

TECHNIQUES DE CALCUL

Yves Lafont & Serge Lazzarini

DEUG MASS MF – MIAS – SM, année 2003 – 2004



Yves Lafont et Serge Lazzarini sont enseignants-chercheurs à la *Faculté des Sciences de Luminy*. L'un effectue sa recherche à l'IML (*Institut de Mathématiques de Luminy*) dans le domaine de la logique mathématique appliquée à l'informatique, et l'autre au CPT (*Centre de Physique Théorique*) dans le domaine de la géométrie appliquée à la physique.

Adresses électroniques : lafont@iml.univ-mrs.fr et sel@cpt.univ-mrs.fr

Site web : <http://iml.univ-mrs.fr/~lafont/mias/tc.html>

Avertissements

Les *exercices intégrés* sont une composante essentielle du cours. Certains seront résolus en cours magistral, et d'autres en séance de travaux dirigés, mais dans tous les cas, il est conseillé de les faire ou de les refaire soi-même. Les autres exercices seront distribués séparément : ils doivent permettre de se familiariser avec les notions et les méthodes du cours, et donc de réussir à l'examen. Il est conseillé de les préparer avant chaque séance de travaux dirigés.

Notations

En principe, une lettre, qu'elle soit minuscule ou majuscule, latine ou grecque, peut désigner un nombre, une fonction, un ensemble, ou tout autre objet mathématique. En fait, certaines lettres désignent des *constantes réelles* ou *complexes*, par exemple $e = 2,71828 \dots$, $\pi = 3,14159 \dots$, $\epsilon = 6,55957$, $i = \sqrt{-1}$, et $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. De même, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , et \mathbb{C} , désignent les ensembles de nombres usuels (*entiers naturels*, *entiers relatifs*, *rationnels*, *réels*, et *complexes*). Les autres lettres permettent de désigner des objets arbitraires. Nous utiliserons parfois le ' et le '' pour en fabriquer de nouvelles. Toutefois, si f est une fonction, f' sera toujours sa *dérivée*, et f'' sa *dérivée seconde*. De ce point de vue, la variable y d'une *équation différentielle* doit être considérée comme une fonction.

Nous utiliserons de préférence : n, m, p, q pour des *entiers* naturels ou relatifs ; r, s pour des *rationnels* ; x, y, z, t pour des *réels* ; z, u, v, w pour des *complexes* ; a, b, c, d pour des *paramètres* ; λ, μ, ν pour des *coefficients* ; u_n, v_n, w_n pour des *suites* ; f, g, h pour des *fonctions* ; F, G, H pour des *primitives* ; P, Q, R pour des *polynômes* ; X, Y, Z pour des *ensembles* ; I, J pour des *intervalles*.

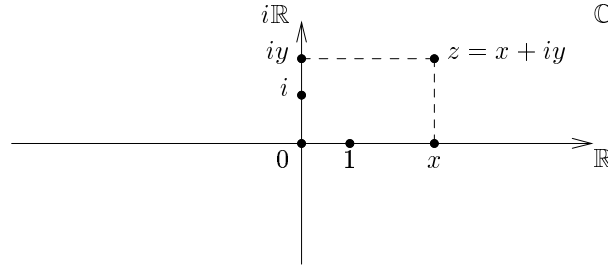
1 Complexes

1.1 Forme algébrique

Définition des *complexes* : un complexe z est la donnée de deux réels $x = \Re(z)$ (*partie réelle* de z) et $y = \Im(z)$ (*partie imaginaire* de z). On écrit alors $z = x + iy$. On a donc $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

Remarque : si $x + iy = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, alors $x = x'$ et $y = y'$ (*unicité de la forme algébrique*).

Interprétation géométrique : on représente $z = x + iy$ par le point d'*affixe* z , c'est-à-dire de coordonnées x et y dans le *plan*. Les ensembles \mathbb{R} , $i\mathbb{R}$, et \mathbb{C} sont appelés *axe réel*, *axe imaginaire*, et *plan complexe*.



Définition alternative : \mathbb{C} est l'ensemble des *matrices de similitudes* $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $i^2 = -1$ et on définit l'*addition*, l'*opposé*, la *soustraction*, et la *multiplication* des complexes en respectant les règles usuelles de l'algèbre. En particulier, on a $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.

Interprétation géométrique : l'opposé correspond à la *symétrie centrale* par rapport à l'origine, l'addition d'un complexe à une *translation*, et la multiplication par un complexe non nul à une *similitude*. En particulier, la multiplication par un réel non nul correspond à une *homothétie*.

Exercice 1. Montrer que $z^2 = -1$ si et seulement si $z = \pm i$.

1.2 Conjugué et module

Définition du *conjugué* et du *module* : si $z = x + iy$, on pose $\bar{z} = x - iy$ et $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Interprétation géométrique : la conjugaison correspond à la *symétrie orthogonale* par rapport à l'axe réel, et le module de z est la *distance euclidienne* entre l'origine et le point d'affixe z .

La conjugaison permet de calculer l'*inverse* : si $z = x + iy \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$. Par exemple, $\frac{1}{i} = \bar{i} = -i$. On peut aussi calculer le *quotient* $\frac{z}{z'}$ (exercice 2).

La conjugaison permet aussi de retrouver la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{i(\bar{z} - z)}{2}.$$

En particulier, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{z} = z$, et $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Quelques propriétés de la conjugaison :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{-z} = -\bar{z}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \quad \overline{1/z} = 1/\bar{z}, \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

Quelques propriétés du module :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |-z| = |z|, \quad |z| = 0 \text{ ssi } z = 0, \quad |zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad |\bar{z}| = |z|.$$

Définition du *cercle unité* : on note \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1.

Quelques propriétés du cercle unité :

$$1 \in \mathbb{U}, \quad \text{si } u, u' \in \mathbb{U} \text{ alors } uu' \in \mathbb{U}, \quad \text{si } u \in \mathbb{U} \text{ alors } \frac{1}{u} = \bar{u} \in \mathbb{U} \text{ et } -u \in \mathbb{U}.$$

Exercice 2. Quelle est la forme algébrique du quotient $\frac{z}{z'}$ pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$?

Exercice 3. Retrouver les propriétés de la conjugaison et du module à partir de leur définition.

Exercice 4. Quelle est l'interprétation géométrique de la fonction $f(z) = -\bar{z}$?

1.3 Racines carrées

Racines carrées d'un complexe : tout complexe non nul admet *deux racines carrées opposées*.

Calcul des racines carrées : si $c = a + ib$ avec $b \neq 0$, on cherche $v = x + iy$ tel que $v^2 = c$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$. Dans ce cas, on a aussi $x^2 + y^2 = |v|^2 = |v^2| = |c|$, si bien que $X = x^2$ et $Y = y^2$ sont les solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} X - Y = a, \\ X + Y = |c|. \end{cases}$$

Cela donne quatre possibilités pour $v = x + iy$, mais comme l'équation $2xy = b$ impose que x et y aient le même signe si $b > 0$, ou des signes différents si $b < 0$, il ne reste que deux solutions opposées.

Exemple : les racines carrées de $1 - i$ sont $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.

Exercice 5. Quelles sont les racines carrées de $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes et représenter toutes les solutions dans le plan complexe :

$$z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1.$$

1.4 Équations du second degré

Équation du second degré : si $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour *solutions* (ou *racines*) $\frac{-b \pm v}{2a}$ où $\pm v$ sont les racines carrées du *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta = 0$, alors $\frac{-b}{2a}$ est une *racine double*. Dans le cas où a, b, c sont *réels*, les racines sont *réelles* (si $\Delta \geq 0$) ou *conjuguées* (si $\Delta < 0$).

Remarque : si $b = 2b'$, les racines sont $\frac{-b' \pm v'}{a}$ où $\pm v'$ sont les racines carrées de $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = b'^2 - ac$.

Exemple : les racines de $z^2 + 2iz = 2 - i$ sont $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + 1 \right)$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - 1 \right)$.

Si α et β sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on a la *factorisation* $az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$. De plus, on a $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Exercice 7. Sachant que $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, retrouver les formules pour les racines α et β de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. [*Exprimer $(\alpha - \beta)^2$ en fonction de $(\alpha + \beta)^2$ et de $\alpha\beta$.*]

Exercice 8. Soit α une racine de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Montrer que cette racine est *double* si et seulement si elle est aussi racine de l'équation *dérivée* $2az + b = 0$.

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes et représenter toutes les solutions dans le plan complexe :

$$z^3 = 1, \quad z^6 = 1, \quad z^{12} = 1.$$

[Commencer par factoriser $z^3 - 1$.]

1.5 Exponentielle imaginaire

Définition de l'*exponentielle imaginaire* : si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Quelques propriétés de l'exponentielle imaginaire (pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$) :

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}, \quad e^{2i\pi} = e^0 = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i.$$

L'exponentielle imaginaire est périodique, de période 2π , et son *image* est le cercle unité (exercice 10).

