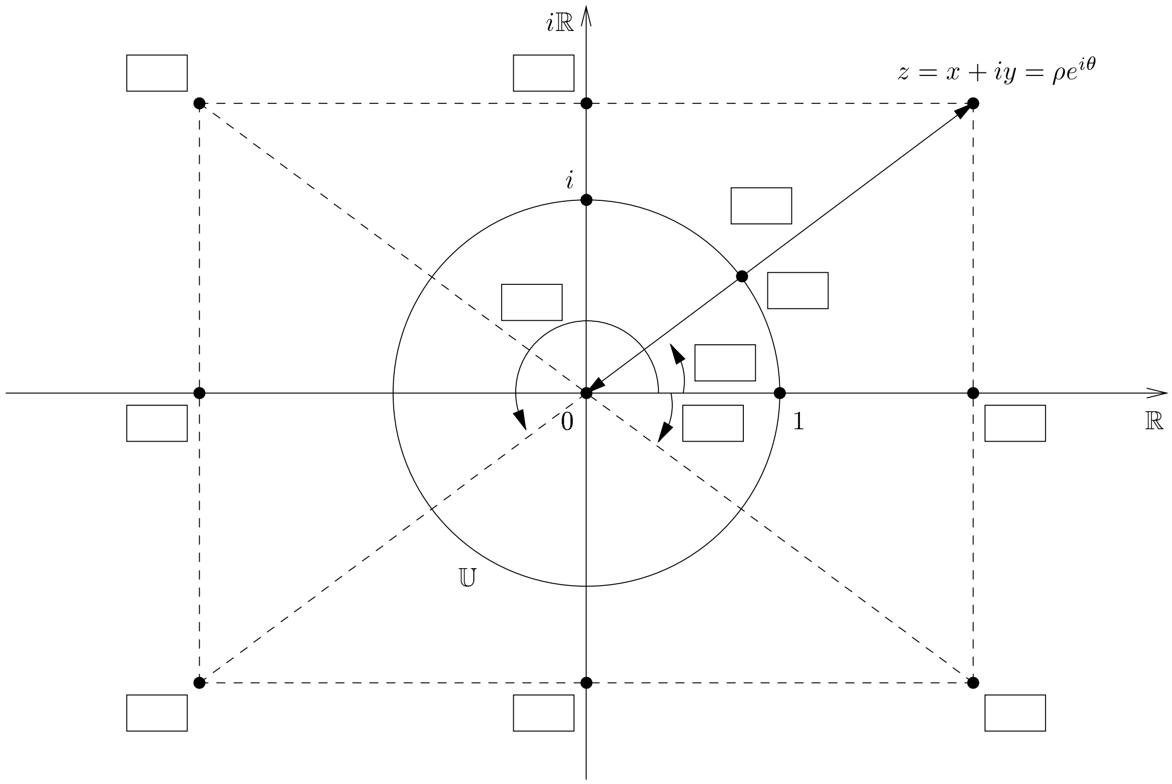
A Exercices sur les complexes

Exercice A1. Compléter la figure en remplissant chaque case par une affixe, un angle, ou une distance.



Exercice A2. Calculer les racines carrées des complexes suivants : $3+4i$, $3-4i$, $-3-4i$.

Exercice A3. Si $\pm v$ sont les racines carrées de z, quelles sont celles de $\overline{z}$ et celles de $-z$?

Exercice A4. Résoudre l'équation $z(z+\sqrt{3}) = i$.

Exercice A5. Si $\rho e^{i\theta}$ est la forme trigonométrique de z, quelle est celle de $-2iz$?

Exercice A6. Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

Exercice A7. Calculer $(1+i)^{2000}$. [*Utiliser la forme trigonométrique.*]

Exercice A8. Si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose $z \bmod 5 = x \bmod 5 + i(y \bmod 5)$.

1. Pour $z = 3+4i$, calculer $z \bmod 5$, $z^2 \bmod 5$, puis $z^n \bmod 5$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $u = \frac{3+4i}{5}$ est sur le cercle unité mais n'est pas une racine de l'unité.

Exercice A9. Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$.

1. Exprimer $\mathfrak{Re}(z^5)$ en fonction de x et y, puis en fonction de x seul.
2. Si on suppose que $z^{10} = -1$, quelles sont les valeurs possibles de x ?
3. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$. [*Comparer* $\cos\frac{\pi}{10}$ *avec* $\cos\frac{\pi}{4}$.]

Exercice A10. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, combien y a-t-il de $v \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(v) = z$? f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Pour $z = \rho e^{i\theta}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de ρ et θ.
3. Etant donné $r > 0$ tel que $r \neq 1$, trouver $a, b > 0$ tels que, lorsque z décrit le cercle de centre 0 et de rayon r, alors $f(z) = x + iy$ décrit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
4. Quel est l'ensemble des $f(z)$ lorsque z décrit le cercle unité ?

