

1 Calcul vectoriel

1.1 Scalaires

Dans ce cours, les *scalaires* sont les réels. Les opérations sur les scalaires sont la *somme* et le *produit*, qui vérifient les identités suivantes :

$$\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu, \quad \lambda + 0 = \lambda, \quad \lambda + \mu = \mu + \lambda, \\ \lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu, \quad 1\lambda = \lambda, \quad \lambda\mu = \mu\lambda, \quad (\lambda + \mu)\nu = \lambda\nu + \mu\nu, \quad 0\lambda = 0.$$

De plus, tout scalaire λ a un *opposé* $-\lambda$, tel que $\lambda + (-\lambda) = 0$, et tout scalaire $\lambda \neq 0$ a un *inverse* λ^{-1} , tel que $\lambda\lambda^{-1} = 1$. On a aussi $(-\lambda)\mu = -\lambda\mu$. On écrit $\lambda - \mu$ pour $\lambda + (-\mu)$ et λ/μ pour $\lambda\mu^{-1}$.

Pour résumer ces propriétés, on dit que \mathbb{R} est un *corps*.

Exercice 1. Parmi les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+, \mathbb{U}, \mathbb{C}$, lesquels sont des corps ?

1.2 Vecteurs

Dans ce cours, les *vecteurs* sont les éléments de \mathbb{R}^2 ou ceux de \mathbb{R}^3 . Les opérations sur les vecteurs sont la *somme* et le *produit externe* (par un scalaire). Ainsi, pour \mathbb{R}^2 , on pose $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, et le *vecteur nul* $(0, 0)$ est noté $\vec{0}$. Ces opérations vérifient les identités suivantes :

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \quad u + \vec{0} = u, \quad u + v = v + u, \\ (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \quad 1u = u, \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \quad 0u = \vec{0}, \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

De ces identités, on déduit le fait que tout vecteur u a un *opposé* $-u = (-1)u$, tel que $u + (-u) = \vec{0}$. On a aussi $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -\lambda u$. On écrit $u - v$ pour $u + (-v)$.

Pour résumer ces propriétés, on dit que \mathbb{R}^2 est un *espace vectoriel* sur le corps \mathbb{R} . Idem pour \mathbb{R}^3 .

Interprétation géométrique des opérations sur les vecteurs :



Tout vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $u = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$. Le *système* \vec{i}, \vec{j} est la *base canonique* de \mathbb{R}^2 , et les scalaires x, y sont les *composantes* du vecteur u dans cette base. Idem pour \mathbb{R}^3 , avec $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Exercice 2. En utilisant les identités ci-dessus, montrer que si $\lambda \neq 0$ et $\lambda u = \vec{0}$, alors $u = \vec{0}$.

1.3 Produit scalaire

Si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, on pose $u \cdot u' = xx' + yy'$. De même, si $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$, on pose $u \cdot u' = xx' + yy' + zz'$. Autre notation : $\langle u, u' \rangle$.

C'est le *produit scalaire* de u par u' , qui vérifie les identités suivantes :

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w, \quad \vec{0} \cdot u = 0, \quad (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v), \quad u \cdot v = v \cdot u.$$

En posant $\lambda = -1$ dans la troisième identité, on obtient $(-u) \cdot v = -(u \cdot v)$.

Le produit scalaire se calcule à partir de la table du produit scalaire (figure 1) en utilisant ces identités. Exemple : $(1, -2) \cdot (0, 3) = (\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot 3\vec{j} = 3(\vec{i} \cdot \vec{j} - 2\vec{j} \cdot \vec{j}) = -6$.

On dit que les vecteurs u et v sont *orthogonaux* et on écrit $u \perp v$ si on a $u \cdot v = 0$.

Exemples : $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{0} \perp u$ pour tout vecteur u .

Exercice 3. Etant donné $u = (x, y) \neq \vec{0}$, construire $v \neq \vec{0}$ tel que $u \perp v$. Idem pour $u = (x, y, z) \neq \vec{0}$.

1.4 Déterminant dans \mathbb{R}^2

Si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, on pose $\det(u, u') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

C'est le *déterminant* de u et u' , qui vérifie les identités suivantes :

$$\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w), \quad \det(\vec{0}, u) = 0, \quad \det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v),$$

$$\det(u, u) = 0, \quad \det(v, u) = -\det(u, v).$$

De ces propriétés, on déduit la règle de *transformation élémentaire* : $\det(u, v) = \det(u + \lambda v, v)$.

On a aussi la règle de *transposition* (symétrie par rapport à la diagonale du tableau) : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$.

Exercice 4. En utilisant les identités ci-dessus, montrer les identités suivantes :

$$\det(u, v + w) = \det(u, v) + \det(u, w), \quad \det(u, \vec{0}) = 0, \quad \det(u, \lambda v) = \lambda \det(u, v), \quad \det(u, v) = \det(u, v + \lambda u).$$

1.5 Produit vectoriel

Si $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$, on pose $u \wedge u' = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$. Autre notation : $u \times u'$.