On retrouve le cosinus et le sinus à partir de l'exponentielle imaginaire (*formules d'Euler*) :

$$\cos \theta = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{2}.$$

Si $u = e^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $u^n = e^{in\theta}$, d'où la *formule de Moivre* : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

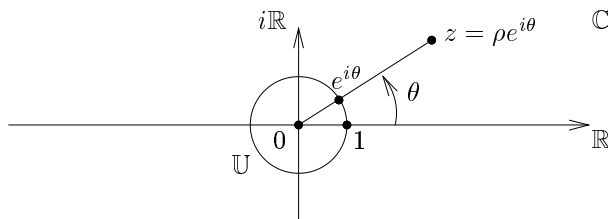
Exercice 10. Montrer que si $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. [*Utiliser la fonction arcsin.*]

Exercice 11. Retrouver les formules pour $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\cos(\theta + \theta')$, $\sin(\theta + \theta')$, $\cos \theta \cos \theta'$, $\sin \theta \sin \theta'$, et $\sin \theta \cos \theta'$ à partir des formules d'Euler.

1.6 Forme trigonométrique

Forme trigonométrique (ou exponentielle) : tout $z \in \mathbb{C}^*$ est de la forme $\rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, ρ est le *module* de z et θ s'appelle l'*argument* de z . Ce dernier est unique si on le choisit dans $[0, 2\pi[$. Sinon, il est défini *modulo* 2π . Autrement dit, pour $\rho, \rho' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Interprétation géométrique : ρ et θ sont les *coordonnées polaires* du point d'affixe z .



Règles de calcul (pour $\rho, \rho' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$) :

$$|\rho e^{i\theta}| = \rho, \quad \rho e^{i\theta} \rho' e^{i\theta'} = \rho \rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}, \quad -\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\pi)}, \quad \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}.$$

Remarque : il n'y a pas de règle simple pour calculer la forme trigonométrique de $\rho e^{i\theta} + \rho' e^{i\theta'}$.

Interprétation géométrique : la multiplication par $e^{i\theta}$ correspond à la *rotation* d'angle θ . La multiplication par $\rho e^{i\theta}$ correspond donc à la composée de l'*homothétie* de rapport ρ et de la rotation d'angle θ .

Exercice 12. Quelle est la forme trigonométrique du quotient $\frac{z}{z'}$ pour $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$?

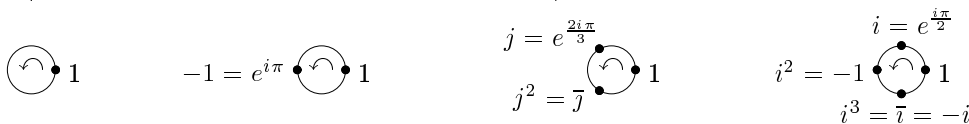
Exercice 13. Retrouver les règles de calcul à partir des propriétés de l'exponentielle imaginaire.

1.7 Racines n-ièmes

Si $n \geq 1$ est un entier, une *racine n-ième* de $z \in \mathbb{C}$ est un complexe v tel que $v^n = z$.

Racines n-ièmes de l'unité : 1 admet n racines n -ièmes distinctes $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ où $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et c'est dans cet ordre qu'apparaissent les racines si on parcourt \mathbb{U} dans le *sens trigonométrique*.

Exemples (racines n -ièmes de l'unité pour $n = 1, 2, 3, 4$) :



S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que u est une racine n -ième de 1, on dit que u est une *racine de l'unité*.

Racines n-ièmes d'un complexe : tout complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$ admet n racines n -ièmes distinctes $v, vu, vu^2, \dots, vu^{n-1}$ où $v = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta}{n}}$ et $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Interprétation géométrique : les racines n -ièmes de z s'obtiennent en appliquant une similitude aux racines n -ièmes de l'unité. Elles forment un *polygone régulier à n sommets*.

Exercice 14. À quelles conditions sur $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ le complexe $z = \rho e^{i\theta}$ est-il une racine de l'unité ?

Exercice 15. À partir des exercices 6 et 9, retrouver les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Exercice 16. Quelle est la somme des racines n -ièmes de z ?

1.8 Exponentielle complexe

Définition de l'*exponentielle complexe* : si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$.

Quelques propriétés de l'exponentielle complexe :

$$|e^z| = e^{\Re(z)}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{\bar{z}} = \overline{e^z}.$$

Exercice 17. Étant donné $c = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $e^z = c$ dans \mathbb{C} .

2 Ensembles et fonctions

2.1 Appartenance et inclusion

Appartenance : on écrit $x \in X$ si x est un élément de X . Par exemple, $\sqrt{2} \in]1, 2[$.

Définition d'un ensemble en *extension* : $\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble dont les seuls éléments sont x_1, \dots, x_n . En particulier, $\{x\}$ est le *singleton* x , et $\emptyset = \{\}$ est l'*ensemble vide*.

Dans une telle définition, l'ordre ne compte pas, ni les répétitions. Par exemple, $\{0, 1\} = \{1, 0\} = \{0, 0, 1\}$.

Définition d'un ensemble en *compréhension* : si P est une *propriété*, $\{x \in X \mid P(x)\}$ est l'ensemble des $x \in X$ qui satisfont P .

Exemple : $]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ est l'intervalle ouvert borné par 0 et 1.

De même, si f est une *fonction*, $\{f(x) \mid x \in X\}$ est l'ensemble de tous les $f(x)$ pour $x \in X$.

Exemple : $\pi\mathbb{Z} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des multiples entiers de π .

Inclusion : on écrit $X \subset Y$ si tout élément de X est un élément de Y . On dit alors que X est une *partie* de Y ou un *sous-ensemble* de Y . Par exemple, $]0, 1[\subset [0, 1]$.

Quelques propriétés de l'inclusion :

$$\emptyset \subset X, \quad X \subset X, \quad \text{si } X \subset Y \text{ et } Y \subset Z \text{ alors } X \subset Z, \quad \text{si } X \subset Y \text{ et } Y \subset X \text{ alors } X = Y.$$

Si $X \subset Y$ et $Y \not\subset X$, on dit que l'inclusion $X \subset Y$ est *stricte*.

Exemple : l'inclusion $]0, 1[\subset [0, 1]$ est stricte, car $0 \in [0, 1]$ et $0 \notin]0, 1[$.

On peut aussi avoir $X \not\subset Y$ et $Y \not\subset X$. On dit alors que X et Y sont *incomparables* pour l'inclusion.

Exemple : $[0, 1[$ et $]0, 1]$ sont incomparables pour l'inclusion.

Exercice 18. Si $a < b$ et $c < d$, à quelle condition a-t-on $]a, b[\subset]c, d[$? Dans quels cas l'inclusion est-elle stricte? À quelle condition $]a, b[$ et $]c, d[$ sont-ils incomparables?

2.2 Union, intersection, et complémentaire

Définition de l'*union* et de l'*intersection* : on note $X \cup Y$ l'ensemble des éléments qui sont dans X ou dans Y (éventuellement dans les deux), et $X \cap Y$ l'ensemble des éléments qui sont dans X et dans Y .

Exemples : $] -\infty, 0] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$ et $] -\infty, 0] \cap [0, +\infty[= \{0\}$.

Si $X \cap Y = \emptyset$, c'est-à-dire si X et Y n'ont pas d'élément commun, on dit que X et Y sont *disjoints*. Dans ce cas, on dit que l'*union* $X \cup Y$ est *disjointe*.

Exemples : l'union $\mathbb{R} =] -\infty, 0] \cup [0, +\infty[$ n'est pas disjointe, mais l'union $\mathbb{R} =] -\infty, 0] \cup [0, +\infty[$ l'est.

Définition de l'*union infinie* et de l'*intersection infinie* : si X_n est un ensemble défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ l'ensemble des éléments qui sont dans *au moins* un X_n , et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ l'ensemble des éléments qui sont dans *tous* les X_n .

Exemples : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}] -n, n[= \mathbb{R}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[= \{0\}$.

Si les X_n sont *disjoints deux à deux*, on dit que l'*union* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est *disjointe*.

Dans ces définitions, on peut remplacer \mathbb{N} par \mathbb{Z} (exercice 20).

Définition du *complémentaire* : si $Y \subset X$, on note $X \setminus Y$ l'ensemble des éléments de X qui *ne sont pas* dans Y , c'est-à-dire $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$.

Exemple : $\mathbb{R} \setminus]0, 1[=] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

Notation : si $0 \in X$, on pose $X^* = X \setminus \{0\}$. Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Exercice 19. Si $a < b$ et $c < d$, que peut-on dire de $]a, b[\cap]c, d[$?

Exercice 20. Que peut-on dire de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$? Même question pour $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$.

2.3 Intervalles

Un *intervalle* est une partie I de \mathbb{R} telle que si $x, y \in I$ et $x < z < y$, alors $z \in I$.

Exemples : $]0, 1[$ est un intervalle, car si $0 < x, y < 1$ et $x < z < y$, alors $0 < z < 1$. L'ensemble vide est aussi un intervalle, mais \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle, car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$, $-1 < 0 < 1$, et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Si I est un intervalle, on appelle *bord* de I l'ensemble ∂I des éléments de I qui sont des bornes de I , et on appelle *intérieur* de I le complémentaire $I^\circ = I \setminus \partial I$.

