

Examen du 10 septembre 2001. Durée : 2 heures.**Documents, calculettes et téléphones interdits.**On note \vec{i}, \vec{j} (respectivement $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) la base canonique de \mathbb{R}^2 (respectivement de \mathbb{R}^3).**Exercice 1.**

- A quelle condition sur les scalaires x, y, x', y' les vecteurs $u = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $u' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ sont-ils colinéaires ?
- A quelle condition sur les scalaires x, y, z, x', y', z' les vecteurs $u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $u' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ sont-ils colinéaires ?
- A quelle condition sur les scalaires $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ les vecteurs $u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $u' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, et $u'' = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?

Pour chaque cas, on donnera un exemple de système de vecteurs qui satisfait la condition et un autre qui ne la satisfait pas.

Exercice 2. Donner les matrices des applications linéaires suivantes (dans \mathbb{R}^2) :

- homothétie de rapport 3 ;
- affinité orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{i}$ et de rapport 3 ;
- rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3. Soit $u = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \in \mathbb{R}^3$.

- Donner une équation paramétrique de la droite passant par $(1, 2, 3)$ et parallèle à u .
- Donner un système d'équations cartésiennes pour cette même droite.
- Quel est le sous-espace $\{u\}^\perp$?

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Quelle est l'interprétation géométrique des applications linéaires de matrices A et B ?
- Calculer la matrice $C = BA$.
- Calculer les déterminants et les inverses des matrices A, B, C .

On note f l'application linéaire de matrice C . On pose $u = (1 + \sqrt{2})\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $v = \vec{j} - \vec{k}$.

- Calculer les normes des vecteurs u et v .
- Quel est l'angle entre les vecteurs u et v ?
- Calculer les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$.
- Calculer le cosinus de l'angle entre les vecteurs v et $f(v)$.
- Quel est l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(w) = w$?