ALGEBRE LINEAIRE

Durée : 1h30. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Rendre des copies distinctes pour *Techniques de Calcul* et *Algèbre Linéaire.*

---

1. Calculer A^{-1} pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et B^{-1} pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

---

2. On se place dans le plan avec un repère orthonormé direct. Donner la matrice de chacune des transformations linéaires suivantes :

a. Symétrie par rapport à l'axe Ox.

b. Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = y$.

c. Symétrie centrale.

d. Rotation d'angle $\pi/2$.

e. Rotation d'angle $\pi/4$.

On pourra dessiner dans chaque cas les images respectives des vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

---

3. On se place dans l'espace vectoriel réel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on définit l'application $Tr : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $Tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$. *Cette application s'appelle la trace.*

a. Vérifier que Tr est une forme linéaire. *Rappel : une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

b. Donner une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. *Aucune justification n'est demandée ici.*

c. Donner la matrice de Tr dans cette base.

d. Soient $A,B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices quelconques. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

e. Soient $A,A' \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices *semblables*. Montrer que $Tr(A) = Tr(A')$. *Rappel : deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.*