Examen du 30 janvier 2004. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Calculer les racines cubiques (complexes) de 8 :

a. sous forme trigonométrique ;

b. sous forme algébrique.

Exercice 2. On pose $f(x) = \cos(\sin x)$.

a. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

b. En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x^2}$.

Exercice 3. Soit On note arcsin la réciproque de la bijection $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ et on pose $S = \displaystyle\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

a. Effectuer le changement de variable $x = \sin t$ dans S.

b. Calculer S. [*Intégration par parties.*]

Exercice 4. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x-6}{x-4}$.

a. Calculer les dérivées successives f' et f''.

b. Exprimer le domaine $\mathcal{D}_f$ comme une union d'intervalles disjoints.

c. Etudier la croissance et la convexité de f sur chacun de ces intervalles.

d. Calculer l'image de l'intervalle $I = [2,3[$ par f. [*Une justification est demandée ici.*]

On choisit $u_0 \in [2,3[$ et on définit la suite u_n par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$.

e. Montrer que $u_n \in [2,3[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$.

f. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on donnera la raison.

g. Calculer la limite de la suite v_n.

h. En déduire la limite de la suite u_n.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $y'' - 7y' + 10y = xe^{2x}$ (G).

a. Quelle est la forme générale des solutions de l'équation homogène associée (H) ?

b. Quelle est la solution $y = f(x)$ de (H) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$?

c. Quelle est la forme générale des solutions de l'équation (G) ?

d. Quelle est la solution $y = g(x)$ de (G) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$?