

Examen du 22 janvier 2001. Durée : 2 heures.

Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1. On considère les vecteurs $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, et $w = (1, 1, -1)$ dans \mathbb{R}^3 .

- Exprimer les composantes x', y', z' du vecteur $xu + yv + zw$ en fonction des scalaires x, y, z , puis calculer x, y, z en fonction de x', y', z' .
- En déduire que les vecteurs u, v , et w sont linéairement indépendants.
- Quel est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par ces trois vecteurs?
- Quelle est l'intersection des plans affines d'équations respectives $-x + y + z = 1$, $x - y + z = 3$, et $x + y - z = 5$?
- Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $A_\lambda = A - \lambda \mathbf{I}$.

- A quelle condition la matrice A_λ est-elle inversible?
- Calculer A_λ^{-1} pour $\lambda = 1$.

Exercice 3. On considère les vecteurs $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 2, 3)$ dans \mathbb{R}^3 . On pose $\mathbb{V} = \mathbb{R}v$, et $\mathbb{V}^\perp = \{v\}^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \perp v\}$.

- Quelle est la dimension de \mathbb{V} ? et celle de \mathbb{V}^\perp ?
- Donner une équation cartésienne de \mathbb{V}^\perp .
- Trouver $w' \in \mathbb{V}$ et $w'' \in \mathbb{V}^\perp$ tels que $w = w' + w''$.
- Quelle est la distance entre w et \mathbb{V} ? entre w et \mathbb{V}^\perp ?
- Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par $f(\lambda) = \|w - \lambda v\|^2$, et donner une interprétation géométrique du minimum.

Exercice 4. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

- Calculer le déterminant de S_θ et la matrice S_θ^2 .
- Donner l'interprétation géométrique des applications linéaires de matrices respectives S_0 et $S_{\frac{\pi}{2}}$.
- Soit f l'application linéaire de matrice $A = S_{2\theta}$. On pose $\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{j}' = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$. Calculer la matrice A' de f dans la base \vec{i}', \vec{j}' .
- En déduire l'interprétation géométrique de l'application linéaire de matrice S_θ .