

## Examen du 3 septembre 2003. Durée : 2 heures

Documents, calembrets et téléphones interdits.

**Exercice 1.** Soit  $f(x) = \ln(\cos 2x)$ .

- Calculer le développement limité de la fonction  $f$  à l'ordre 2 en 0.
- En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ .

**Exercice 2.** Soient  $f(x) = x(1 - x^2)^{1/2}$  et  $g(x) = x(1 - x^2)^{3/2}$ .

- Donner une primitive de  $f$  et une primitive de  $g$ .
- Calculer  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$  en intégrant par parties.

**Exercice 3.** Soit  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . On pose  $w = f(z) = \left| \frac{z + i}{z - i} \right|$ .

- Quel est l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  des complexes  $z$  pour lesquels  $w$  est défini ?
- Exprimer  $w^2$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- Quelle est l'image réciproque de l'intervalle  $[0, 1]$  par la fonction  $f$  ?

On pose  $g(t) = f(it)$  pour tout réel  $t \neq 1$ .

- Calculer la limite de  $g$  en  $1^-$ .
- Quelle est l'image de l'intervalle  $[-1, 1[$  par la fonction  $g$  ?
- En déduire l'image de l'ensemble  $\mathcal{D}_f$  par la fonction  $f$ .

**Exercice 4.** On considère les équations différentielles suivantes :

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (\mathbf{H}_1) \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad (\mathbf{H}_2) \quad x^2 y'' - xy' + y = x \ln x \quad (\mathbf{G}_1)$$

- Laquelle de ces équations différentielles est linéaire à coefficients constants ?
- Donner la forme générale des solutions de  $(\mathbf{H}_2)$ .

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ . On pose  $g(t) = f(e^t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

- Exprimer  $g'(t)$  et  $g''(t)$  à partir de  $f$ ,  $f'$ , et  $f''$ .
- Montrer que si  $y = f(x)$  est solution de  $(\mathbf{H}_1)$ , alors on a  $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . [Poser  $x = e^t$ .]
- En déduire la forme générale des solutions de  $(\mathbf{H}_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Trouver une équation différentielle linéaire à coefficients constants  $(\mathbf{G}_2)$  telle que si  $y = f(x)$  est solution de  $(\mathbf{G}_1)$ , alors  $z = g(t)$  est solution de  $(\mathbf{G}_2)$ .
- En déduire la forme générale des solutions de  $(\mathbf{G}_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .