Examen du 18 janvier 2001. Durée : 2 heures

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. L'application f est-elle injective, surjective, bijective?

Aucune justification n'est demandée ici.

c. On note $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$.

Indication : utiliser l'identité $f(g(x)) = x$.

d. Quel est le domaine de définition de g'?

e. Calculer $g'(1)$.

Exercice 2. Soit $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.

a. Donner la forme générale des solutions pour u_n.

b. Donner une formule pour u_n sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = 5$.

Exercice 3. On considère les équations différentielles suivantes :

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (i), \qquad y'' - 2y' + y = e^x \quad (ii).$$

a. Donner la forme générale des solutions de (i).

b. Donner la forme générale des solutions de (ii).

c. Donner la solution de l'équation (ii) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 4.

a. Résoudre l'équation $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$.

b. Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$, puis en fonction de $\cos x$ seul.

Indication : calculer la partie réelle de e^{5ix} *de deux façons différentes, et utiliser l'identité remarquable* $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

c. Si x est tel que $\cos 5x = 0$, et si on pose $X = \cos x$, quelles sont les valeurs possibles de X?

d. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Indication : comparer $\cos \frac{\pi}{10}$ *avec* $\cos \frac{\pi}{4}$.