C'est le *produit vectoriel* de u par u' , qui vérifie les identités suivantes :

$$(u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w), \quad \vec{0} \wedge u = \vec{0}, \quad (\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v),$$

$$u \wedge u = \vec{0}, \quad v \wedge u = -(u \wedge v).$$

Attention : le produit vectoriel n'est ni commutatif (par exemple, $\vec{i} \wedge \vec{j} \neq \vec{j} \wedge \vec{i}$) ni associatif (exercice 5).

Exercice 5. Trouver u, v, w tels que $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$.

Exercice 6. Montrer que $u \perp u \wedge v$ et $v \perp u \wedge v$.

FIG. 1 – Tables du produit scalaire, du déterminant dans \mathbb{R}^2 , et du produit vectoriel

·	\vec{i}	\vec{j}
\vec{i}	1	0
\vec{j}	0	1

·	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

det	\vec{i}	\vec{j}
\vec{i}	0	1
\vec{j}	-1	0

\wedge	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	$\vec{0}$	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

1.6 Déterminant dans \mathbb{R}^3

Si $u = (x, y, z)$, $u' = (x', y', z')$, et $u'' = (x'', y'', z'')$, on pose $\det(u, u', u'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = u \cdot (u' \wedge u'')$,

d'où

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''.$$

C'est le *déterminant* (ou *produit mixte*) de u, u', u'' , qui vérifie les identités suivantes :

$$\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w), \quad \det(\vec{0}, u, v) = 0, \quad \det(\lambda u, v, w) = \lambda \det(u, v, w),$$

$$\det(u, u, v) = \det(v, u, u) = \det(u, v, u) = 0, \quad \det(v, u, w) = \det(u, w, v) = \det(w, v, u) = -\det(u, v, w).$$

On a aussi une règle de transformation élémentaire : $\det(u, v, w) = \det(u + \lambda v, v, w) = \det(u + \lambda w, v, w)$.

Exercice 7. Exprimer $\det(v, w, u)$ en fonction de $\det(u, v, w)$.

Exercice 8. Calculer $\det(\vec{i}, \vec{i}, \vec{i}), \det(\vec{i}, \vec{i}, \vec{j}), \det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}), \dots, \det(\vec{k}, \vec{k}, \vec{k})$ (table du déterminant dans \mathbb{R}^3).

Exercice 9. Etablir une règle de transposition pour le déterminant dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 10. Montrer les identités suivantes :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \quad (u \wedge u') \cdot (v \wedge v') = (u \cdot v)(u' \cdot v') - (u \cdot v')(u' \cdot v).$$

2 Sous-espaces

2.1 Combinaisons linéaires

On dit que le vecteur v est *combinaison linéaire* des vecteurs u_1, \dots, u_n s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Exemple : le vecteur $w = (a, b, c)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, 3, 4)$ s'il existe des scalaires λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$, c'est-à-dire si le système linéaire suivant a au moins une solution :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = a \\ \lambda + 3\mu = b \\ \lambda + 4\mu = c \end{cases}$$

C'est le cas, par exemple, pour $w = (2, 1, 0)$, mais pas pour $w = (1, 0, 0)$.

Remarque : $\vec{0}$ est toujours combinaison linéaire des vecteurs u_1, \dots, u_n . Il suffit de poser $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

On dit que le *système de vecteurs* u_1, \dots, u_n est *lié*, ou que les vecteurs sont *linéairement dépendants*, s'il existe une *relation linéaire non triviale*, c'est-à-dire des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$. Sinon, on dit que le système est *libre*, ou que les vecteurs sont *linéairement indépendants*.

Exemples :

- le système u est lié si et seulement si le vecteur u est nul ;
- le système u, v est lié si et seulement si u est nul ou s'il existe un scalaire λ tel que $v = \lambda u$. On dit alors que les deux vecteurs sont *colinéaires* ;
- le système u, v, w est lié si et seulement si u et v sont colinéaires ou s'il existe des scalaires λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$. On dit alors que les trois vecteurs sont *coplanaires*.

Théorème : un système de $k + 1$ vecteurs de \mathbb{R}^k est toujours lié.

Par exemple, trois vecteurs de \mathbb{R}^2 sont toujours coplanaires.

Pour déterminer si un système est lié, on peut utiliser les critères suivants :

u et v sont colinéaires dans \mathbb{R}^2	$\det(u, v) = 0$
u et v sont colinéaires dans \mathbb{R}^3	$u \wedge v = \vec{0}$
u, v, w sont coplanaires dans \mathbb{R}^3	$\det(u, v, w) = 0$

Pour $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$, le critère de colinéarité s'écrit aussi $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 11. Parmi les systèmes de vecteurs suivants, lesquels sont liés ?

$$(0, 0), \quad (2, 4), (3, 5), \quad (2, 4), (3, 6), \quad (2, 4), (0, 0), \quad (2, 4, 10), (3, 6, 14), \quad (2, 4, 10), (3, 6, 15),$$

$$(1, 1, 1), (2, 3, 4), (1, 0, 0), \quad (1, 1, 1), (2, 3, 4), (2, 1, 0), \quad (1, 1, 1), (2, 4, 10), (3, 6, 15).$$

Dans le cas où le système est lié, on donnera une relation linéaire non triviale.

