Examen du 25 janvier 2002. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $w = f(z) = \dfrac{z + 4i}{\overline{z} - 4i}$.

a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des complexes z pour lesquels w est défini.

b. Calculer $|w|$.

c. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de w en fonction de x et y.

d. Pour quelles valeurs de $z \in \mathcal{D}_f$, w est-il réel ? [*On représentera l'ensemble* $f^{-1}(\mathbb{R})$.]

e. Pour quelles valeurs de $z \in \mathcal{D}_f$, w est-il imaginaire pur ? [*On représentera* $f^{-1}(i\mathbb{R})$.]

Exercice 2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - \cos x\right)$.

a. Calculer le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 2 en 0.

b. Calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 2 en 0.

c. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 3. Soient $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

a. Calculer $A + B$.

b. Calculer $A - B$.

c. En déduire A et B.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$ ($\mathbf{F}$).

a. Quelle est la forme générale des solutions de ($\mathbf{F}$) ?

b. Donner la solution f de ($\mathbf{F}$) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

c. Quelle est la forme générale des solutions de $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4x} + 4e^{2x}$ ($\mathbf{G}$) ?

d. Quelle est l'équation de récurrence homogène du second ordre ($\mathbf{H}$) qui a la même équation caractéristique que ($\mathbf{F}$) ?

e. Donner la solution u_n de ($\mathbf{H}$) telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.