

Examen du 28 janvier 2004. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. On note $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 , et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (3x + 2y + z, x + z, 2x + 3z)$.

- Exprimer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction des vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .
- Quelle est la matrice de f et quel est son déterminant ?
- Quelle est la matrice de l'application linéaire réciproque f^{-1} ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(\vec{i}) = \vec{i} + a\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = a\vec{i} + \vec{j}$ ($a \in \mathbb{R}$), et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $g(\vec{i}) = \vec{i}'$ et $g(\vec{j}) = \vec{j}'$, avec :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{i}).$$

- Quelle est la matrice A de f dans la base canonique \vec{i}, \vec{j} et quel est son déterminant ?
- Quelle est la matrice B de g dans la base canonique \vec{i}, \vec{j} et quel est son déterminant ?
- Calculer les matrices AB et B^{-1} .
- Quelle est l'interprétation géométrique de g ?
- Exprimer $f(\vec{i}')$ et $f(\vec{j}')$ en fonction des vecteurs \vec{i}' et \vec{j}' .
- Quelle est la matrice A' de f dans la base \vec{i}', \vec{j}' et quel est son déterminant ?
- Exprimer A' en fonction des matrices A et B , puis A en fonction des matrices A' et B .

Exercice 3. On rappelle que si u, v et w sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , on a l'identité suivante :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w. \quad (*)$$

- Vérifier l'identité (*) dans les trois cas suivants :

$$\text{cas 1 : } v = w; \quad \text{cas 2 : } u = \vec{i}, v = \vec{j} \text{ et } w = \vec{k}; \quad \text{cas 3 : } u = v = \vec{i} \text{ et } w = \vec{j}.$$

Dans la suite, on pourra utiliser l'identité (*) sans la démontrer.

Soient maintenant u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On suppose que $\|v\| = 1$ et on note u' et u'' les deux vecteurs de la décomposition orthogonale $u = u' + u''$ avec $u' \in \mathbb{R}v$ et $u'' \in \{v\}^\perp$.

- Exprimer u' en fonction des vecteurs u et v , puis montrer que $u'' = v \wedge (u \wedge v)$.
- Exprimer $\|u'\|$ et $\|u''\|$ en fonction de $u \cdot v$ et $u \wedge v$.
- En déduire la distance entre le point défini par le vecteur u et la droite vectorielle $\mathbb{R}v$.

On désigne par s la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}v$.

- Exprimer $s(u')$ et $s(u'')$ en fonction des vecteurs u' et u'' .
- Exprimer $s(u)$ en fonction de u' et u'' , puis en fonction u et v .

Exercice 4. On note \mathcal{P} le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ et \mathcal{S} la sphère de centre $(0, 2, 1)$ et de rayon 2

- Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} et une équation cartésienne de \mathcal{S} .
- Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

On note \mathcal{D} la droite vectorielle de vecteur directeur (a, b, c) où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Donner un système d'équations paramétriques pour la droite \mathcal{D} .
- À quelle condition sur a, b, c la droite \mathcal{D} intersecte-t-elle la sphère \mathcal{S} ?