Exercice 12. Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur non nul. Montrer que dans le critère de colinéarité pour u et $v = (x, y, z)$, une des trois conditions est superflue. *Indication : commencer par le cas où $a \neq 0$.*

2.2 Sous-espaces vectoriels

Un *sous-espace vectoriel* de \mathbb{R}^k est un sous-ensemble de \mathbb{R}^k qui contient $\vec{0}$ et qui est *clos* par les opérations sur les vecteurs. Autrement dit, si $u, v \in \mathbb{V}$, alors $u + v \in \mathbb{V}$, et si $u \in \mathbb{V}$, alors $\lambda u \in \mathbb{V}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si u_1, \dots, u_n sont des vecteurs de \mathbb{R}^k , l'ensemble $\mathbb{V} = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k : c'est le *sous-espace vectoriel engendré par* u_1, \dots, u_n .

Remarque : on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré si on échange deux vecteurs, si on multiplie un vecteur par un scalaire *non nul*, ou si on ajoute un multiple d'un vecteur à un *autre* vecteur.

Exemples :

- le sous-espace vectoriel engendré par le système vide est le singleton $\{\vec{0}\}$ aussi appelé *espace nul* ;
- si u est un vecteur non nul, l'ensemble $\mathbb{R}u = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la *droite vectorielle* engendrée par u ;
- si u et v sont deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est le *plan vectoriel* engendré par u et v . En particulier, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ;
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j} + \mathbb{R}\vec{k}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Cette liste est exhaustive : il n'y a pas d'autre sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 .

En général, si \mathbb{V} est engendré par le système *libre* u_1, \dots, u_n , on dit que ce système est une *base* de \mathbb{V} . L'entier naturel n ne dépend pas du choix de la base : c'est la *dimension* de \mathbb{V} , que l'on note $\dim \mathbb{V}$. Cette dimension vaut 0 pour l'espace nul, 1 pour une droite vectorielle, 2 pour un plan vectoriel (en particulier pour \mathbb{R}^2), et 3 pour l'espace \mathbb{R}^3 .

Théorème : tout système libre de n vecteurs dans un sous-espace \mathbb{V} de dimension n est une base de \mathbb{V} .

Exemple : le système $(1, 1), (1, -1)$ est libre dans le plan vectoriel \mathbb{R}^2 . C'est donc une base de \mathbb{R}^2 .

Théorème (*unicité de la décomposition*) : si u_1, \dots, u_n forment une base de \mathbb{V} , tout vecteur $v \in \mathbb{V}$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.

Exercice 13. Montrer que toute droite vectorielle de \mathbb{R}^2 est engendrée par un vecteur de la forme $\vec{i} + a\vec{j}$ ou bien \vec{j} . De même, montrer que toute droite vectorielle de \mathbb{R}^3 est engendrée par un vecteur de la forme $\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$, ou bien $\vec{j} + a\vec{k}$, ou bien \vec{k} . Enfin, montrer que tout plan vectoriel de \mathbb{R}^3 est engendré par deux vecteurs de la forme $\vec{i} + a\vec{k}$ et $\vec{j} + b\vec{k}$, ou bien $\vec{i} + a\vec{j}$ et \vec{k} , ou bien \vec{j} et \vec{k} .

2.3 Orthogonalité

Si U est un ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^k , alors l'ensemble $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^k \mid u \perp v \text{ pour tout } u \in U\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k appelé *orthogonal* de U .

Exemples :

- si $u = (a, b) \neq (0, 0)$, alors $\{u\}^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 ;
- si $u = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors $\{u\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ est un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 ;
- si $u = (a, b, c)$ et $u' = (a', b', c')$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\{u, u'\}^\perp = \{u\}^\perp \cap \{u'\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z = 0\}$ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 .

Autrement dit :

- dans \mathbb{R}^2 , une équation linéaire homogène non nulle définit une droite vectorielle ;
- dans \mathbb{R}^3 , une équation linéaire homogène non nulle définit un plan vectoriel, et deux équations linéaires homogènes indépendantes définissent une droite vectorielle.

Pour trouver une base, on résout l'équation ou le système linéaire (*méthode du pivot*).

Exemple : $\{(1, 2, 3)\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} = \{(-2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ avec $u = (-2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$.

Propriétés de l'orthogonalité :

$$\text{si } U \subset V \text{ alors } V^\perp \subset U^\perp, \quad U \subset U^{\perp\perp}, \quad U^\perp = U^{\perp\perp\perp}.$$

Si \mathbb{V} est un sous-espace vectoriel, alors $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{\perp\perp}$. Si $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ et \mathbb{V} est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k engendré par u_1, \dots, u_n , alors $\mathbb{V}^\perp = U^\perp$, et donc $\mathbb{V} = U^{\perp\perp}$.

Dans \mathbb{R}^2 , l'orthogonal d'une droite vectorielle est une droite vectorielle. Dans \mathbb{R}^3 , l'orthogonal d'une droite vectorielle est un plan vectoriel. De plus, l'orthogonal de l'espace nul est \mathbb{R}^k . On a donc :

$$\boxed{\dim \mathbb{V} + \dim \mathbb{V}^\perp = k.}$$

Exercice 14. Trouver une base pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\{(1, 1)\}^\perp, \quad \{(2, 3)\}^\perp, \quad \{(1, 1, 1)\}^\perp, \quad \{(2, 3, 4)\}^\perp, \quad \{(1, 1, 1), (2, 3, 4)\}^\perp, \quad \{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (1, 0, 0)\}^\perp.$$

Exercice 15. Montrer les trois propriétés de l'orthogonalité.

