Examen du 23 janvier 2002. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a. si u et v sont orthogonaux, que peut-on dire de $u \cdot v$ et de $\|u \wedge v\|$?

b. si u et v sont colinéaires, que peut-on dire de $u \cdot v$ et de $\|u \wedge v\|$?

c. si u et v sont unitaires, que peut-on dire de $(u \cdot v)^2 + \|u \wedge v\|^2$?

Exercice 2. Soit S la sphère de centre $(1, 2, 3)$ et de rayon 4.

a. Donner une équation cartésienne pour S.

b. Quelle est l'intersection de S avec le plan d'équation $z = 0$?

c. Quelle est l'intersection de S avec l'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$?

Exercice 3. Soit f l'affinité orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{\jmath}$ et de rapport 3 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

a. Donner la matrice de f dans la base canonique $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, son inverse, et l'interprétation géométrique de cet inverse.

b. Idem pour la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$;

c. Idem pour la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le déterminant de A.

b. Calculer l'inverse de A.

c. Quel est le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, et $\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$?

d. Quelle est l'intersection des trois plans affines d'équations respectives $x + y + z = 1$, $x - y - z = 1$, et $x - 2y - z = 0$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

a. Trouver un vecteur $\vec{\imath}' \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{\imath}') = \vec{0}$.

b. Trouver un vecteur $\vec{\jmath}' \neq \vec{0}$ et un scalaire $\lambda \neq 0$ tels que $f(\vec{\jmath}') = \lambda \vec{\jmath}'$.

c. Calculer la matrice A' de f dans la base $\vec{\imath}', \vec{\jmath}'$.

d. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?