Exemples : on a $\partial]0, 1[= \emptyset$, $\partial]0, 1[= \{0\}$, $\partial]0, 1[= \{0, 1\}$, et $]0, 1[^\circ =]0, 1[^\circ =]0, 1[^\circ =]0, 1[$.

On dit que deux intervalles non vides I et J sont *séparés* si l'ensemble $I \cup J$ n'est pas un intervalle, c'est-à-dire s'il existe z tel que $x < z$ pour tout $x \in I$ et $z < y$ pour tout $y \in J$, ou vice-versa.

Exemples : $]0, 1[$ et $]1, 2[$ sont séparés par 1, mais $]0, 1[$ et $]1, 2[$ ne sont pas séparés, car $]0, 1[\cup]1, 2[=]0, 2[$.

Les notions de *bord* et d'*intérieur* s'étendent naturellement aux unions d'intervalles séparés deux à deux.

Exemple : si $X =]0, 1[\cup]2, +\infty[$, alors $\partial X = \{1, 2\}$ et $X^\circ =]0, 1[\cup]2, +\infty[$.

Exercice 21. Quels sont les intervalles de \mathbb{R} ? [Il y a 11 types d'intervalle.]

Exercice 22. Pour chaque type d'intervalle I , exprimer l'ensemble $\mathbb{R} \setminus I$ comme un intervalle ou comme l'union de deux intervalles séparés.

Exercice 23. Si $a < b$ et $c < d$, à quelle condition les intervalles $]a, b[$ et $]c, d[$ sont-ils séparés ? Même question pour $[a, b[$ et $[c, d[$.

Exercice 24. Exprimer $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme une union infinie d'intervalles séparés deux à deux.

Exercice 25. Montrer que l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.

2.4 Produit cartésien

Définition du *produit cartésien* : on note $X \times Y$ l'ensemble des *couples* (x, y) pour $x \in X$ et $y \in Y$. Plus généralement, on note $X_1 \times \cdots \times X_n$ l'ensemble des *n-uplets* (x_1, \dots, x_n) pour $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Dans le cas où $X_1 = \cdots = X_n = X$, on note cet ensemble X^n .

Exemples : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels (x, y) , qu'on identifie avec les points du plan, et $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des *triplets* de réels (x, y, z) , qu'on identifie avec les points de l'espace.

Dans un *n-uplet*, l'ordre et les répétitions comptent. Par exemple, $(0, 1)$, $(1, 0)$, et $(0, 0, 1)$ sont distincts.

Exercice 26. Si $a < b$ et $c < d$, quelle est l'interprétation géométrique des ensembles $X = [a, b] \times [c, d]$ et $Y = [a, b] \times \{c\} \cup \{b\} \times [c, d] \cup [a, b] \times \{d\} \cup \{a\} \times [c, d]$? Quelle relation a-t-on entre X et Y ?

2.5 Domaine de définition et graphe

On considère une fonction f à *variable réelle* et à *valeur réelle*. Autrement dit, $f(x)$ est un réel défini pour certaines valeurs de $x \in \mathbb{R}$. On dit alors que f est une *fonction numérique*.

Définition du *domaine de définition* : on note \mathcal{D}_f l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ est défini.

Exemples : pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, et pour $g(x) = \frac{1}{\sin x}$, on a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n\pi, (n+1)\pi[$.

Définition du *graphe* (ou de la *courbe*) : on pose $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$. C'est une partie de \mathbb{R}^2 .

Exemples : pour $f(x) = x^2$, on a $\mathcal{G}_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ (*parabole*), et pour $g(x) = \frac{1}{x}$, on a $\mathcal{G}_g = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ (*hyperbole*).

Exercice 27. Préciser le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = |x|, \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f_4(x) = \ln x, \quad f_5(x) = \tan x.$$

Exercice 28. Quelles sont les fonctions dont le graphe est une *droite* ?

2.6 Monotonie

On dit qu'une fonction numérique f est *croissante* sur l'ensemble $X \subset \mathcal{D}_f$ si elle est compatible avec l'ordre : autrement dit, si $x, y \in X$ et $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$. De même, on dit que f est *décroissante* sur X si elle inverse l'ordre : autrement dit, si $x, y \in X$ et $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$.



Enfin, on dit que f est *monotone* sur X si elle est croissante *ou* décroissante sur X .

On dit qu'une fonction numérique f est *strictement croissante* sur l'ensemble $X \subset \mathcal{D}_f$ si elle est compatible avec l'ordre *strict* : autrement dit, si $x, y \in X$ et $x < y$, alors $f(x) < f(y)$. De même, on a la notion de fonction *strictement décroissante*, et celle de fonction *strictement monotone*.



Remarque : la croissance stricte implique la croissance, et la décroissance stricte implique la décroissance.

Exemple : la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante (et donc strictement monotone) sur $]0, +\infty[$ ainsi que sur $] -\infty, 0[$, mais elle n'est pas monotone sur $\mathcal{D}_f =] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Exercice 29. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont monotones sur \mathbb{R} ?

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = |x|, \quad f_4(x) = x^2, \quad f_5(x) = x^3.$$

Exercice 30. Si f et g sont croissantes sur \mathbb{R} , qu'en est-il de $f + g$? Même question pour λf si $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.7 Image directe et image réciproque

Définition de l'*image directe* : si $X \subset \mathcal{D}_f$, on pose $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(]-1, 2]) = [0, 4[$.

Théorème : si $a < b$ et si f est *continue et strictement croissante* sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Les *fonctions usuelles* (voir chapitre 5) sont continues. Plus généralement, toute fonction définie par une formule à partir de fonctions continues est continue. Cette règle ne s'applique pas aux *fonctions définies par cas*. Par exemple, la fonction σ définie par $\sigma(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\sigma(x) = -1$ si $x < 0$ n'est pas continue.

Il y a une règle analogue pour chaque type d'intervalle : selon le cas, il faut remplacer les *valeurs* de f aux bornes de l'intervalle par les *limites* de f aux bornes de l'intervalle. Il y a des règles analogues pour le cas où f est décroissante : il suffit alors d'échanger les bornes.

Exemple : pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on a $f([1, 2]) = [\frac{1}{2}, 1]$, $f(]0, 1]) = [1, +\infty[$, et $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$.

Définition de l'*image réciproque* : si $Y \subset \mathbb{R}$, on pose $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in Y\}$.

Exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f^{-1}(]1, 2]) =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$.

Exercice 31. Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset, & f(X \cup Y) &= f(X) \cup f(Y), & f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, & f^{-1}(\mathbb{R}) &= \mathcal{D}_f, \\ f^{-1}(X \cup Y) &= f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y), & f^{-1}(X \cap Y) &= f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Exercice 32. Quelle relation a-t-on entre X et $f^{-1}(f(X))$? Même question pour Y et $f(f^{-1}(Y))$.

2.8 Applications

Si X et Y sont des ensembles, une *application de X vers Y* est la donnée d'une fonction f telle que si $x \in X$, alors $f(x)$ est défini et $f(x) \in Y$. On écrit alors $f : X \rightarrow Y$.

Exemples : toute fonction numérique f définit une application $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$. De même, une opération telle que l'addition définit une application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} . D'autre part, pour tout ensemble X , on a l'*application identité* $\text{id} : X \rightarrow X$ définie par $\text{id}(x) = x$.

On dit que deux applications $f, g : X \rightarrow Y$ sont *égales* si on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Par exemple, les applications $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = |x|$ sont égales.

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *injective* (ou que f est une *injection de X dans Y*) si tout élément de Y est l'image d'*au plus un* élément de X . Autrement dit, si $x, y \in X$ et $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$. Formulation alternative : si $x, y \in X$ et $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.

Remarque : toute fonction strictement monotone est injective.

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *surjective* (ou que f est une *surjection de X sur Y*) si $f(X) = Y$, c'est-à-dire si tout élément de Y est l'image d'*au moins un* élément de X . Autrement dit, si $y \in Y$ alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *bijective* (ou que f est une *bijection entre X et Y*) si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de Y est l'image d'*un et un seul* élément de X . Dans ce cas, f admet une unique *application réciproque* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, qui est aussi bijective et qui satisfait les propriétés suivantes :

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ (pour } x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \text{ (pour } y \in Y).$$

Exemple : l'exponentielle définit une bijection entre \mathbb{R} et $]0, +\infty[$, et sa réciproque est le logarithme.

Exercice 33. Pour chacune des applications suivantes, préciser lesquelles sont injectives, surjectives, ou bijectives. Dans le cas bijectif, donner la réciproque.

$$\begin{array}{llllll} f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} & f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & f_5 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto 0 & x \mapsto x & x \mapsto x & x \mapsto x + 1 & x \mapsto x + 1 & x \mapsto -x \\ \\ f_7 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & f_8 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} & f_9 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & f_{10} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} & f_{11} : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^* & \\ x \mapsto |x| & x \mapsto |x| & x \mapsto 2x & x \mapsto 2x & x \mapsto 1/x & \\ \\ f_{12} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^+ & f_{13} : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+ & f_{14} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ & f_{15} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ & f_{16} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 & x \mapsto x^3 & \\ \\ f_{17} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & f_{18} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] & f_{19} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} & f_{20} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] & & \\ x \mapsto \sin x & x \mapsto \sin x & x \mapsto \sin x & x \mapsto \sin x & & \end{array}$$

Exercice 34. Étant donnés $a < b$, construire une bijection entre $]0, 1[$ et $]a, b[$.