B Exercices sur les dérivées

Exercice B1. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction paire (respectivement impaire) ? Donner des exemples de ces deux situations. [*Calculer la dérivée de la fonction* $g(x) = f(-x)$.]

Exercice B2. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction périodique ? Donner un exemple.

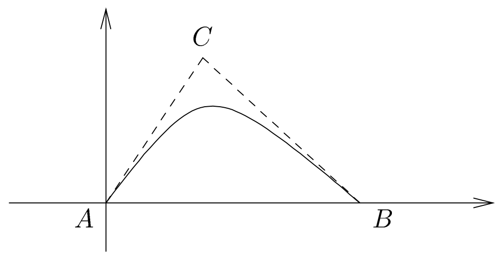
Exercice B3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}.$$

Exercice B4. Sachant que le prix HT du chocolat passe de 10€ à 10,1€ et que la TVA passe de 18% à 20%, de combien augmente le prix TTC du chocolat ? [*On pourra donner une valeur exacte et une valeur approchée en utilisant les règles de différentiation.*]

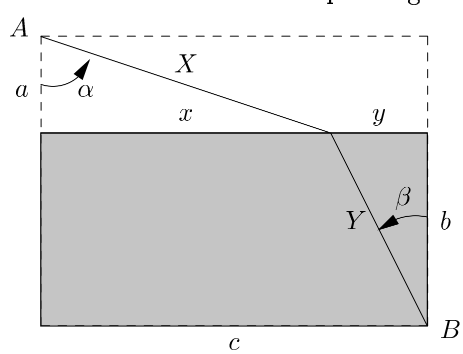
Exercice B5. Le chemin qui monte de la mer au col de Sugiton a une pente qui varie entre 3% et 5%. Sa longueur (horizontale) est de 4km. Que peut-on dire de la hauteur du col ?

Exercice B6. Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(0,0)$, $(5,0)$ et $(2,3)$. Construire une fonction f dont le graphe est tangent à la droite AC au point A et à la droite BC au point B.



[*Chercher* f *sous la forme* $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.]

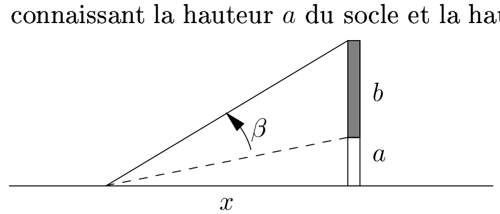
Exercice B7. Un maître nageur A (sur la plage) doit rejoindre une baigneuse en perdition B (dans l'eau) au plus vite. On sait qu'il court à la vitesse constante λ et qu'il nage à la vitesse constante μ.



1. Exprimer la durée totale t de son parcours en fonction des distances X, Y et des vitesses λ, μ.
2. Exprimer X^2 en fonction de x et a, puis Y^2 en fonction de y et b.
3. Exprimer c en fonction de x et y.
4. Différentier les 4 équations obtenues.
5. Exprimer $\sin\alpha$ en fonction de x et X, puis $\sin\beta$ en fonction de y et Y.
6. Sachant que la durée t est minimale, exprimer le rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ en fonction de λ et μ.

[λ, μ, a, b, c *sont des constantes, alors que* x, y, X, Y *dépendent du choix du parcours.*]

Exercice B8. La Statue de la Liberté est posée sur un socle. Quelle est la distance x qui permet de la voir avec un angle β maximal, connaissant la hauteur a du socle et la hauteur b de la statue ?



Que se passe-t-il si on enlève le socle ? ou si on remplace la statue par un nain de jardin ?

C Exercices sur les intégrales

Exercice C1. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos x \sin^2 x, \qquad f_2(x) = \tan x, \qquad f_3(x) = xe^{x^2}, \qquad f_4(x) = \tfrac{1}{1+x}, \qquad f_5(x) = \tfrac{x}{1+x^4}.$$

Exercice C2. Donner une primitive de la fonction $f(x) = b^x$ pour $b > 0$.

Exercice C3. On pose $f(x) = |x|$.

1. Calculer $\int_0^a |x| \,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{-a} |x| \,\mathrm{d}x$ pour $a \geqslant 0$.
2. Donner une primitive de f.

Exercice C4. Soit $f(x) = 1 + \cos x$.

1. Donner une primitive de f et dresser son tableau de variation.
2. Une fonction périodique a-t-elle toujours une primitive périodique ?

Exercice C5. Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x$ et $B = \int_{-a}^a f(x) \,\mathrm{d}x$.

