Examen du 31 janvier 2003. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Donner une formule pour :

a. la suite u_n telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$;

b. la suite v_n telle que $v_0 = v_1 = 0$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n + 1$.

Exercice 2. On pose $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

a. Quel est le développement limité de $e^x - 1$ à l'ordre 1 en 0 ?

b. Quel est le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 1 en 0 ?

c. En déduire la valeur de L.

Exercice 3. On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$.

a. Exprimer $\sin 2x$ en fonction de $u = \tan x$. [*Calculer* $2u\cos^2 x$ *et* $(1+u^2)\cos^2 x$.]

b. Exprimer la dérivée $\tan' x$ en fonction de $u = \tan x$.

c. Calculer l'intégrale I. [*Faire le changement de variable* $u = \tan \frac{t}{2}$.]

Exercice 4. Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $w = f(z) = \left| \dfrac{z-i}{z+i} \right|$.

a. Quel est l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des complexes z pour lesquels w est défini ?

b. Exprimer w^2 en fonction de x et y.

c. Quelle est l'image réciproque de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction f ?

On pose $g(t) = f(it)$ pour tout réel $t \neq -1$.

d. Calculer la limite de g en -1^+.

e. Quelle est l'image de l'intervalle $]-1, 1]$ par la fonction g ?

f. En déduire l'image de l'ensemble $\mathcal{D}_f$ par la fonction f.

Exercice 5. On pose $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a. Trouver une équation différentielle linéaire du second ordre (homogène et à coefficients constants) dont f est une solution.

b. À quelle condition l'équation différentielle $y'' = ay' + by$ admet-elle une solution non nulle $y = g(x)$ telle que la fonction g est paire ?