2.9 Composition

Définition de la *composition* : étant données deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, on note $g \circ f$ l'application $h : X \rightarrow Z$ définie par $h(x) = g(f(x))$.

Exemple : si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est définie par $f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est définie par $g(x) = \sqrt{x}$, la composée $g \circ f$ est l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 35. Que peut-on dire de la composée de deux applications croissantes ? Même question pour les injections, les surjections, et les bijections.

Exercice 36. Montrer qu'entre deux intervalles ouverts non vides, c'est-à-dire de la forme $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, il existe toujours une bijection.

3 Calcul différentiel et intégral

3.1 Dérivée

Définition de la *dérivée* : si f est une fonction numérique et si x_0 est à l'intérieur de \mathcal{D}_f , on pose

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Si cette limite existe et si elle est *finie*, on dit que f est *dérivable en x_0* . En posant $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$, on obtient l'équation de la *tangente* $y = a + b(x - x_0)$, et le *développement limité à l'ordre 1* de f en x_0 :

$$f(x_0 + t) = a + bt + t\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

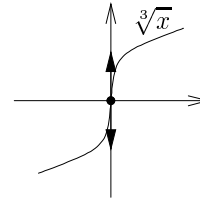
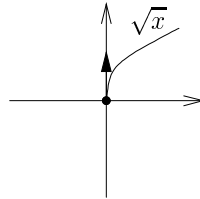
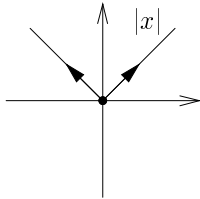
Exemple : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Si x_0 est sur le *bord* de \mathcal{D}_f , la dérivée de f en x_0 n'existe pas, mais selon le cas, on peut définir la *dérivée à droite* ou à *gauche* en x_0 : il suffit de remplacer $\lim_{x \rightarrow x_0}$ par $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ ou par $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$.

On dit que f est *dérivable* si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition.

Exemples : les *fonctions usuelles* (voir chapitre 5) sont dérivables, à quelques exceptions près :

- la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, car les dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas ;
- la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0, car la dérivée à droite est infinie ;
- la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0, car la dérivée est infinie.



Plus généralement, les fonctions construites à partir de la *valeur absolue*, du *maximum*, du *minimum*, ou de la *racine n-ième* présentent de telles *singularités*.

Règles de dérivation :

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

De plus, $f' = 0$ si f est constante et $f' = 1$ si f est l'application identité.

Exercice 37. Écrire le développement limité à l'ordre 1 : en 0 pour e^x , $\cos x$, $\sin x$; en 1 pour $\frac{1}{x}$, $\ln x$.

Exercice 38. Montrer que si $f(x_0 + t) = a + bt + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$, alors $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Exercice 39. À partir des règles de dérivation, retrouver les dérivées de λf , $-f$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$, f^{-1} .

3.2 Notation différentielle

Si f est une fonction, et si on pose l'équation $y = f(x)$, on écrit $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, ou encore $dy = f'(x) dx$.

Exemple : si on pose $y = \sin x$, on a $dy = \cos x dx$.

Règles de différentiation :

$$dz = dx + dy \text{ si } z = x + y, \quad dz = y dx + x dy \text{ si } z = xy, \quad dx = 0 \text{ si } x \text{ est constant.}$$

Exemple 1 : pour calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$, on pose $y = f(x) = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $xy = 1$. On a alors $y dx + x dy = 0$, d'où $dy = -\frac{y}{x} dx = -\frac{1}{x^2} dx$ et $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

Exemple 2 : pour calculer la dérivée de $h = g \circ f$, on pose $y = f(x)$ et $z = g(y) = h(x)$. On a alors $dz = g'(y) dy = g'(y) f'(x) dx = g'(f(x)) f'(x) dx$, d'où $h'(x) = \frac{dz}{dx} = g'(f(x)) f'(x)$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.

Autres notations utilisées en mathématiques ou en physique : $\frac{df}{dx}$ pour f' et \dot{y} pour $\frac{dy}{dt}$.

Exercice 40. À partir des règles de différentiation ainsi que des dérivées de l'exponentielle, du cosinus, et du sinus, retrouver les dérivées des fonctions x^2 , \sqrt{x} , $\ln x$, $\tan x$, $\arctan x$.

Exercice 41. À partir des règles de différentiation, retrouver les dérivées de $f + g$, fg , id , $\frac{f}{g}$, f^{-1} .

3.3 Variation

On suppose que $a < b$ et que f est une fonction *continue* sur $[a, b]$ et *dérivable* sur $]a, b[$.

Théorème de variation : si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(b) \geq f(a)$.

Dans cet énoncé, on peut remplacer \geq par $\leq, =, >, <$ (exercice 42). On en déduit que si f' est *positive* (respectivement *négative, nulle, strictement positive, strictement négative*) sur l'intervalle I , alors f est *croissante* (respectivement *décroissante, constante, strictement croissante, strictement décroissante*) sur I .

Réciproquement, si f est *croissante* (respectivement *décroissante, constante*) sur I , alors f' est *positive* (respectivement *négative, nulle*) sur I (exercice 43).

Théorème des accroissements finis : si $\lambda \leq f'(x) \leq \mu$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $\lambda \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \mu$.

Théorème de l'extremum : si f est dérivable sur l'intervalle I et si f admet un *maximum* ou un *minimum* en x_0 à l'intérieur de I , alors $f'(x_0) = 0$.



Remarque : ce théorème *ne s'applique pas* au cas où x_0 est sur le bord de I .

Exercice 42. À partir du théorème de variation, montrer chacune des variantes de ce théorème où \geq est remplacé par $\leq, =, >, <$. [Pour le cas de l'inégalité stricte, faire un raisonnement par l'absurde.]

Exercice 43. Montrer que si f est croissante et dérivable sur I , alors f' est positive sur I . Si f est strictement croissante, peut-on en déduire que f' est strictement positive? [Considérer $f(x) = x^3$.]

Exercice 44. À partir du théorème de variation, montrer le théorème des accroissement finis.

3.4 Dérivée seconde

Si f est dérivable en x_0 et si f' est dérivable en x_0 , on dit que f est *deux fois dérivable en x_0* . En posant $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$, et $c = \frac{f''(x_0)}{2}$, on obtient le *développement limité à l'ordre 2* de f en x_0 :

$$f(x_0 + t) = a + bt + ct^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Exemple : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Les développements limités permettent de *lever les indéterminations* dans certains calculs de limites.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Autres notations : $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour $f''(x)$ si on pose $y = f(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ pour f'' , et \ddot{y} pour $\frac{d^2y}{dt^2}$.

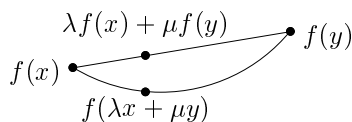
Exercice 45. Écrire le développement limité à l'ordre 2 : en 0 pour e^x , $\cos x$, $\sin x$; en 1 pour $\frac{1}{x}$, $\ln x$.

3.5 Convexité

On dit qu'une fonction numérique f est *convexe* sur l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ si on a la propriété suivante :

si $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in [0, 1]$ avec $\lambda + \mu = 1$, alors $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$.

En particulier $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. La convexité signifie que la courbe est toujours *en dessous de la corde* :



Si on remplace \leq par \geq dans la définition ci-dessus, on obtient la notion de *fonction concave*.

Critère de convexité : si f est dérivable sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I . Dans le cas où f est deux fois dérivable sur I , cela revient à dire que f'' est positive sur I .

Exercice 46. Montrer que si f' est croissante sur I , alors f est convexe sur I . [Étant donné $x \in I$, étudier les variations de $g(y) = \lambda f(x) + \mu f(y) - f(\lambda x + \mu y)$.]

Exercice 47. Montrer que f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I . En déduire le critère de concavité.

3.6 Primitives

Théorème d'intégration : si f est continue sur l'intervalle I , alors f est la dérivée d'une fonction F sur I .

Dans ce cas, on dit que F est une *primitive* de f sur I : elle est définie à *une constante près*. Autrement dit, si F_0 est une primitive de f sur I , les autres primitives sont de la forme $F_0 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemples (primitives à connaître) :

$f(x)$	1	x^a pour $a \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	e^x	$\cos x$	$\sin x$
$F(x)$	x	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln x $	$\arctan x$	e^x	$\sin x$	$-\cos x$

Quelques règles pour calculer des primitives :

- si f a pour primitive F et g a pour primitive G , alors $f + g$ a pour primitive $F + G$;
- si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f a pour primitive F , alors λf a pour primitive λF ;
- si g a pour primitive G , alors $f'(g \circ f)$ a pour primitive $G \circ f$.