2.4 Sous-espace affines et équations paramétriques

Un *sous-espace affine* de \mathbb{R}^k est un sous-ensemble de \mathbb{R}^k de la forme $\mathbb{A} = u_0 + \mathbb{V} = \{u_0 + v \mid v \in \mathbb{V}\}$ où $u_0 \in \mathbb{R}^k$ et \mathbb{V} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^k . On a alors $u_0 \in \mathbb{A}$, et $\mathbb{A} = u + \mathbb{V}$ pour tout $u \in \mathbb{A}$. On dit que \mathbb{A} est le *sous-espace (affine) passant par u_0 et parallèle à \mathbb{V}* : il s'obtient en *translatant* \mathbb{V} . On dit aussi que \mathbb{V} est la *direction* de \mathbb{A} . La *dimension* de \mathbb{A} est celle de \mathbb{V} .

Remarque : un sous-espace vectoriel est un sous-espace affine qui contient $\vec{0}$.

Exemples (pour u_0 quelconque dans \mathbb{R}^k) :

- le singleton $\{u_0\}$ est un sous-espace affine appelé *point* ;
- si v est un vecteur non nul, $u_0 + \mathbb{R}v = \{u_0 + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la *droite* passant par u_0 et parallèle à v .
Si $u_0 = (x_0, y_0)$ et $v = (a, b)$, cette droite est définie par un système de deux *équations paramétriques* :

$$\begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \end{cases}$$

Dans ce système, les scalaires x_0, y_0, a , et b sont des constantes, et le *paramètre* λ est une variable scalaire qui sert à paramétrer la droite. De même, une droite de \mathbb{R}^3 est définie par un système de trois équations paramétriques avec un paramètre.

- si v et w sont deux vecteurs non colinéaires, $u_0 + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w = \{u_0 + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est le *plan* passant par u_0 et parallèle à v et w . En particulier, \mathbb{R}^2 est un sous-espace affine de \mathbb{R}^2 . Un plan de \mathbb{R}^3 est défini par un système de trois équations paramétriques avec deux paramètres ;
- \mathbb{R}^3 est un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 .

Cette liste est exhaustive : il n'y a pas d'autre sous-espace affine de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 .

On peut aussi définir un sous-espace affine de dimension n à partir de $n + 1$ points. Par exemple, si u et v sont distincts, la droite passant par u et v est la droite passant par u et parallèle à $v - u$. De même, si u, v , et w ne sont pas alignés, c'est-à-dire si $v - u$ et $w - u$ ne sont pas colinéaires, le plan passant par u, v , et w est le plan passant par u et parallèle à $v - u$ et $w - u$.

Exercice 16. Donner le système d'équations paramétriques pour le plan passant par $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et parallèle à $v = (1, 1, 1)$ et $w = (2, 3, 4)$.

Exercice 17. Donner un système d'équations paramétriques pour la droite passant par $(2, 1)$ et $(1, 2)$, pour la droite passant par $(1, 2, 3)$ et $(2, 1, 4)$, et pour le plan passant par $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 4)$, et $(3, 3, 2)$.

Exercice 18. Montrer que la droite passant par u et v est l'ensemble $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda + \mu = 1\}$ des *barycentres* de u et v . Etablir un résultat analogue pour le plan passant par u, v , et w .

2.5 Equations cartésiennes

Si $u = (a, b) \neq (0, 0)$ et c est un scalaire, l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid u \cdot v = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ est une droite de \mathbb{R}^2 de direction $\{u\}^\perp$. Dans ce cas, on dit que l'équation linéaire $ax + by = c$ est *non dégénérée*. C'est une *équation cartésienne* de la droite.

Exemple : pour $u = (1, 1)$, l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid u \cdot v = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ est la droite passant par $(1, 0)$ et parallèle à $(1, -1)$.

De même, si $u = (a, b)$ et $u' = (a', b')$ sont deux vecteurs non colinéaires et c, c' sont des scalaires, l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid u \cdot v = c \text{ et } u' \cdot v = c'\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \text{ et } a'x + b'y = c'\}$ est un point de \mathbb{R}^2 : c'est l'intersection des deux droites d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. Dans ce cas, on dit que les deux équations linéaires sont *indépendantes*.

Exemple : l'intersection des deux droites d'équations cartésiennes $x + y = 1$ et $x - y = 0$ est $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

Ainsi, dans \mathbb{R}^2 , une équation linéaire non dégénérée définit une droite et deux équations linéaires indépendantes définissent un point. De même, dans \mathbb{R}^3 , une équation linéaire non dégénérée définit un plan, deux équations linéaires indépendantes définissent une droite, et trois équations linéaires indépendantes définissent un point.

Pour trouver un point et une base de la direction d'un sous-espace affine défini par une ou plusieurs équations cartésiennes, on résout l'équation ou le système linéaire. Réciproquement, pour trouver une équation ou un système linéaire à partir d'un point et d'une base, on peut utiliser les critères de colinéarité ou de coplanarité.

