"MONADES ORIENTALES"
(**extraits**)

ALBERT BURRONI

Introduction

Le texte qui suit est un fragment de l'exposé oral fait dans le cadre de la semaine 4 du GEOCAL 2006. Il est, bien sûr, destiné à être complété dans un proche avenir. Son intérêt, tel qu'il est, est d'introduire un exemple d'un concept nouveau de "présentation (relative) dimension par dimension" des ω-catégories lequel généralise le concept de "polygraphe" de ([Bu 93]). Il évoque aussi un type de monade ("monades orientales") qui sera à la base d'un essai d'une nouvelle construction des "orientaux" de Street.

Exemples classiques

A partir de la donnée d'un objet cosimplicial $S : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$, on obtient un foncteur $N : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Smpl}$ (où $\mathbf{Smpl} = \mathbf{Ens}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux) en posant, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $n \in \mathbb{N}$, $N(X)_n = \mathrm{Hom}(S([n]), X)$ (avec un prolongement évident pour les morphismes). On appelera ce foncteur, *foncteur nerf (relatif à S)*. L'idée est d'utiliser ce foncteur, par exemple, pour l'étude cohomologique de l'objet X, en lui substituant l'ensemble simplicial $N(X)$. Nous ne discuterons pas ici du bien fondé du choix de S dans cette approche ; nous nous contenterons de remarquer que c'est avec certains de tels choix pour S que l'on aborde l'étude cohomologique d'objets possédant un contenu géométrique intuitif dans diverses catégories $\mathcal{C}$. Voici trois exemples classiques : $\mathcal{C} = \mathbf{Esp}$ (catégorie des espaces topologiques), $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ (catégorie des catégories) et $\mathcal{C} = \mathbf{Smpl}$, respectivement avec des choix bien connus d'objets cosimpliciaux S (le troisième étant un plongement de Yoneda).

Ces exemples ont des points communs. Par exemple, dans chaque cas, $\mathcal{C}$ est complète et cocomplète (ce qui permet, en particulier, de constater que la donnée de S se prolonge à $\mathbf{Smpl}$ en un adjoint à gauche du foncteur N). De cela, nous n'aurons besoin de retenir ici que l'existence dans $\mathcal{C}$ d'un objet initial 0 et un objet final 1. Plus important est le fait que dans $\mathcal{C}$ on a de manière naturelle une notion d'"homotopie" (ou 2-cellules) entre morphismes. Ces faits (l'existence d'un "singleton" 1 et celle d'"homotopies") et aussi de quelques autres intuitions géométriques de cette nature conduisent à l'idée d'une notion de "cône" de base un objet arbitraire X de $\mathcal{C}$. Nous noterons ΛX un tel objet. En réalité, dans chacun des exemples cités, il existe une construction de cette nature $X \mapsto \Lambda X$ qui est fonctorielle $\Lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et qui , de plus, se complète de façon naturelle en la donnée d'une monade $\Lambda = (\Lambda, \eta, \mu)$ sur $\mathcal{C}$. L'unité $\eta X : X \longrightarrow \Lambda X$ déterminant la base du cône et la multiplication $\mu X : \Lambda^2 X \longrightarrow \Lambda X$ exprimant une sorte de "repliement" du cône itéré sur sa base. Nous laissons au lecteur le calcul (non totalement immédiat) de ces données dans chacun des trois cas (ainsi que l'analyse des algèbres de ces monades).

L'objet cosimplicial $S : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ de chacun des exemples proposés est alors extrait de l'application de la monade Λ à l'objet 0 de $\mathcal{C}$. Précisémment, on pose :

$S([n]) = \Lambda^{n+1}0$, $S(\delta_i^n) = \Lambda^i\eta\Lambda^{n-i}$ et $S(\sigma_i^n) = \Lambda^i\mu\Lambda^{n-i}$ (ce qui, peut-être, mérite le nom de "résolution du vide" !).

