarque : $\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A , et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

▶ $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u \cdot v \\ u, v \neq \varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$

▶ $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Remarque : $\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$

$$\Delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) + \varepsilon \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \varepsilon = -\varepsilon \otimes \varepsilon + 2\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon$$

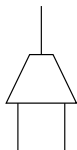
Théorème

La déconcaténation totale est coassociative.

Nouvelles portes et Nouvelles règles

Portes :

Déconcaténation totale



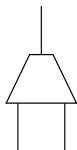
constante ε



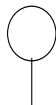
Nouvelles portes et Nouvelles règles

Portes :

Déconcaténation totale

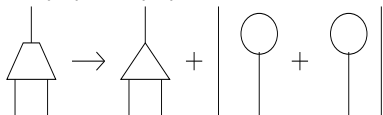


constante ε

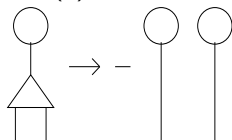


Règles :

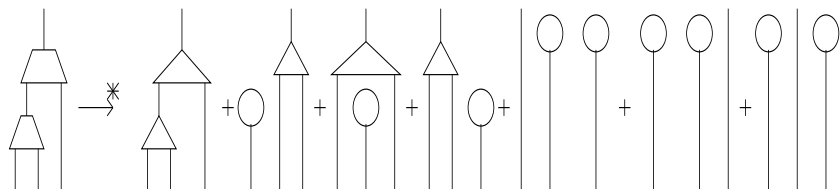
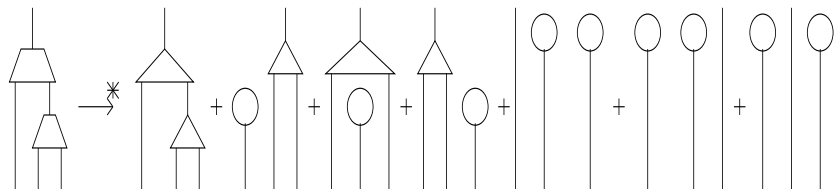
$$\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$$



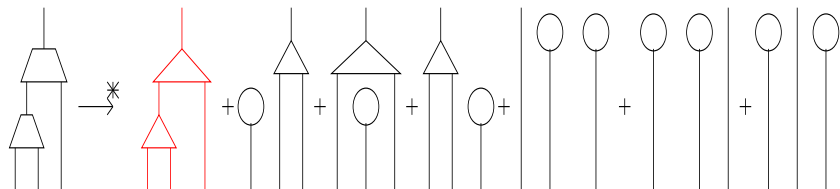
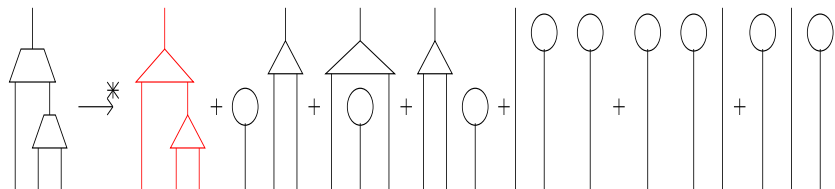
$$\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$$



Preuve



Preuve



Shuffle sur le monoïde libre

Shuffle : $\sigma : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M^2$, pour $w = a_1 \cdots a_k$ et de taille k :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} u \otimes v$$

Où I_w est l'ensemble des paires (u, v) de mots de la forme :

▶ $u = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$

▶ $v = a_{j_1} \cdots a_{j_q}$ avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$

où $\{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$ et

$\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \emptyset$.

Shuffle sur le monoïde libre

Shuffle : $\sigma : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}M^2$, pour $w = a_1 \cdots a_k$ et de taille k :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} u \otimes v$$

Où I_w est l'ensemble des paires (u, v) de mots de la forme :

▶ $u = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$

▶ $v = a_{j_1} \cdots a_{j_q}$ avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$

où $\{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$ et

$$\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \emptyset.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \sigma(abaa) = & ab \otimes aa + 2aba \otimes a + abaa \otimes \varepsilon + 2aa \otimes ba + aaa \otimes b \\ & + aa \otimes ab + 2a \otimes aba + \varepsilon \otimes abaa + 2ba \otimes aa + b \otimes aaa \end{aligned}$$

Théorème

Le shuffle est coassociatif.