Il n'y a pas de règle pour calculer une primitive de fg ou de $g \circ f$ à partir de primitives de f et de g .

Exercice 48. Préciser le domaine de définition de chaque fonction f et de sa primitive F dans le tableau ci-dessus. [*Traiter à part le cas de la fonction $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.*]

Exercice 49. Si f est dérivable, quelles sont les primitives de $f'f^a$, $\frac{f'}{f}$, $\frac{f'}{1+f^2}$, $f'e^f$, $f' \cos f$, $f' \sin f$?

3.7 Intégrale

Définition de l'intégrale : si f est continue sur $[a, b]$ ou sur $[b, a]$, on pose $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ ou sur $[b, a]$. Cette définition ne dépend pas du choix de la primitive.

Remarque : si f est continue sur l'intervalle I et si $a \in I$, alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = 0$.

Notation : on pose $\int_a^b dx = \int_a^b 1 dx = b - a$. De même, on pose $\int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$.

Quelques propriétés de l'intégrale :

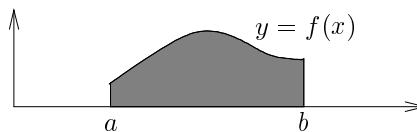
$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

De plus, si $a < b$ et si $f \geq 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Idem en remplaçant \geq par $\leq, =, >$, ou $<$.

Plus généralement, si $a < b$ et si $\lambda \leq f(x) \leq \mu$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $\lambda \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq \mu$.

Interprétation géométrique : si $a < b$ et si $f \geq 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les trois droites d'équations respectives $y = 0$, $x = a$, et $x = b$.



Interprétation *statistique* : $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ est la *valeur moyenne* de f entre a et b .

Intégration par parties : $\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$.

Exemple 1 : $\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = (x-1)e^x + 1$.

Exemple 2 : si $x > 0$ alors $\int_1^x \ln t dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt = (\ln x - 1)x + 1$.

Exemple 3 : $\int_0^x e^t \cos t dt = [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \sin t dt = [e^t \sin t]_0^x + [e^t \cos t]_0^x - \int_0^x e^t \cos t dt$. Il vient $2 \int_0^x e^t \cos t dt = e^x (\cos x + \sin x) - 1$, et donc $\int_0^x e^t \cos t dt = \frac{e^x (\cos x + \sin x) - 1}{2}$.

Exercice 50. À partir des règles de dérivation et du théorème de variation, retrouver les propriétés de l'intégrale et la règle d'intégration par parties.

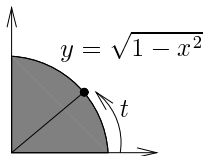
3.8 Changement de variable

Intégration par changement de variable : $\int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = \int_a^b g(f(t))f'(t) dt$.

En pratique, on pose $x = f(t)$ et on utilise la notation différentielle.

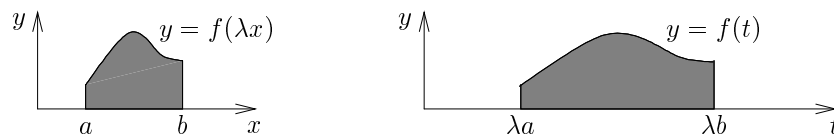
Exemple 1 : pour calculer $S = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, on pose $x = \cos t$. Alors x varie de 0 à 1 lorsque t varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Comme $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, et $dx = -\sin t dt$, il vient $S = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Interprétation géométrique : S est l'aire d'un quart de disque de rayon 1, et le changement de variable $x = \cos t$ consiste à paramétrer le quart de cercle par l'angle plutôt que par l'abscisse.



Exemple 2 : si $\lambda \neq 0$ alors $\int_a^b f(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(t) dt$ par le *changement de variable linéaire* $x = \frac{t}{\lambda}$.

Interprétation géométrique : le changement de variable $x = \frac{t}{\lambda}$ (ou $t = \lambda x$) consiste à faire subir au graphe de la fonction une *affinité orthogonale de rapport* λ .



Exercice 51. Retrouver la règle de changement de variable à partir des règles de dérivation.

Exercice 52. Calculer $S = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin t$.

3.9 Fonctions à valeur complexe

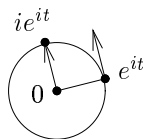
On dit que f est une *fonction à valeur complexe* si $f(t)$ est un complexe défini pour certaines valeurs de $t \in \mathbb{R}$. On a alors $f = g + ih$, c'est-à-dire $f(t) = g(t) + ih(t)$, où g et h sont des fonctions à valeur réelle.

Définition de la *dérivée d'une fonction à valeur complexe* : si $f = g + ih$ où g et h sont dérivables sur l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f est *dérivable sur* I , et on pose $f'(t) = g'(t) + ih'(t)$ pour tout $t \in I$.

Interprétation *cinématique* : si $f(t)$ est l'affixe d'un point mobile dans le plan à l'instant t , le vecteur défini par le point d'affixe $f'(t)$ est la *vitesse* de ce point mobile à l'instant t .



Exemple : pour $f(t) = e^{it}$, on a $f'(t) = if(t) = ie^{it}$ (*mouvement circulaire uniforme*).



Plus généralement, pour $f(t) = e^{ct}$ avec $c \in \mathbb{C}$, on a $f'(t) = cf(t) = ce^{ct}$ (exercice 53)

Les règles du calcul différentiel et intégral sont les mêmes que pour les fonctions à valeur réelle.

Exemple : $\int_0^x e^t \cos t dt = \int_0^x \frac{e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}}{2} dt = \left[\frac{e^{(1+i)t}}{2(1+i)} + \frac{e^{(1-i)t}}{2(1-i)} \right]_0^x = \left[\frac{e^t (\cos t + \sin t)}{2} \right]_0^x = \frac{e^x (\cos x + \sin x) - 1}{2}$.

Exercice 53. Pour $c = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée de $f(t) = e^{ct}$.

Exercice 54. Soit $c = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$. Montrer que $f(t) = e^{ct}$ décrit la *spirale logarithmique* d'équation $\rho = e^{\gamma\theta}$ (en coordonnées polaires) où γ est un réel qui s'exprime en fonction de a et b .

4 Dynamique discrète et continue

4.1 Suites définies par récurrence

Une suite peut être définie par une équation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ à partir de sa *valeur initiale* u_0 . On peut alors calculer successivement $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$, ...

Exemple 1 : $u_{n+1} = u_n + 2$ avec $u_0 = 3$. On obtient

$$u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 9, u_4 = 11, u_5 = 13, \dots, u_n = 2n + 3, \dots$$

Plus généralement, une équation de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ définit une *suite arithmétique de raison a*.

Exemple 2 : $u_{n+1} = 2u_n$ avec $u_0 = 3$. On obtient

$$u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, \dots, u_n = 3 \times 2^n, \dots$$

Plus généralement, une équation de la forme $u_{n+1} = au_n$ définit une *suite géométrique de raison a*.

Exemple 3 : $u_{n+1} = -u_n$ avec $u_0 = 1$. On obtient

$$u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = -1, u_4 = 1, u_5 = -1, \dots, u_n = (-1)^n, \dots$$

Cette suite géométrique est dite *2-périodique*, car on a $u_{n+2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus généralement, une suite u_n est dite *périodique* s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4 : $u_{n+1} = u_n^2$ avec $u_0 = 2$. On obtient

$$u_1 = 4, u_2 = 16, u_3 = 256, u_4 = 65536, u_5 = 4294967296, \dots, u_n = 2^{2^n}, \dots$$

Exercice 55. Si u_n est une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{C}$, que peut-on dire de la suite $v_n = e^{u_n}$?

Exercice 56. Si u_n est une suite géométrique de raison $a > 0$, que peut-on dire de la suite $v_n = \ln u_n$?

Exercice 57. Si u_n est la suite de l'exemple 4, que peut-on dire de la suite $v_n = \ln u_n$?

Exercice 58. Étant donnée une suite arithmétique u_n de raison a , calculer $u_0 + \dots + u_n$.

Exercice 59. Étant donnée une suite géométrique u_n de raison a , calculer $u_0 + \dots + u_n$ et $u_0 \dots u_n$.

Exercice 60. À quelle condition une suite géométrique de raison $a \in \mathbb{C}$ est-elle *périodique* ?

4.2 Récurrences linéaires du premier ordre

On étudie les suites définies par une équation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque l'application f est *linéaire*, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$, ou *affine*, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax + b$. On cherche une formule pour u_n en fonction de u_0 .

Équation homogène : $u_{n+1} = au_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} - au_n = 0$ (\mathbf{H}_1).

La formule est $u_n = u_0 a^n$ (*suite géométrique de raison a*).

Équation avec second membre constant : $u_{n+1} = au_n + b$, c'est-à-dire $u_{n+1} - au_n = b$ (\mathbf{G}_1).

