Examen du 29 janvier 2003. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. On pose $u = (1, 2, 1)$, $v = (-1, 1, 2)$, et $w_0 = (2, 1, 2)$.

a. Calculer l'angle $\widehat{uv}$.

b. Construire un vecteur non nul w orthogonal à u et à v.

c. Donner une équation cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par u et v.

d. Calculer la distance entre le point w_0 et le plan $\mathcal{P}$.

e. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre w_0 et de rayon r.

f. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre w_0 qui est tangente à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire qui contient un seul point de $\mathcal{P}$.

Exercice 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath}$, $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, et $f(\vec{k}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + c\vec{k}$.

a. Donner la matrice de f dans la base canonique.

b. À quelle condition sur a, b, c cette matrice est-elle inversible ?

c. Quel est le volume du parallélépipède défini par les 3 vecteurs $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, et $f(\vec{k})$?

On suppose que l'application f est bijective et on note $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sa réciproque.

d. Calculer les vecteurs $f^{-1}(\vec{\imath})$, $f^{-1}(\vec{\jmath})$, et $f^{-1}(\vec{k})$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et A sa matrice dans la base canonique. On suppose que $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'ils sont orthogonaux et de norme 1.

a. Écrire les conditions sur les coefficients de A exprimant cette hypothèse.

b. Vérifier que ces conditions sont satisfaites dans les deux cas suivants :

$$\text{cas 1} : A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{cas 2} : A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

c. Montrer qu'il n'y a pas d'autre cas possible.

d. Quelle est l'interprétation géométrique de f dans le cas 1 ?

e. Quelle est l'interprétation géométrique de f dans le cas 2 si on suppose que $\sin\theta = 0$?

On suppose qu'on est dans le cas 2 avec $\sin\theta \neq 0$. On pose $u = \vec{\imath} + f(\vec{\imath})$ et $v = \vec{\imath} - f(\vec{\imath})$.

f. Montrer que u et v sont non nuls.

g. Calculer le produit scalaire $u \cdot v$.

h. Calculer la matrice de la composée $f \circ f$.

i. Exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v.

j. En déduire la matrice de f dans la base u, v.

k. En déduire l'interprétation géométrique de f.