Examen du 2 septembre 2003. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

On note $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ celle de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. Soient u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

a. Quelle est l'interprétation géométrique de $|\det(u,v)|$?
b. Quelle relation a-t-on entre $|\det(u,v)|$ et $\|u\|\|v\|$?
c. Dans quel cas a-t-on $|\det(u,v)| = \|u\|\|v\|$?

Exercice 2. Donner la matrice de chacune des applications linéaires suivantes :

a. rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ (dans le plan $\mathbb{R}^2$) ;
b. affinité orthogonale de rapport $\frac{1}{2}$ par rapport à l'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ (dans le plan $\mathbb{R}^2$) ;
c. rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ (dans l'espace $\mathbb{R}^3$).

Exercice 3. On note $\mathbb{D}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $v = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

a. Quels sont les vecteurs unitaires qui engendrent $\mathbb{D}$?

Soit $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver $u' \in \mathbb{D}$ et $u'' \in \mathbb{D}^\perp$ tels que $u = u' + u''$.
c. Exprimer la norme de u' et celle de u'' en fonction de x, y, z.
d. Quelle est la distance entre le point de coordonnées x, y, z et la droite $\mathbb{D}$?
e. Quelle est l'équation du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $\mathbb{D}$ et de rayon 3 ?
f. Quelle est l'équation de l'intersection $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ avec le plan $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$?
g. Quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ (respectivement avec l'axe $\mathbb{R}\vec{\jmath}$) ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a. À quelle condition l'application f est-elle bijective ?
b. Dans ce cas, quelle est la matrice de la réciproque f^{-1} ?

On pose $\vec{\imath}\,' = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}\,' = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

c. Montrer que les vecteurs $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
d. Quelle est la matrice A' de f dans la base $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$?
e. Quelle est la matrice de $f^n = f \circ \cdots \circ f$ dans la base $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$?

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice B (dans la base canonique).

f. Exprimer B en fonction de la matrice B' de g dans la base $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$.
g. En déduire une formule pour les coefficients de la matrice A^n.
h. Cette formule est-elle valable pour un entier n négatif (par exemple $n = -1$) ?