

Examen du 4 septembre 2002. Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1. Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}$.

- Quel est le développement limité de la fonction \ln à l'ordre 2 en 1 ?
- En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercice 2. Calculer $\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$. [Faire le changement de variable $t = \ln x$.]

Exercice 3. Donner une formule générale pour la suite u_n définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$.

Exercice 4. On pose $f(z) = z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4(1 - 5i)z + 16(1 - i)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- Résoudre l'équation $z^2 + 2i = 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(x)$.
- Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.
- Trouver des coefficients $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = (z - a)(z^2 + bz + c)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- En déduire les autres racines de l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 5. On considère les équations différentielles suivantes :

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (\mathbf{H}_1) \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad (\mathbf{H}_2) \quad x^2 y'' - xy' + y = x \ln x \quad (\mathbf{G}_1)$$

- Laquelle de ces équations différentielles est linéaire à coefficients constants ?
- Donner la forme générale des solutions de (\mathbf{H}_2) .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose $g(t) = f(e^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Exprimer $g'(t)$ et $g''(t)$ à partir de f , f' , et f'' .
- Montrer que si $y = f(x)$ est solution de (\mathbf{H}_1) , alors on a $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. [Poser $x = e^t$.]
- En déduire la forme générale des solutions de (\mathbf{H}_1) sur $]0, +\infty[$.
- Trouver une équation différentielle linéaire à coefficients constants (\mathbf{G}_2) telle que si $y = f(x)$ est solution de (\mathbf{G}_1) , alors $z = g(t)$ est solution de (\mathbf{G}_2) .
- En déduire la forme générale des solutions de (\mathbf{G}_1) sur $]0, +\infty[$.