Ebauche du cas des ω-catégories

Dans ([Str 87]) R.Street construit un tel objet cosimplicial $S = \mathcal{O}$ pour la catégorie des ω-catégories (strictes), $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}_\omega$, donc un foncteur de la forme $\mathcal{O} : \Delta \longrightarrow \mathbf{Cat}_\omega$. La ω-catégorie $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}([n])$ est appelée l' "oriental" de dimension n (où $n \in \mathbb{N}$). La construction de Street est de nature combinatoire et, nous semble-t'il, difficilement conciliable avec notre conception du calcul des ω-catégories (notamment basé sur le concept de "polygraphe" donné dans ([Bu 93]). C'est donc une version différente de ces objets que nous avons cherché à proposer ici. Cette autre version que l'on pourrait qualifier de "fonctorielle" est basée sur l'idée d'une construction itérée de cônes dans $\mathbf{Cat}_\omega$ à partir de la ω-catégorie vide $0 = \emptyset$ telle que nous l'avons proposé dans la section précédente et que nous allons préciser maintenant. Toutefois une difficulté technique subsite dont nous parlerons à la fin de cette section

Rappelons d'abord quelques points de terminologie sur les ω-catégories (dans [Bu 93] appelées ∞-catégories). Pour simplifier, on identifiera toute n-catégorie (où $0 \leq n$) à une ω-catégorie dont les cellules de dimension strictement supérieure à n sont des identités). Un ω-graphe est défini par une suite d'ensembles C_n ($n \in \mathbb{N}$) et une suite double de couples d'applications de la forme $\mathrm{s}_i^n, \mathrm{t}_i^n : C_n \rightrightarrows C_i$ telles que $\mathrm{s}_j^i\mathrm{s}_i^n = \mathrm{s}_j^i\mathrm{t}_i^n$ et $\mathrm{t}_j^i\mathrm{s}_i^n = \mathrm{t}_j^i\mathrm{t}_i^n$ $(0 \leq j < i < n)$. Une ω-catégorie (stricte) est la donnée d'un ω-graphe munis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de n lois de compositions et n lois d'unités, notées respectivement $*_i^n$ et id_i^n $(0 \leq i < n)$. Les axiomes bien connus d'associativité, d'échange et de neutralité (stricts) doivent être satisfaits.

Pour construire le cône ΛC, on utilise un concept de présentation (relative) par générateurs et relations (dimension par dimension) des ω-catégories. Pour tout entier naturel n, soit $\mathbf{e}_n$, la n-catégorie qui représente le foncteur d'oubli $\mathrm{c}_n : \mathbf{Cat}_\omega \longrightarrow \mathbf{Ens}$, i.e. $\mathrm{c}_n(C) = C_n \simeq \mathrm{Hom}_n(\mathbf{e}_n, C)$. On note $\partial_n\mathbf{e}_{n+1}$ le n-squelette de $\mathbf{e}_{n+1}$. Soient $j_n : \partial\mathbf{e}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{e}_{n+1}$ l'inclusion canonique et $q_n : \partial\mathbf{e}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{e}_n$ le quotient dont la restriction à $\partial_{n-1}\partial_n\mathbf{e}_{n+1}$ est une inclusion. Considérons maintenant un ensemble X et un ω-foncteur de la forme $\varphi : X \cdot \partial_n\mathbf{e}_{n+1} \longrightarrow C$ où $X \cdot \partial_n\mathbf{e}_{n+1}$ est un coproduit de X copies de $\partial_n\mathbf{e}_{n+1}$. On notera $C[\varphi]$ et C/φ (apelée respectivement *extention* et *quotient*) les sommes amalgamées dans $\mathbf{Cat}_\omega$ explicitées par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
X \cdot \mathbf{e}_{n+1} \arrow[d] & X \cdot \partial_n\mathbf{e}_{n+1} \arrow[l, "X\cdot j_n"'] \arrow[r, "X\cdot q_n"] \arrow[d, "\varphi"] & X \cdot \mathbf{e}_n \arrow[d] \\
C[\varphi] & C \arrow[l, "\hat{j}_n"'] \arrow[r, "\hat{q}_n"] & C/\varphi
\end{tikzcd}$$