Définition inductive du shuffle

- ▶ $\sigma(w \cdot w') = \sum_{\substack{(u,v) \in I_w \\ (u',v') \in I_{w'}}} u \cdot u' \otimes v \cdot v' = \sigma(w) \cdot \sigma(w')$
- ▶ $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$
- ▶ $\sigma(a) = \varepsilon \otimes a + a \otimes \varepsilon$

$$(u \otimes v) \cdot (u' \otimes v') = (u \cdot u') \otimes (v \cdot v')$$

Règles et portes

Portes :

unité



lettres



Concaténation

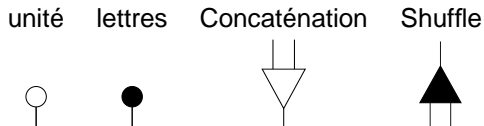


Shuffle

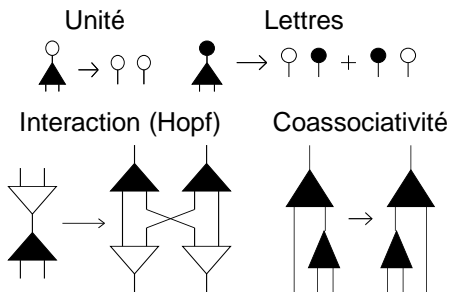


Règles et portes

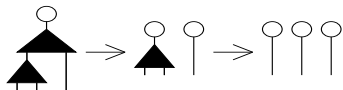
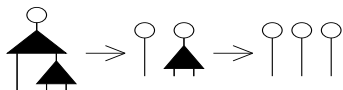
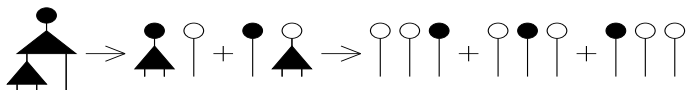
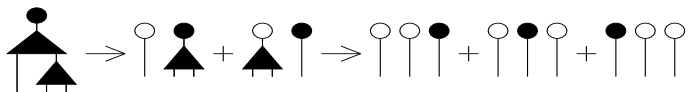
Portes :



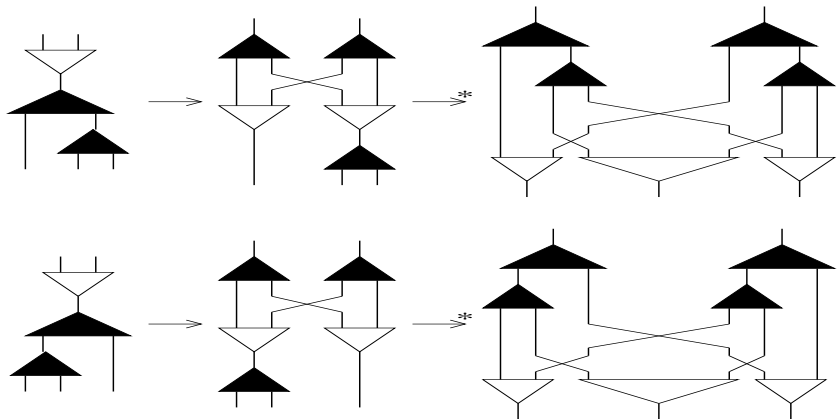
Règles :



Preuve



Preuve



Théorème

Le shuffle est co-commutatif :

Théorème

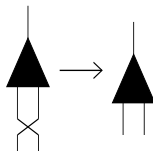
Le shuffle est co-commutatif :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} v \otimes u$$

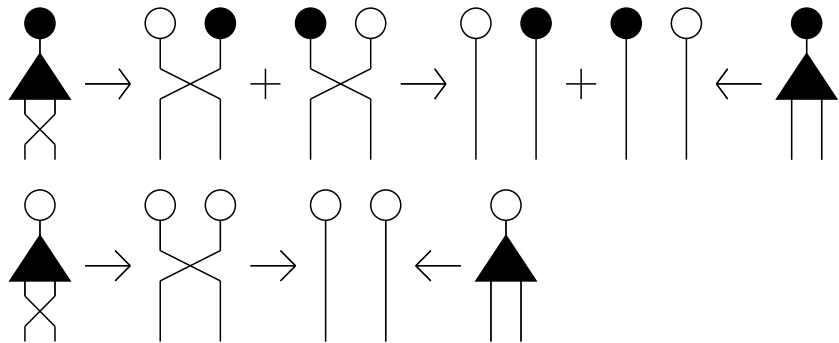
Théorème

Le shuffle est co-commutatif :

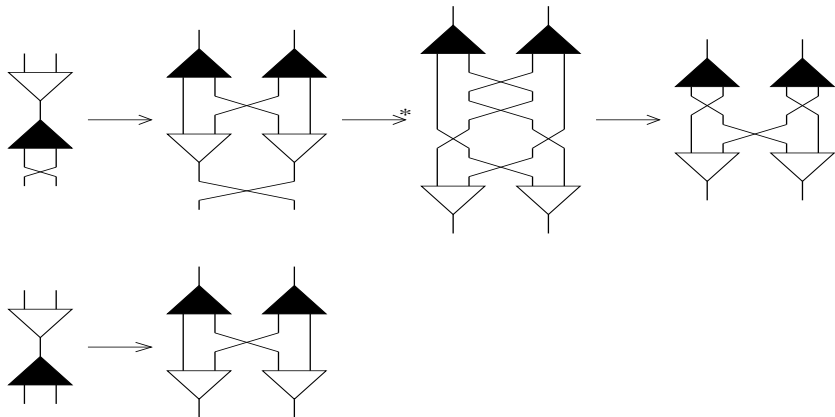
$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} v \otimes u$$



Preuve



Preuve



Autres règles