Exemples :

– si $u_0 = (x_0, y_0)$ et $v = (a, b) \neq (0, 0)$, la droite $u_0 + \mathbb{R}v$ a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0;$$

– si $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $v = (a, b, c)$ avec $a \neq 0$, la droite $u_0 + \mathbb{R}v$ a pour équations cartésiennes (voir l'exercice 12)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \\ z - z_0 & c \end{vmatrix} = 0;$$

– si $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$, et si $v = (a, b, c)$ et $v' = (a', b', c')$ ne sont pas colinéaires, le plan $u_0 + \mathbb{R}v + \mathbb{R}v'$ a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou encore} \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (v \wedge v') = 0.$$

Exercice 19. Trouver un point et une base de la direction pour le sous-espace affine défini par chacun des systèmes suivants :

$$2x + 3y = 1, \quad 2x + 3y + 4z = 1, \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Exercice 20. Donner un système d'équations cartésiennes pour chacun des sous-espaces affines suivants :

$$(1, 0) + \mathbb{R}(2, 3), \quad (1, 0, 0) + \mathbb{R}(2, 3, 4), \quad (1, 0, 0) + \mathbb{R}(2, 3, 4) + \mathbb{R}(1, 1, 1).$$

Exercices supplémentaires sur les sous-espaces affines

Exercice 21. Trouver l'intersection du plan d'équation $x - 3y + 5z = 1$ avec la droite d'équations $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{-2} = z + 1$.

Exercice 22. Trouver l'intersection du plan passant par les trois points $(-3, 1, 4)$, $(0, -1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$ avec le plan d'équation $x + y + 2z = 3$.

Exercice 23. Donner l'équation générale d'un plan passant par $(0, 1, 3)$ et $(1, 1, 2)$.

Exercice 24. Soit Δ la droite passant par les points $(-1, 0, 1)$ et $(0, 2, 1)$. Donner un système d'équations paramétriques pour Δ , puis pour la droite Δ_λ passant par le point $(0, 3, 1)$ et coupant Δ au point correspondant à la valeur λ du paramètre. En déduire que la réunion des droites Δ_λ forme un plan dont on donnera un système d'équations paramétriques, puis une équation cartésienne.

3 Applications à la géométrie

3.1 Norme et distance

Si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $u \cdot u = x^2 + y^2 \geq 0$. On pose $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norme de u). Idem pour $u \in \mathbb{R}^3$. Si $\|u\| = 1$, on dit que le vecteur u est *unitaire*. Propriétés de la norme :

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \quad \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \|u\| = 0 \text{ si et seulement si } u = \vec{0}.$$

On a $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$. Donc $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si $u \perp v$ (*Pythagore*).

On a aussi $(u \cdot v)^2 + \det(u, v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ (dans \mathbb{R}^2) et $(u \cdot v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ (dans \mathbb{R}^3), d'où

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|, \quad |\det(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad \|u \wedge v\| \leq \|u\| \|v\|, \quad |\det(u, v, w)| \leq \|u\| \|v\| \|w\|.$$

La *distance* entre u et v est $d(u, v) = \|v - u\|$. Des propriétés de la norme, on déduit :

$$|d(u, v) - d(v, w)| \leq d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \quad d(u, v) = 0 \text{ si et seulement si } u = v.$$

Application : l'équation du cercle (ou de la sphère) de centre u_0 et de rayon r est $\|u - u_0\|^2 = r^2$.

Exemple : l'équation du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2 est $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, soit $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

Exercice 25. Montrer les identités $(u \cdot v)^2 + \det(u, v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ et $(u \cdot v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Exercice 26. Calculer les trois côtés du triangle $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Exercice 27. Quelle est l'équation de la sphère de centre $(2, 3, 4)$ et de rayon 5 ?

Exercice 28. Quel est l'ensemble défini par l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$?

Exercice 29. A quelle condition l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ définit-elle un cercle ? (On précisera le centre et le rayon de ce cercle.)

3.2 Projections orthogonales

Si v est un vecteur non nul, tout vecteur u se décompose de façon unique en $u = u' + u''$ avec $u' \in \mathbb{R}v$ et $u'' \in \{v\}^\perp$. Il suffit de poser

$$u' = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v, \quad u'' = u - u'.$$

Le vecteur u' (respectivement u'') est la *projection orthogonale* de u sur $\mathbb{R}v$ (respectivement sur $\{v\}^\perp$). La *distance* entre u et la droite (ou le plan) $\{v\}^\perp$ est $d(u, \{v\}^\perp) = \|u''\|$. De même, la distance entre u et la droite $\mathbb{R}v$ est $d(u, \mathbb{R}v) = \|u''\|$. On a donc :

$$d(u, \{v\}^\perp) = \frac{|u \cdot v|}{\|v\|}, \quad d(u, \mathbb{R}v) = \frac{|\det(u, v)|}{\|v\|} \text{ (dans } \mathbb{R}^2), \quad d(u, \mathbb{R}v) = \frac{\|u \wedge v\|}{\|v\|} \text{ (dans } \mathbb{R}^3).$$

Exemple : si $v = (1, 2)$, les projections orthogonales de $u = (x, y)$ sur les droites $\mathbb{R}v$ et $\{v\}^\perp$ sont les vecteurs $u' = (\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5})$ et $u'' = (\frac{4x-2y}{5}, \frac{-2x+y}{5})$. On a $d(u, \{v\}^\perp) = \frac{|x+2y|}{\sqrt{5}}$ et $d(u, \mathbb{R}v) = \frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}$.