Exemple 1 : $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $u_0 = 2$. On obtient

$$u_1 = 7, u_2 = 22, u_3 = 67, u_4 = 202, u_5 = 607, \dots, u_n = \frac{5 \times 3^n - 1}{2}, \dots$$

Remarque : si les suites u_n et v_n satisfont l'équation (\mathbf{G}_1), alors la suite $w_n = u_n - v_n$ satisfait l'équation homogène (\mathbf{H}_1). Autrement dit, $w_{n+1} = aw_n$, et donc $u_n = v_n + w_n = v_n + w_0 a^n$. On peut ainsi retrouver toutes les solutions de (\mathbf{G}_1) à partir d'une *solution particulière* de (\mathbf{G}_1).

On commence par rechercher une *solution particulière constante* $u_n = \gamma$: la formule est alors $u_n = \lambda a^n + \gamma$ où le coefficient λ se calcule à partir de u_0 . Dans le cas où $a = 1$, il n'y a pas de solution particulière constante : la formule est alors $u_n = u_0 + nb$ (*suite arithmétique de raison b*).

Exercice 61. Si u_n est une suite qui satisfait (\mathbf{G}_1) avec $a \neq 1$, quelle est la formule pour u_n ?

Exercice 62. Si u_n est une suite qui satisfait (\mathbf{G}_1), montrer que la suite $v_n = u_{n+1} - u_n$ satisfait une équation linéaire homogène. Exprimer u_n en fonction de v_0, \dots, v_{n-1} et retrouver la formule pour u_n .

4.3 Récurrences linéaires du second ordre

On étudie les suites définies par une équation de la forme $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ lorsque l'application f est *linéaire*, c'est-à-dire de la forme $f(x, y) = ax + by$, ou *affine*, c'est-à-dire de la forme $f(x, y) = ax + by + c$. À partir des *valeurs initiales* u_0 et u_1 , on peut calculer successivement $u_2 = f(u_0, u_1)$, $u_3 = f(u_1, u_2)$, $u_4 = f(u_2, u_3)$, ... On cherche une formule pour u_n en fonction de u_0 et u_1 .

Équation homogène : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, c'est-à-dire $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$ (\mathbf{H}_2).

Exemple 1 : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On obtient

$$u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, \dots, u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \dots$$

Exemple 2 : $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On obtient

$$u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = -1, u_5 = -1, u_6 = 0, u_7 = 1, \dots, u_n = \frac{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n}{i\sqrt{3}} = \frac{2 \sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \dots$$

Exemple 3 : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On obtient

$$u_2 = 2, u_3 = 0, u_4 = -8, u_5 = -16, u_6 = 0, u_7 = 64, \dots, u_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n}{2i\sqrt{3}} = \frac{2^n \sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \dots$$

Exemple 4 : $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On obtient

$$u_2 = 4, u_3 = 12, u_4 = 32, u_5 = 80, u_6 = 192, u_7 = 448, \dots, u_n = n2^{n-1}, \dots$$

On calcule le discriminant Δ et les racines α, β de l'équation caractéristique $z^2 - az - b = 0$ (\mathbf{C}_2) :

- si $\Delta \neq 0$, alors $\alpha \neq \beta$ et la formule est $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$;
- si $\Delta = 0$, alors $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$ et la formule est $u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n = \lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n$.

Dans les deux cas, les coefficients λ et μ se calculent à partir de u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

En général les coefficients a, b sont réels, et on cherche une formule pour les *solutions réelles* :

- si $\Delta \geq 0$ alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles s'obtiennent en prenant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- si $\Delta < 0$ alors $\beta = \bar{\alpha}$ et les solutions réelles s'obtiennent en posant $\mu = \bar{\lambda}$.

Dans le second cas, il y a des formules sans complexes : si on pose $\alpha = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, une formule alternative pour les solutions réelles est $u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (exercice 65). Ici encore, les coefficients λ et μ se calculent à partir de u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire. Une autre formule alternative est $u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta - \varphi)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, \pi[$ (exercice 66).

Remarque : on n'a pas toujours une formule simple pour l'argument θ comme dans les exemples 2 et 3.

Équation avec second membre constant : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$, c'est-à-dire $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = c$ (\mathbf{G}_2).

Exemple 5 : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 1$ avec $u_0 = u_1 = 0$. On obtient

$$u_2 = 1, u_3 = 6, u_4 = 25, u_5 = 90, u_6 = 301, u_7 = 966, \dots, u_n = \frac{3^n + 1}{2} - 2^n, \dots$$

Exemple 6 : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$ avec $u_0 = u_1 = 0$. On obtient

$$u_2 = 1, u_3 = 4, u_4 = 11, u_5 = 26, u_6 = 57, u_7 = 120, \dots, u_n = 2^n - n - 1, \dots$$

Exemple 7 : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$ avec $u_0 = u_1 = 0$. On obtient

$$u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 6, u_5 = 10, u_6 = 15, u_7 = 21, \dots, u_n = \frac{n(n-1)}{2}, \dots$$

Pour trouver la formule, on commence par rechercher une *solution particulière constante* $u_n = \gamma$. Si 1 est racine de l'équation (\mathbf{C}_2), c'est-à-dire si $a + b = 1$, on cherche une solution de la forme γn , et si 1 est racine double, c'est-à-dire si $a = 2$ et $b = -1$, on cherche une solution de la forme γn^2 . Dans tous les cas, les solutions de (\mathbf{G}_2) s'obtiennent en ajoutant cette solution particulière aux solutions de (\mathbf{H}_2), et les coefficients λ et μ se calculent à partir de u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exercice 63. Montrer que la suite α^n satisfait (\mathbf{H}_2) si et seulement si α est une racine de (\mathbf{C}_2).

Exercice 64. Montrer que la suite $n\alpha^n$ satisfait (\mathbf{H}_2) si et seulement si α est une racine double de (\mathbf{C}_2).

Exercice 65. Soit $\alpha = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Étant donné $\nu \in \mathbb{C}$, trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\nu\alpha^n + \bar{\nu}\bar{\alpha}^n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$. Réciproquement, exprimer ν en fonction de λ et μ .

Exercice 66. Étant donnés $\nu, \varphi \in \mathbb{R}$, trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\nu \cos(x - \varphi) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Étant donnés $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $\nu \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, \pi[$ tels que $\lambda \cos x + \mu \sin x = \nu \cos(x - \varphi)$.

4.4 Équations différentielles

Étant donnée une fonction h de deux variables réelles, on dit que $y = f(x)$ est *solution* de l'équation différentielle $y' = h(x, y)$ si on a $f'(x) = h(x, f(x))$. *Intégrer* cette équation, c'est trouver toutes ses solutions, qui sont des fonctions d'une variable réelle. En général, il suffit d'ajouter une *condition initiale* du type $f(x_0) = y_0$ pour avoir l'existence d'une solution et son unicité (sur un intervalle contenant x_0).

Exemple 1 : $y' = 2$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = 2x + 1$.

Plus généralement, l'équation $y' = a$ avec $f(x_0) = y_0$ définit la fonction $f(x) = y_0 + a(x - x_0)$.

Exemple 2 : $y' = x$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

Plus généralement, l'équation $y' = g(x)$ avec $f(x_0) = y_0$ définit la fonction $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$.

Exemple 3 : $y' = y$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = e^x$.

Plus généralement, l'équation $y' = ay$ avec $f(x_0) = y_0$ définit la fonction $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Exemple 4 : $y' = xy$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Exemple 5 : $y' = y^2$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-\infty, 1[$.

Exercice 67. Soient f et g deux applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telles que $f' = f$, $g' = g$, et $f(0) = g(0) = 1$. Montrer que $f(x)g(-x) = 1$ et en déduire que $f = g$.

4.5 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On étudie les *équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants*. On cherche une formule pour la solution $y = f(x)$ en fonction de la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Équation homogène : $y' = ay$, c'est-à-dire $y' - ay = 0$ (\mathbf{H}_1).

La formule est $y = \lambda e^{ax}$ où le coefficient λ se calcule à partir de la condition initiale.

Équation avec second membre : $y' = ay + g(x)$, c'est-à-dire $y' - ay = g(x)$ (\mathbf{G}_1).

Exemple 1 : $y' = y + x$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = 2e^x - x - 1$.

Exemple 2 : $y' = y + e^{3x}$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = \frac{e^{3x} + e^x}{2}$.

Exemple 3 : $y' = y + e^x$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = (x + 1)e^x$.

Exemple 4 : $y' = y + \cos x$ avec $f(0) = 1$. On obtient $y = \frac{3e^x + \sin x - \cos x}{2}$.

On commence par chercher une solution particulière $y = f_0(x)$, *sans tenir compte de la condition initiale* :

- par exemple, si $g(x)$ est un polynôme $P(x)$ de degré n , on cherche une solution $Q(x)$ du même type ;
- plus généralement si $g(x) = P(x)e^{bx}$ avec $b \neq a$, on cherche une solution du type $Q(x)e^{bx}$;
- si $g(x) = P(x)e^{ax}$, on cherche une solution du type $xQ(x)e^{ax}$;
- si $g(x) = P(x) \cos bx$ ou $g(x) = P(x) \sin bx$, on cherche une solution du type $Q(x) \cos bx + R(x) \sin bx$;
- si $g = g_1 + g_2$, on additionne une solution de $y' - ay = g_1(x)$ avec une solution de $y' - ay = g_2(x)$.

