ALGEBRE LINEAIRE

Durée : 1h30. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Rendre des copies distinctes pour *Techniques de Calcul* et *Algèbre Linéaire.*

---

1. Calculs d'inverses :

a. Calculer A^{-1} pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

b. Calculer B^{-1} pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire les solutions de chacun des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 2 \\ x+z & = & 2 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 2 \\ x+z & = & 4 \\ x+y & = & 6 \end{array}\right.$$

---

2. On se place dans le plan avec un repère orthonormé direct. Donner la matrice de chacune des transformations linéaires suivantes :

a. Symétrie par rapport à l'axe Oy.

b. Symétrie centrale.

c. Rotation d'angle $\pi/3$.

---

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ une base de $\mathcal{E}$. On note f la transformation linéaire dont la matrice dans la base $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Soit $\vec{\imath}' = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Montrer que $\vec{\imath}',\vec{\jmath}$ forment une base de $\mathcal{E}$.

b. Ecrire la matrice de f dans la base $\vec{\imath}',\vec{\jmath}$.

---

4. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $AA = A$.

a. Quelles sont les valeurs possibles de $\det A$?

b. Donner un exemple de matrice pour chacune de ces valeurs.