On définit aussi la distance entre u et une droite ou un plan affine : $d(u, u_0 + \{v\}^\perp) = d(u - u_0, \{v\}^\perp)$ et $d(u, u_0 + \mathbb{R}v) = d(u - u_0, \mathbb{R}v)$.

Application : l'équation du cylindre d'axe $u_0 + \mathbb{R}v$ et de rayon r est $\|(u - u_0) \wedge v\|^2 = r^2 \|v\|^2$.

Exemple : l'équation du cylindre d'axe $(0, 0, 2) + \mathbb{R}(1, 1, 0)$ et de rayon 3 est :

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & 1 \\ z-2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & 1 \\ z-2 & 0 \end{vmatrix}^2 = 18, \quad \text{soit } x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 8z - 10 = 0.$$

Exercice 30. Calculer la distance entre $u = (x, y, z)$ et le plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$, puis la distance entre u et le plan affine d'équation $ax + by + cz = d$. *Indication : considérer le plan vectoriel comme l'orthogonal d'un vecteur.*

Exercice 31. Calculer l'équation du cylindre d'axe $\mathbb{R}(0, 1, 1)$ et de rayon 2, puis l'intersection de ce cylindre avec le plan d'équation $z = 0$. Quelle est la forme de cette intersection ?

Exercice 32. Pour $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$ donnés, montrer que $d(u, \mathbb{R}v)$ est la distance minimale entre u et un λv quelconque. *Indication : étudier les variations de la fonction $f(\lambda) = d(u, \lambda v)^2$.*

3.3 Angle

Si u et v sont deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 , l'angle \widehat{uv} entre u et v est l'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad \sin \theta = \frac{\det(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

Remarque : on a $u \perp v$ si et seulement si $\widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$. On dit que deux vecteurs *unitaires* u et v forment une base *orthonormée directe* de \mathbb{R}^2 si on a $\widehat{uv} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $u \cdot v = 0$ et $\det(u, v) = 1$.

Si u et v sont deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 , l'angle \widehat{uv} entre u et v est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad \sin \theta = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \|v\|}.$$

Remarque : on prend $\theta \in [0, \pi]$ car dans l'espace \mathbb{R}^3 , il n'y a pas de façon canonique de distinguer les angles θ et $-\theta$ (alors que dans le plan \mathbb{R}^2 , l'*orientation* permet de les distinguer).

Exercice 33. Calculer les trois angles du triangle $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Exercice 34. Pour $v = (0, 0, 1)$, calculer l'équation du cône $\{u \in \mathbb{R}^3 \mid \widehat{uv} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}\}$.

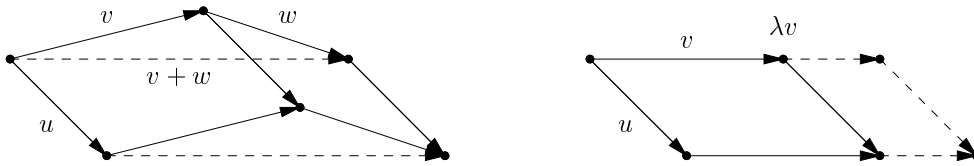
3.4 Aire et volume

On note $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v de \mathbb{R}^2 . L'aire orientée $\tilde{\mathcal{A}}(u, v)$ est définie par :

$$\tilde{\mathcal{A}}(u, v) = \mathcal{A}(u, v) \text{ si } \widehat{uv} > 0, \quad \tilde{\mathcal{A}}(u, v) = -\mathcal{A}(u, v) \text{ si } \widehat{uv} < 0, \quad \tilde{\mathcal{A}}(u, v) = 0 \text{ si } \widehat{uv} = 0 \text{ ou } \pi.$$

Quelques propriétés de l'aire orientée :

$$\tilde{\mathcal{A}}(u, v + w) = \tilde{\mathcal{A}}(u, v) + \tilde{\mathcal{A}}(u, w), \quad \tilde{\mathcal{A}}(u, \lambda v) = \lambda \tilde{\mathcal{A}}(u, v), \quad \tilde{\mathcal{A}}(v, u) = -\tilde{\mathcal{A}}(u, v), \quad \tilde{\mathcal{A}}(\vec{i}, \vec{j}) = 1.$$

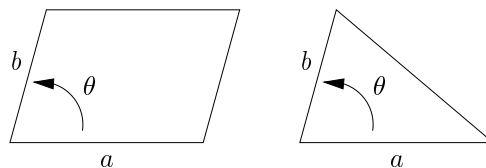


En utilisant ces propriétés, on montre que $\tilde{\mathcal{A}}(u, v) = \det(u, v)$, d'où $\mathcal{A}(u, v) = |\det(u, v)|$.

De même, l'aire du parallélogramme défini par deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^3 est $\mathcal{A}(u, v) = \|u \wedge v\|$.