1. Que peut-on dire de B si f est paire ? Donner un exemple de cette situation.
2. Même question pour f impaire.
3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2001} x \,\mathrm{d}x$.

Exercice C6. Sachant que $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$, montrer que $\ln xy = \ln x + \ln y$. [*Utiliser la relation de Chasles et faire un changement de variable.*]

Exercice C7. Soit f une application dérivable et croissante de $[0, a]$ vers $[0, b]$, et soit g sa réciproque. Exprimer $\int_0^b g(y) \,\mathrm{d}y$ en fonction de $\int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. [*Faire le changement de variable $y = f(x)$ et intégrer par parties.*]

Exercice C8. On gonfle un ballon sphérique : à l'instant t, son rayon est $r = R(t)$, sa surface est $s = S(t)$, et son volume est $v = V(t)$. On suppose que $R(0) = 0$ et $R(1) = a$. On admet que la variation du volume est donnée par $\mathrm{d}v = s \,\mathrm{d}r$. Sachant que l'aire de la sphère de rayon r est $4\pi r^2$, calculer $V(1)$, c'est-à-dire le volume de la boule de rayon a. [*Faire le changement de variable $r = R(t)$ dans l'intégrale $\int_0^1 V'(t) \,\mathrm{d}t$.*]

Exercice C9. On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$. [$\cos^n t = (1 - \sin^2 t) \cos^{n-2} t$].
3. En déduire que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Calculer $W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

On appelle ces intégrales les intégrales de Wallis. Leur calcul permet, entre autres, de prouver la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, c'est-à-dire d'approximer $n!$ pour n grand.

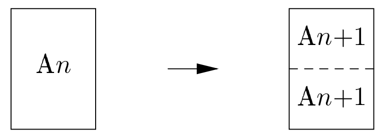
D Exercices sur la dynamique discrète et continue

Exercice D1. Sachant que $u_0 = 2$, calculer u_1, u_2 et donner une formule pour u_n dans chacun des cas suivants :

$$u_{n+1} = 3u_n, \qquad u_{n+1} = 4u_n - 1, \qquad u_{n+1} = u_n + 3.$$

Exercice D2. Sachant que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2^{u_n}$, calculer $u_1, \ldots, u_6$. Existe-t-il une formule pour u_n ?

Exercice D3. Le *format ISO* est défini de la façon suivante : un rectangle de format An se décompose en 2 rectangles de format An+1 ; tous les formats ont la même proportion ; l'aire du format A0 est $1\,\mathrm{m}^2$.



Donner les dimensions et l'aire du format An. En déduire les dimensions et l'aire du format A4.

Exercice D4. Sachant que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, calculer u_2, u_3, u_4 et donner une formule pour u_n dans chacun des cas suivants :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 1, \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1,$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n + 1, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1.$$

Exercice D5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans quels cas la suite u_n définie par $u_{n+1} = au_n + b$ admet-elle une limite finie ? Laquelle ?

Exercice D6. On suppose que $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$. Calculer la somme $\Sigma_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de u_0, u_1 et n.

Exercice D7. Intégrer $2y' + 3y = 0$ et trouver la solution telle que $f(-2) = 2$ (respectivement $f'(-2) = 3$).

Exercice D8. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' - 2y = 3x, \qquad y' - 2y = e^{-3x}, \qquad y' - 2y = e^{2x}, \qquad y' - 2y = \cos 3x.$$

[*Utiliser la méthode de la variation de la constante, ou bien chercher une solution particulière de la forme* $\lambda x + \mu$ *(respectivement* λe^{-3x}, $\lambda x e^{2x}$, $\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$*).*]

Exercice D9. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' + 2y = e^x + e^{2x} + e^{3x}, \quad y' - 3y = (x^2 - x)e^{-3x}, \quad y' - 3y = (x^2 - x)e^{3x}, \quad y' + 4y = \cos 2x - \sin 3x.$$

Exercice D10. Intégrer $2y'' + 3y' = 0$.

Exercice D11. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad \frac{y''}{4} = y' - y, \qquad 4y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Dans chaque cas, donner la solution telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ (respectivement $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$).

Exercice D12. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 2y = e^{3x}, \qquad y'' + y' - 2y = x^2, \qquad y'' + y' - 2y = \cos x, \qquad y'' + y' - 2y = e^x,$$

$$\frac{y''}{4} - y' + y = e^{2x}, \qquad 4y'' + 4y' + 5y = e^x, \qquad y'' + y = \cos 2x, \qquad y'' + y = \cos x.$$

Exercice D13. Intégrer $y' - y = \cos x e^x$. [*Utiliser la formule d'Euler.*]

Exercice D14. Intégrer $y' - \frac{y}{x} = x^3 + x^2 - x$. [*Faire le changement de variable $y = zx$.*]

Exercice D15. La quantité u d'un élément radioactif est solution d'une équation différentielle de la forme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -au$. La *demie-vie* d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demie-vie de l'uranium 238 est de $4,5\,10^9$ ans. Calculer la constante a en fonction de la demie-vie. Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de 1% ?