La formule est alors $y = \lambda e^{ax} + f_0(x)$ où le coefficient λ se calcule à partir de la condition initiale.

Méthode alternative (*variation de la constante*) : on pose $y = ze^{ax}$, c'est-à-dire $z = ye^{-ax}$. L'équation devient alors $z' = g(x)e^{-ax}$ et on obtient une solution de (\mathbf{G}_1) en multipliant une primitive de $g(x)e^{-ax}$ par e^{ax} . Cette méthode est particulièrement indiquée dans le cas où $g(x)$ est de la forme $h(x)e^{ax}$.

Remarque : si la fonction g est définie et continue sur \mathbb{R} , alors l'équation (\mathbf{G}_1) avec $f(x_0) = y_0$ a une unique solution définie sur \mathbb{R} (exercice 69). De plus, si $a \neq 0$, on peut remplacer la condition $f(x_0) = y_0$ par une condition initiale du type $f'(x_0) = z_0$.

Exercice 68. Parmi les 5 exemples de la section précédente, quelles sont les équations du type (\mathbf{H}_1) et celles du type (\mathbf{G}_1) ?

Exercice 69. Si la fonction g est définie et continue sur \mathbb{R} , quelle est la formule pour l'unique solution $y = f(x)$ de (\mathbf{G}_1) telle que $f(x_0) = y_0$? [Utiliser la méthode de la variation de la constante.]

4.6 Équations différentielles linéaires du second ordre

On étudie les *équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants*. On cherche une formule pour la solution $y = f(x)$ en fonction des conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Équation homogène : $y'' = ay' + by$, c'est-à-dire $y'' - ay' - by = 0$ (\mathbf{H}_2).

Interprétation *dynamique* : si $y = f(t) \in \mathbb{R}$ est la *position* d'un point mobile à l'instant t , alors y' est sa *vitesse* et y'' est son *accélération*. Dans l'*équation du mouvement* (\mathbf{H}_2), le terme by représente une *force attractive* (si $b < 0$) ou *répulsive* (si $b > 0$), et le terme ay' représente une *force de frottement* (si $a < 0$).

Exemple 1 : $y'' = -y$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$.

Exemple 2 : $y'' = -2y' - 2y$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = e^{-x} \sin x$.

Exemple 3 : $y'' = -3y' - 2y$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

Exemple 4 : $y'' = -2y' - y$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = xe^{-x}$.

On calcule le discriminant Δ et les racines α, β de l'*équation caractéristique* $z^2 - az - b = 0$ (\mathbf{C}_2) :

– si $\Delta \neq 0$, alors $\alpha \neq \beta$ et la formule est $y = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$;

– si $\Delta = 0$, alors $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$ et la formule est $y = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x} = \lambda e^{\alpha x} + \mu x e^{\alpha x}$ (*régime critique*).

Dans les deux cas, les coefficients λ et μ se calculent à partir des conditions initiales en résolvant un système linéaire.

En général, les coefficients a, b sont *réels*, et on cherche une formule pour les *solutions réelles* :

– si $\Delta \geq 0$ alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles s'obtiennent en prenant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (*régime aperiodique*) ;

– si $\Delta < 0$ alors $\beta = \bar{\alpha}$ et les solutions réelles s'obtiennent en posant $\mu = \bar{\lambda}$ (*régime pseudo-périodique*).

Dans le second cas, il y a des formules sans complexes : si on pose $\alpha = \gamma + i\omega$, avec $\gamma = \frac{a}{2}$ et $\omega > 0$, une formule alternative pour les solutions réelles est $y = e^{\gamma x}(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (exercice 72).

Ici encore, les coefficients λ et μ se calculent à partir des conditions initiales en résolvant un système linéaire. Une autre formule alternative est $y = \lambda e^{\gamma x} \cos(\omega x - \varphi)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, \pi[$.

Dans le cas où $a = 0$ et $b = -\omega^2 < 0$, on retrouve la formule $y = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ou encore $y = \lambda \cos(\omega x - \varphi)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, \pi[$ (*régime périodique*).

Remarque : si $a = 0$ et si $y = f(x)$ satisfait (\mathbf{H}_2), alors $y = f(-x)$ aussi.

Interprétation *dynamique* : en l'absence de frottement, le mouvement est *réversible*.

Équation avec second membre : $y'' = ay' + by + g(x)$, c'est-à-dire $y'' - ay' - by = g(x)$ (\mathbf{G}_2).

Exemple 5 : $y'' = -2y' - 2y + \cos x$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + e^{-x}(2 \sin x - \cos x)}{5}$.

Exemple 6 : $y'' = -y + \sin x$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = \frac{3 \sin x - x \cos x}{2}$.

Exemple 7 : $y'' = -2y' - y + e^{-x}$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On obtient $y = \frac{x(x+2)e^{-x}}{2}$.

On commence par chercher une solution particulière $y = f_0(x)$ comme pour (\mathbf{G}_1). Cas particuliers :

– si $g(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où α est une racine *simple* de (\mathbf{C}_2), on cherche une solution du type $xQ(x)e^{\alpha x}$;

– si $g(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où α est une racine *double* de (\mathbf{C}_2), on cherche une solution du type $x^2Q(x)e^{\alpha x}$;

– si $g(x) = P(x) \cos \omega x$ ou $g(x) = P(x) \sin \omega x$, et si $i\omega$ est une racine de (\mathbf{C}_2), on cherche une solution du type $x(Q(x) \cos \omega x + R(x) \sin \omega x)$.

Les solutions de (\mathbf{G}_2) s'obtiennent en ajoutant cette solution particulière aux solutions de (\mathbf{H}_2), et les coefficients λ et μ se calculent à partir des conditions initiales en résolvant un système linéaire.

Remarque : si la fonction g est définie et continue sur \mathbb{R} , alors l'équation (\mathbf{G}_1) avec $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$ a une unique solution définie sur \mathbb{R} . On peut aussi remplacer les conditions initiales par des *conditions aux limites* $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$, sauf dans le cas du régime périodique (exercice 73).

Exercice 70. Montrer que $y = e^{\alpha x}$ satisfait (\mathbf{H}_2) si et seulement si α est une racine de (\mathbf{C}_2).

Exercice 71. Montrer que $y = xe^{\alpha x}$ satisfait (\mathbf{H}_2) si et seulement si α est une racine double de (\mathbf{C}_2).

Exercice 72. Soit $\alpha = \gamma + i\omega$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$. Étant donné $\nu \in \mathbb{C}$, trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\nu e^{\alpha x} + \bar{\nu} e^{\bar{\alpha} x} = e^{\gamma x}(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x)$. Réciproquement, exprimer ν en fonction de λ et μ .

Exercice 73. À quelle condition (\mathbf{H}_2) admet-elle une solution $y = f(x)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$?

5 Annexe : fonctions usuelles

5.1 Valeur absolue et distance

Définition de la *valeur absolue* : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Définitions alternatives (à partir du *maximum* ou de la *racine carrée*) : $|x| = \max(x, -x) = \sqrt{x^2}$.

Quelques propriétés de la valeur absolue :

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |-x| = |x|, \quad |x| = 0 \text{ ssi } x = 0, \quad |xy| = |x||y|, \quad \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Remarque : la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 (les dérivées à gauche et à droite sont distinctes).

Définition de la *distance* : $d(x, y) = |x - y|$.

Quelques propriétés de la distance :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) = 0 \text{ ssi } x = y.$$

Exercice 74. Retrouver les propriétés de la valeur absolue et de la distance à partir de leur définition.

Exercice 75. Montrer que $||x| - |y|| \leq |x + y|$. [Appliquer la première propriété à $x + y$ et $-y$.]

5.2 Maximum et minimum

Définition du *maximum* et du *minimum* : $\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y, \\ y & \text{si } x < y, \end{cases}$ et $\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y, \\ y & \text{si } x > y. \end{cases}$

Définitions alternatives (à partir de la *distance* ou de la *valeur absolue*) :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + d(x, y)}{2} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min(x, y) = \frac{x + y - d(x, y)}{2} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Quelques propriétés du maximum :

$$\max(x, x) = x, \quad \max(x, y) = \max(y, x), \quad \max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z).$$

On a des propriétés analogues pour le minimum.

Exercice 76. Quelles sont les formules pour $\max(x + z, y + z)$, $\max(-x, -y)$, et $\max(xz, yz)$?

Exercice 77. Définir le minimum à partir du maximum, et réciproquement.

5.3 Racine n-ième

Définition de la *racine carrée* : si $x \geq 0$, $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ est l'unique $y \geq 0$ tel que $y^2 = x$. Autrement dit, la racine carrée est la réciproque de la bijection $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$. On a donc :

$$\sqrt{x^2} = x = \sqrt{x^2} \text{ (pour } x \geq 0 \text{)}.$$

Définition de la *racine cubique* : si $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{x}$ est l'unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^3 = x$. Autrement dit, la racine cubique est la réciproque de la bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On a donc :

$$\sqrt[3]{x^3} = x = \sqrt[3]{x^3}.$$

Définition de la *racine n-ième* : pour tout entier $n \geq 1$, on définit de même $\sqrt[n]{x}$ pour $x \geq 0$ (si n est pair) ou pour $x \in \mathbb{R}$ (si n est impair).