On peut aussi définir le *volume orienté* $\tilde{\mathcal{V}}(u, v, w)$ du parallélépipède défini par les vecteurs u, v et w de \mathbb{R}^3 , et on montre que $\tilde{\mathcal{V}}(u, v, w) = \det(u, v, w)$. Le *volume* du parallélépipède est donc $\mathcal{V}(u, v, w) = |\det(u, v, w)|$.

Exercice 35. Quelles sont les aires des figures suivantes :



Exercice 36. Calculer l'aire du triangle $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

4 Calcul matriciel

4.1 Applications linéaires et matrices carrées

On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est *linéaire* si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Exemples (dans \mathbb{R}^2) :

- $f(x, y) = (ax, ay)$ (*homothétie de rapport a*). Cas particuliers : $a = 1$ (*identité*), $a = -1$ (*symétrie centrale*), $a = 0$ (*application nulle*);
- $f(x, y) = (ax, y)$ (*affinité orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{j}$ et de rapport a*). Cas particuliers : $a = -1$ (*symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{j}$*), $a = 0$ (*projection orthogonale sur l'axe $\mathbb{R}\vec{j}$*);
- $f(x, y) = (y, x)$ (*symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$*);
- $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ (*rotation d'angle θ*).

Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de la forme $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. On représente le vecteur $u = (x, y)$ par sa *matrice colonne* $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et l'application f par sa *matrice carrée* (d'ordre 2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui s'obtient en juxtaposant les matrices $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ des vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$. La matrice du vecteur $f(u)$ est alors le *produit* $AU = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Exemples : les matrices des vecteurs \vec{i} , \vec{j} , et $\vec{0}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice de l'identité est $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*matrice identité*) et celle de l'application nulle est $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (*matrice nulle*).

De même, toute application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est représentée par une *matrice carrée d'ordre 3*.

Exercice 37. Ecrire la matrice de f pour chacun des exemples ci-dessus.

Exercice 38. Donner une interprétation géométrique pour les matrices carrées suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Opérations sur les matrices

La somme et le produit externe sont définis de façon évidente sur les matrices colonnes et sur les matrices carrées. Cas des matrices carrées d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Les propriétés de ces opérations sont les mêmes que pour les vecteurs. Cas des matrices carrées :

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A + \mathbf{0} = A, \quad A + B = B + A,$$

$$(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A), \quad 1A = A, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad 0A = \mathbf{0}, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Le produit de deux matrices carrées est défini de telle sorte que l'on ait $(AB)U = A(BU)$. Cas des matrices carrées d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Propriétés du produit :

$$(AB)C = A(BC), \quad (A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$\mathbf{I}A = A = A\mathbf{I}, \quad \mathbf{0}A = \mathbf{0} = A\mathbf{0}, \quad (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

On a des propriétés analogues pour le produit d'une matrice carrée par une matrice colonne.

Attention : le produit des matrices n'est pas commutatif (exercice 39). On dit que deux matrices A et B *commutent* si on a $AB = BA$. De même, si $AB = \mathbf{0}$, on ne peut pas en déduire que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

Remarque : si A est la matrice de $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ et B est la matrice de $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ alors $A + B$ est la matrice de $f + g$ et AB est la matrice de $f \circ g$.

Exercice 39. Calculer SP , PS , et $(SP)^2$ pour $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 40. Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

Exercice 41. Pour chacune des matrices de l'exercice 38, calculer A^2 , A^3 , puis A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 42. A quelle condition a-t-on l'identité $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$? Même question pour $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , A^3 , A^4 , A^5 , puis A^n pour tout $n > 0$. *Indication : Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$ où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence.*

4.3 Déterminant et inverse

Le *déterminant* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et de sa matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est

$$\det f = \det A = \det(f(\vec{i}), f(\vec{j})) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Si $u, v \in \mathbb{R}^2$, on a $\det(f(u), f(v)) = \det f \det(u, v)$. Autrement dit, le déterminant $\det f$ est le *facteur de changement d'aire* de f . On définit de même le déterminant d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et de sa matrice carrée d'ordre 3 : c'est le *facteur de changement de volume* de f .

Propriétés du déterminant d'une matrice carrée d'ordre k :

$$\det(AB) = \det A \det B = \det(BA), \quad \det \mathbf{I} = 1, \quad \det(\lambda A) = \lambda^k \det A.$$

On dit qu'une matrice A est *inversible* s'il existe une matrice A' telle que $AA' = \mathbf{I} = A'A$. Cette *inverse* A' est unique (exercice 46) et se note A^{-1} . On a donc

$$AA^{-1} = \mathbf{I} = A^{-1}A, \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Théorème : pour une matrice carrée d'ordre k , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la matrice A est inversible ;
2. les colonnes de A sont linéairement indépendantes ;
3. les lignes de A sont linéairement indépendantes ;
4. le déterminant de A est non nul.

Cas des matrices carrées d'ordre 2 : pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Remarque : si A est la matrice de f , alors A est inversible lorsque f est bijective et dans ce cas, A^{-1} est la matrice de la bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 44. Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exercice 45. Inverser les matrices (inversibles) de l'exercice 38.

Exercice 46. Montrer que si $A'A = \mathbf{I} = AA''$, alors $A' = A''$.