Le cône ΛC est alors la limite inductive d'une suite de ω-catégories construites par induction. Au départ de l'induction on pose : $C^{(-1)} = C$. Supposons déjà définie la suite de ω-catégories et de foncteurs :

$$C^{(-1)} \xrightarrow{\hat{j}_0} C'^{(0)} \xrightarrow{\hat{q}_0} C^{(0)} \xrightarrow{\hat{j}_1} \cdots C^{(n-1)} \xrightarrow{\hat{j}_n} C'^{(n)} \xrightarrow{\hat{q}_n} C^{(n)},$$

[avec une mention spéciale pour le premier foncteur ainsi défini $\hat{j}_0 : C^{(-1)} \longrightarrow C'^{(0)} = C[\lambda_0]$ où λ_0 est réduit à un unique élément]. On pose alors, d'une part, $C'^{(n+1)} = C^{(n)}[\lambda_{n+1}]$ où : $\lambda_{n+1} : C_n \cdot \partial_n\mathbf{e}_{n+1} \longrightarrow C_n$ est déterminée, pour tout

$x \in C_n$, par les formules :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{s}_n\lambda_{n+1}x & = & \lambda_n\mathrm{t}_{n-1}x \quad (\text{si} \quad n>0), \qquad \mathrm{s}_0x = \lambda_0 \quad (\text{sinon}), \\ \mathrm{t}_n\lambda_{n+1}x & = & x *_0 (\lambda_1\mathrm{s}_0x) *_1 (\lambda_2\mathrm{s}_1x) *_2 \cdots *_{n-2} (\lambda_{n-1}\mathrm{s}_{n-2}x) *_{n-1} (\lambda_n\mathrm{s}_{n-1}x). \end{array}$$

et, d'autre part, de façon analogue $C^{(n+1)} = C'^{(n+1)}/\rho_{n+2}$, ce qui devra conduire, dans la limite inductive ΛC de cette suite, aux égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_{n+1}(y *_j x) & = & (\mathrm{t}_{j+1}y) *_0 (\lambda_1\mathrm{s}_0x) *_1 (\lambda_2\mathrm{s}_1x) \ldots \\ & & \qquad *_{j-1}(\lambda_j\mathrm{s}_{j-1}x) *_j (\lambda_{n+1}x) *_{j+1} (\lambda_{n+1}y), \\ \lambda_{n+1}(\mathrm{id}^n x) & = & \mathrm{id}^{n+1}\lambda x. \end{array}$$

On prolonge cette construction par un foncteur : $\Lambda : \mathbf{Cat}_\omega \longrightarrow \mathbf{Cat}_\omega$ et on définit une tranformation naturelle : $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Cat}_\omega} \longrightarrow \Lambda$ où, pour tout objet C de $\mathbf{Cat}_\omega$, le foncteur $\eta C : C \longrightarrow \Lambda C$ est l'injection canonique de $C^{-1} = C$ dans la limite inductive ΛC.

Une difficulté un peu surprenante dans la construction de la monade $\Lambda = (\Lambda, \eta, \mu)$ attendue sur $\mathbf{Cat}_\omega$ réside dans la construction de la transformation naturelle μ. Un texte plus complet expliquera cette difficulté et, sans doute, la résoudra.

Références

[Bu 93] A.Burroni.*Higher-dimensional word problems with application to equationnal logic.* TCS **115**(1) (1993) 41-42.

[Bu 00] A.Burroni.*A new calculation of the orientals of Street.* Oxford (mai 2000) (manuscript). http ://www.math.jussieu.fr/ burroni/

[Str 87] R.Street.*The algebra of oriented simplexes.* JPAA **49** (1987) 283-335.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, France
E-mail address: burroni@math.jussieu.fr