

Examen du 11 septembre 2001. Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1. Dans cet exercice, on ne considère que des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

- Donner un exemple d'application strictement croissante.
- Donner un exemple d'application strictement croissante dont la dérivée s'annule en 0.
- Donner un exemple d'application convexe.
- Donner un exemple d'application qui n'est ni convexe, ni concave.

On donnera une courte justification pour chaque cas.

Exercice 2. Soit $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

- Donner la forme générale des solutions complexes pour u_n .
- Donner une formule pour u_n sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

- Quel est le domaine de définition D_f ? S'agit-il d'un intervalle de \mathbb{R} ?
- Dresser le tableau de variation de f .
- En tant qu'application de D_f vers \mathbb{R} , f est-elle croissante, décroissante, injective, surjective, bijective?
- Calculer les ensembles $f^{-1}\{0\}$, $f^{-1}\{1\}$, et plus généralement, $f^{-1}\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
- Calculer l'ensemble $f^{-1}]0, +\infty[$.

Exercice 4. On note \mathbb{C} (respectivement \mathbb{C}^*) l'ensemble des complexes (respectivement, des complexes non nuls) et on considère l'application $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

- Etant donné $c \in \mathbb{C}$, combien y a-t-il de $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = c$?
- En tant qu'application de \mathbb{C}^* vers \mathbb{C} , f est-elle injective, surjective, bijective?
- Etant donné $z \in \mathbb{C}^*$ de module ρ et d'argument θ , exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de ρ , $\cos \theta$, $\sin \theta$.
- Etant donné $r > 0$ tel que $r \neq 1$, trouver $a, b > 0$ tels que, lorsque z décrit le cercle de centre 0 et de rayon r , alors $f(z) = x + iy$ décrit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Quel est l'ensemble des $f(z)$ lorsque z décrit le cercle de centre 0 et de rayon 1?