Exercice 47. Si A est inversible, que vaut $\det(A^{-1})$?

4.4 Matrices et systèmes linéaires

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, l'équation $AU = U'$ correspond au système $\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases}$.

Si A est inversible, cette équation équivaut à $U = A^{-1}U'$. Autrement dit, on résout le système ci-dessus en inversant la matrice A , et réciproquement. Cela donne une méthode pour inverser les matrices.

Exemple : pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on résout le système $\begin{cases} x + 2y = x' \\ 3x + 4y = y' \end{cases}$. On obtient le système $\begin{cases} x = -2x' + y' \\ y = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$ et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Attention à l'ordre des variables !

Remarque : Si A n'est pas inversible, les équations ne sont pas indépendantes. On peut toujours résoudre le système, mais on ne peut pas exprimer x et y en fonction de x' et y' .

En fait, cette méthode est surtout utile pour les matrices carrées d'ordre 3 ou plus.

Exercice 48. Calculer x'' et y'' en fonction de x et y sachant que

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = a'x' + b'y' \\ y'' = c'x' + d'y' \end{cases}.$$

Si A est la matrice associée au premier système et B est la matrice associée au second système, quelle est la matrice associée au système ainsi obtenu ?

Exercice 49. Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Dans chaque cas, on calculera le déterminant de la matrice et de son inverse.

Exercice 50. Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans chaque cas, on calculera le déterminant de la matrice et de son inverse.

4.5 Changement de base

Si les vecteurs $\vec{v}' = a\vec{v} + c\vec{j}$ et $\vec{j}' = b\vec{v} + d\vec{j}$ forment une base de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire s'ils sont linéairement indépendants, tout vecteur $u = (x, y) = x\vec{v} + y\vec{j}$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = x'\vec{v}' + y'\vec{j}'$. Le passage d'une décomposition à l'autre se fait en utilisant la *matrice de passage* P de \vec{v}, \vec{j} à \vec{v}', \vec{j}' , et son inverse P^{-1} , qui est la matrice de passage de \vec{v}', \vec{j}' à \vec{v}, \vec{j} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont les matrices colonnes de \vec{v}' et \vec{j}' dans la base \vec{v}, \vec{j} , et les colonnes de P^{-1} sont les matrices colonnes de \vec{v} et \vec{j} dans la base \vec{v}', \vec{j}' .

Exemple : pour $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{j}$ et $\vec{j}' = \vec{j} - \vec{v}$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Si f est l'application linéaire de matrice A , on peut calculer la matrice colonne V' de $f(u)$ dans la base \vec{v}', \vec{j}' à partir de la matrice colonne U' de u dans cette même base :

$$V' = A'U', \quad \text{où } A' = P^{-1}AP.$$

On dit que $A' = P^{-1}AP$ est la *matrice de f dans la base \vec{v}', \vec{j}'* . Les colonnes de A' sont les matrices colonnes de $f(\vec{v}')$ et $f(\vec{j}')$ dans la base \vec{v}', \vec{j}' .

Remarque : en particulier, A est la matrice de f dans la base canonique \vec{i}, \vec{j} . Ainsi, A et $A' = P^{-1}AP$ représentent la même application linéaire f dans deux bases différentes : on dit que les matrices A et A' sont *semblables*.

Exemple : pour $\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j}' = \vec{j} - \vec{i}$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 51. Soit f l'application linéaire de matrice A . Calculer la matrice A' de f dans la base \vec{i}', \vec{j}' où $\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{j}' = \vec{j} - \vec{i}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 52. Si $B = P^{-1}AP$, trouver une formule pour calculer B^n à partir de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 53. Soit f l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les réels λ tels que $\mathbb{V}_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = \lambda u\}$ contient des vecteurs non nuls.
- Pour chacun des λ ci-dessus, montrer que \mathbb{V}_λ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.
- Montrer que l'on peut choisir une base \vec{i}', \vec{j}' de \mathbb{R}^2 telle que $f(\vec{i}')$ est colinéaire à \vec{i}' , et $f(\vec{j}')$ est colinéaire à \vec{j}' , et donner la matrice B de f dans cette base.
- Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 54. Même exercice que précédemment pour $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercices supplémentaires sur les matrices

Exercice 55. Dans le plan ou dans l'espace, quel est le déterminant d'une rotation, d'une symétrie centrale, d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, d'une homothétie de rapport a , d'une projection orthogonale sur une droite vectorielle ? Dans l'espace, quel est le déterminant d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, d'une projection sur un plan vectoriel ?

Exercice 56. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec toutes les autres matrices carrées d'ordre 2. *Indication : utiliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 57. Quelles sont les matrices semblables à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$? *Indication : commencer par le cas où $a = 1$.*

Exercice 58. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\text{Tr} A = a + d$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. En déduire que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$ si A et A' sont des matrices semblables.

Exercice 59. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et soit f l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- Soit $\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a $f(u) = (u \cdot \vec{i}') \vec{i}'$.
- Déterminer le vecteur \vec{j}' tel que \vec{i}' et \vec{j}' forment une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .
- Ecrire la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 60. Discuter suivant les valeurs du scalaire a les solutions de l'équation matricielle $AU = V$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 9 & -7 & a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$