Examen du 3 septembre 2002. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

On note $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ (respectivement $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$). Les matrices des applications linéaires sont exprimées dans cette base.

Exercice 1. On note $\mathbb{D}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $v = \vec{\imath} + 2\vec{k}$.

a. Quels sont les vecteurs unitaires qui engendrent $\mathbb{D}$?

Soit $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver $u' \in \mathbb{D}$ et $u'' \in \mathbb{D}^\perp$ tels que $u = u' + u''$.

c. Exprimer la norme de u' et celle de u'' en fonction de x, y, z.

d. Quelle est la distance entre le point de coordonnées x, y, z et la droite $\mathbb{D}$?

On note $\mathcal{C}$ le cylindre d'axe $\mathbb{D}$ et de rayon 2, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à distance 2 de la droite $\mathbb{D}$.

e. Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$?

f. Quelle est l'équation de l'intersection $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ avec le plan horizontal $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$?

g. Quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$ (respectivement avec l'axe $\mathbb{R}\vec{\jmath}$) ?

Exercice 2. On note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2, A^3, $\det A$, et A^{-1}.

Soient $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $u' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

b. Exprimer l'aire S du parallélogramme défini par u et u' en fonction de x, y, x', y'.

c. Que peut-on dire de l'aire du parallélogramme défini par $f(u)$ et $f(u')$?

d. Exprimer de même (le cosinus et le sinus de) l'angle θ défini par u et u'.

e. Que peut-on dire de l'angle défini par $f(u)$ et $f(u')$?

Soit $\lambda > 0$. On note $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $B = \lambda A$.

f. Trouver la valeur de λ telle que g préserve aussi bien les aires que les angles.

g. Dans ce cas, quelle est l'interprétation géométrique de B ?

h. En déduire l'interprétation géométrique de A.

i. Trouver une formule simple pour les coefficients de A^{2002}.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le déterminant de A.

b. Calculer l'inverse de A.

c. Quel est le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, et $-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$?

d. Quelle est l'intersection des trois plans affines d'équations respectives $x - y - z = 1$, $x + y + z = 0$, et $x - 2y - z = 1$?