Quelques propriétés de la racine n-ième :

$$\sqrt[n]{0} = 0, \quad \sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \text{ (pour } n \text{ pair et } x, y \geq 0, \text{ ou pour } n \text{ impair)},$$

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} \text{ (pour } n \text{ impair)}, \quad \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, \quad \sqrt[q]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nq]{x}, \quad \sqrt[n]{\sqrt{x}} = x.$$

Remarque : pour $n \geq 2$, la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable en 0 (la dérivée est infinie).

Exercice 78. Retrouver les propriétés de la racine n-ième à partir de sa définition.

Exercice 79. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Exercice 80. Étudier la fonction racine carrée et la fonction racine cubique.

5.4 Exponentielle

Définition de l'*exponentielle* : \exp est l'unique application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que $\exp' = \exp$ et $\exp 0 = 1$.

Définition alternative (à partir du *logarithme neperien*) : $\exp x$ est l'unique $y > 0$ tel que $\ln y = x$.

Notation : on pose $e = \exp 1$ et $e^x = \exp x$.

Quelques propriétés de l'exponentielle :

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

De plus, on a $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 81. Montrer que $e^x \geq x + 1$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, puis celle de $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$. [Étudier les variations de la fonction $f(x) = e^x - x - 1$.]

Exercice 82. Soit f une application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer successivement les propriétés suivantes :

$$f(x)f(-x) = 1, \quad f(x+y)f(-x) = f(y), \quad f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(x) > 0.$$

[Pour la dernière propriété, montrer que $f(x)$ est un carré.]

5.5 Logarithme

Définition du *logarithme neperien* : si $x > 0$, $\ln x$ est l'unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^y = x$. Autrement dit, le logarithme neperien est la réciproque de la bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = e^x$. On a donc :

$$e^{\ln x} = x \text{ (pour } x > 0), \quad \ln e^x = x.$$

Définition alternative : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Quelques propriétés du logarithme neperien :

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln xy = \ln x + \ln y \text{ (pour } x, y > 0), \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

Définition du *logarithme en base b* : pour tout réel $b > 1$, on pose $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ pour $x > 0$. En particulier, $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$, et $\log_e x = \ln x$. C'est pourquoi on dit que e est la *base du logarithme neperien*.

Définition alternative (à partir de la *puissance*) : $\log_b x$ est l'unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $b^y = x$.

Exercice 83. Retrouver les propriétés du logarithme neperien à partir de sa définition.

Exercice 84. Étudier la fonction logarithme neperien. [Commencer par retrouver sa dérivée.]

Exercice 85. Si $x > 0$ est un entier qui s'écrit avec n chiffres, que peut-on dire de $\log_{10} x$?

5.6 Puissance

Définition de la *puissance* : si $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $x^y = e^{y \ln x}$.

Quelques propriétés de la puissance :

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{y+z} = x^y x^z, \quad x^{-y} = \frac{1}{x^y}, \quad x^{yz} = (x^y)^z, \\ 1^x = 1, \quad (xy)^z = x^z y^z \text{ (pour } x, y > 0), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^y = \frac{1}{x^y}.$$

De plus, on a $x^y > 0$ pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Remarque : la *puissance réelle* x^y étend la *puissance entière* x^n pour $x > 0$. De plus, si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Plus généralement, si $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $x^r = \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{x^p}$. On peut ainsi, dans certains cas, définir la *puissance rationnelle* x^r même si x est négatif (exercice 86).

Exercice 86. Si $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt[q]{x^p}$? [Distinguer plusieurs cas selon la valeur de r .]

Exercice 87. Étudier la fonction $f(x) = x^a$ pour $x > 0$. [Distinguer plusieurs cas selon la valeur de a .]

Exercice 88. Étudier la fonction $f(x) = b^x$ pour $b > 0$. [Distinguer plusieurs cas selon la valeur de b .]

5.7 Cosinus, sinus, et tangente

Définition du *cosinus* et du *sinus* : \cos et \sin sont les deux seules applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telles que

$$\begin{cases} \cos' = -\sin, \\ \sin' = \cos, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 0 = 1, \\ \sin 0 = 0. \end{cases}$$

Définition alternative (à partir de l'*exponentielle imaginaire*) : $\cos x = \Re(e^{ix})$ et $\sin x = \Im(e^{ix})$.

Quelques propriétés du cosinus et du sinus :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x, \\ \sin(-x) = -\sin x. \end{cases}$$

Définition de π : $\frac{\pi}{2}$ est le plus petit $x > 0$ tel que $\cos x = 0$.

Définitions alternatives (exercice 91) : $\frac{\pi}{2}$ est le plus petit $x > 0$ tel que $\sin x = 1$; π est le plus petit $x > 0$ tel que $\cos x = -1$ ou tel que $\sin x = 0$; 2π est le plus petit $x > 0$ tel que $\cos x = 1$.

On en déduit que le cosinus et le sinus sont périodiques, de période 2π (exercice 91). De plus,

$$\sin x = 0 \text{ ssi } x \in \pi\mathbb{Z} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \cos x = 0 \text{ ssi } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Remarque : le cosinus et le sinus n'ont pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition de la *tangente* : si $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi[$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exercice 89. Retrouver les formules pour $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$.

Exercice 90. Retrouver les formules pour $\cos 2x$ et $\sin 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, puis les formules pour $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

Exercice 91. À partir de la définition de π , retrouver la valeur de $\sin \frac{\pi}{2}$. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus en π et 2π , les formules pour le cosinus et le sinus en $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \pi$, et $x + 2\pi$, puis les variations du cosinus et du sinus sur $[0, 2\pi]$. [*Commencer par étudier les variations du sinus et du cosinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*]

Exercice 92. Retrouver les valeurs du cosinus, du sinus, et de la tangente en $\frac{\pi}{4}$. [*Utiliser l'exercice 90.*]

Exercice 93. Retrouver les formules pour $\tan(x+y)$, $\tan(-x)$, et $\tan(x-y)$.

Exercice 94. Étudier la fonction tangente. [*Commencer par retrouver sa période.*]

5.8 Arc sinus, arc cosinus, et arc tangente

Définition de l'*arc sinus* : si $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin y = x$. Autrement dit, l'arc sinus est la réciproque de la bijection $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$. On a donc :

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ (pour } x \in [-1, 1]), \quad \arcsin(\sin x) = x \text{ (pour } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]).$$

Définition de l'*arc cosinus* : si $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos y = x$. Autrement dit, l'arc cosinus est la réciproque de la bijection $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos x$. On a donc :

$$\cos(\arccos x) = x \text{ (pour } x \in [-1, 1]), \quad \arccos(\cos x) = x \text{ (pour } x \in [0, \pi]).$$

Définition alternative (à partir de l'arc sinus) : $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Définition de l'*arc tangente* : si $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan y = x$. Autrement dit, l'arc tangente est la réciproque de la bijection $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$. On a donc :

$$\tan(\arctan x) = x, \quad \arctan(\tan x) = x \text{ (pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[).$$

Définition alternative : $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercice 95. Étudier les fonctions arc sinus et arc cosinus.

Exercice 96. Étudier la fonction arc tangente. [*Commencer par retrouver sa dérivée.*]

Exercice 97. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Bibliographie

Il n'y a pas de références à proprement parler mais vous êtes vivement encouragés à aller fouiner à la BU pour trouver un bouquin avec lequel vous allez vous sentir à l'aise. Voici une liste d'ouvrages possibles du type cours + exos corrigés.

À la BU

Liret & Martinais, *Analyse 1ère année (fonctions d'une variable réelle)*, série *Mathématiques pour le DEUG*, Dunod. [*Plein d'exemplaires, mais il faut piocher dans divers chapitres.*]

Audureau, Louquet, Mattenet & Vogt, *Analyse 1 (fonctions d'une variable réelle)*, Armand-Colin. [*Plein d'exemplaires.*]

Aitein, Louquet & Vogt, *Compléments d'analyse (fonctions de plusieurs variables)*, Armand-Colin. [*Plein d'exemplaires.*]

Douchet & Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral vol. 3 & 4*, Presses Polytechniques Romandes.

Spiegel, *Analyse vectorielle*, série Schaum. [*En anglais mais existe en édition française.*]

Spiegel, *Théorie et applications de l'analyse*, série Schaum. [*En anglais mais existe en édition française.*]

Bressoud, *Second Year Calculus*.

Ouvrages plus orientés vers la physique

Alais & Hulin, *Rappels et compléments de mathématiques vol. 1*, Armand-Colin.

Soum, Jagut, Denizart & Berty, *Techniques Mathématiques pour la Physique vol. 1 & 2*.

Hors de la BU

Noirot, Parisot & Brouillet, *Mathématiques pour la physique*, série *Cours de Physique, DEUG Sciences*, Dunod.

Anton, *Calculus – A new horizon*, Wiley and Sons (6ème édition, 1999). [*Un très bon bouquin de plus de 1000 pages merveilleusement illustré mais qui risque d'être cher.*]