Exercice D16. Dans une maison en granit, l'uranium radioactif se désintègre en émettant un gaz, le radon, qui est lui-même radioactif. L'évolution de la quantité u d'uranium et de la quantité v de radon en fonction du temps t est donc décrite par les équations $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -au$ et $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv - c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, où a, b et c sont des constantes positives et $a < b$. Connaissant la quantité d'uranium u_0 et la quantité de radon $v_0 = 0$ à l'instant 0, donner une formule exprimant v en fonction de t pour $t \geqslant 0$. Dessiner le tableau de variation de cette fonction en précisant la valeur maximale de v ainsi que sa dérivée en 0. Sachant que la demie-vie du radon est notablement plus courte que celle de l'uranium ($3,8$ jours seulement), en déduire une formule approchée pour v.

Exercice D17. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0, \qquad x^2y'' - xy' + y = 0.$$

[*Faire le changement de variable $x = \cos t$ (respectivement $t = \ln x$).*]

Exercice D18. Soient α, ω, Ω et φ quatre réels positifs donnés. Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \text{(oscillateur harmonique libre)}$$
$$y'' + \omega^2 y = cos\Omega x, \quad \text{(oscillateur harmonique forcé)}$$
$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = cos(\Omega x + \varphi), \quad \text{(oscillateur harmonique amorti et forcé)}$$

Exercice D19. Utilisation des complexes. Montrer si on pose $z = y + i\frac{y'}{\omega}$ alors l'équation de l'oscillateur harmonique libre ci-dessus est équivalente à l'équation linéaire homogène du 1-er ordre dans les complexes $z' + i\omega z = 0$. Intégrer cette équation dans les complexes et retrouver la solution réelle correspondante.

Exercice D20. Utilisation des complexes. Montrer que si on pose $y = \frac{z+\bar{z}}{2}$ l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti forcé ci-dessus est équivalente à $z'' + \alpha z' + \omega^2 z = e^{i(\Omega x + \varphi)}$. Intégrer cette équation dans les complexes et retrouver la solution réelle correspondante.

Exercice D21. Utilisation des complexes. Intégrer le système formé des deux équations différentielles réelles suivantes :

$$\begin{cases} y'' - \omega z' = 0, \\ z'' + \omega y' = b. \end{cases}$$

En posant $u = y + iz$, montrer que le système se réduit à l'équation linéaire inhomogène du 2-ième ordre dans les complexes $u'' + i\omega u' = ib$. Intégrer cette équation dans les complexes et retrouver la solution du système réel correspondant.

Exercice D22. Intégrer le système formé des deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + 2\omega^2 y = \alpha z' + \omega^2 z, \\ z'' + \alpha z' + 2\omega^2 z = \alpha y' + \omega^2 y. \end{cases}$$

[*Effectuer le changement de variables $u = y + z$ et $v = y - z$*].

E Exercices sur les dérivées partielles

On considère une fonction numérique f de deux variables réelles : son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et son graphe $\mathcal{G}_f$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. En fixant l'une des deux variables dans $f(x,y)$, par exemple $y = y_0$, on obtient une fonction $g(x) = f(x, y_0)$ d'une variable réelle. Si cette fonction est dérivable en x_0, on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0).$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de deux variables réelles est appelée ***dérivée partielle première de f par rapport à x***.

De même, on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ la ***dérivée partielle première de f par rapport à y***.

Exemple : pour $f(x,y) = xy^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$.

Exercice E1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = x, \qquad f_2(x,y) = y, \qquad f_3(x,y) = x+y, \qquad f_4(x,y) = xy, \qquad f_5(x,y) = x/y,$$

$$f_6(x,y) = x^y, \qquad f_7(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f_8(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dans chaque cas, on précisera le domaine de définition de la fonction et ceux de ses dérivées partielles. [*Rappel :* $x^y = e^{y \ln x}$.]

Exercice E2. On dit qu'une fonction f de deux variables réelles est ***symétrique*** si on a $f(x,y) = f(y,x)$.

1. Parmi les exemples ci-dessus, quelles sont les fonctions symétriques ?
2. Si f est symétrique, quelle relation existe entre les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$?

Si on dérive $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on obtient les ***dérivées partielles secondes*** de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y}.$$

Exemple : pour $f(x,y) = xy^2$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$.

Exercice E3. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions de l'exercice E.1. Dans ces exemples, quelle relation a-t-on entre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$?

Exercice E4. Calculer $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (*Laplacien* de f) pour $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.