Examen du 1er septembre 2004. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes, donner l'interprétation géométrique, le déterminant, et l'inverse (lorsque la matrice est inversible) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Dans cet exercice, A, B, C désignent des matrices carrées quelconques d'ordre 2. Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?
- *commutativité de la somme :* $A + B = B + A$;
- *associativité de la somme :* $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- *commutativité du produit :* $AB = BA$;
- *associativité du produit :* $(AB)C = A(BC)$.

Exercice 3. Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Donner :

a. un système d'équations paramétriques de la droite vectorielle $\mathbb{R}u$;

b. la forme générale d'un système d'équations paramétriques d'une droite parallèle à u ;

c. une équation cartésienne du plan vectoriel $u^\perp$;

d. la forme générale d'une équation cartésienne d'un plan orthogonal à u ;

e. une équation cartésienne pour le cylindre d'axe $\mathbb{R}u$ et de rayon r.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et A sa matrice dans la base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$. On suppose que $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'ils sont orthogonaux et de norme 1.

a. Écrire les conditions sur les coefficients de A exprimant cette hypothèse.

b. Vérifier que ces conditions sont satisfaites dans les deux cas suivants :

$$\text{cas 1 : } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{cas 2 : } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

c. Montrer qu'il n'y a pas d'autre cas possible.

d. Quelle est l'interprétation géométrique de f dans le cas 1 ?

e. Quelle est l'interprétation géométrique de f dans le cas 2 si on suppose que $\sin\theta = 0$?

On suppose qu'on est dans le cas 2 avec $\sin\theta \neq 0$. On pose $u = \vec{\imath} + f(\vec{\imath})$ et $v = \vec{\imath} - f(\vec{\imath})$.

f. Montrer que u et v sont non nuls.

g. Calculer le produit scalaire $u \cdot v$.

h. Calculer la matrice de la composée $f \circ f$.

i. Exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v.

j. En déduire la matrice de f dans la base u, v.

k. En déduire l'interprétation géométrique de f.