

En guise de conclusion. . .

Les fondements

Il y a une dizaine d'années, je n'aurais pas donné un sou des *fondements*. Que dire, en effet, de ce béton précontraint ? L'univers créé en six jours, la foi du charbonnier dans la cohérence du septième jour, vaguement *relookée* pour tenir compte de l'incomplétude. La vérité ptolémaïque plate à l'infini et ce ciel peint qui se lève à l'Est, celui des systèmes formels ; autour gravitent des méta-systèmes — à moins que ce ne soit le contraire, qu'importe : cycles et épicycles, sempiternel retour des mêmes balivernes.

J'ai été amené à changer d'avis lors de la rédaction de la seconde partie de *Locus Solum* [34] ; il y avait des pistes à explorer, à condition de distinguer fondements et *préjugés*. La vieille garde (Kronecker, Hilbert, etc.) avait cru en l'innocence combinatoire des entiers naturels, innocence réfutée par l'incomplétude. Mais la génération suivante ignore l'avertissement ; de fil en aiguille, on en est arrivé aux *barbus*.

Il semble raisonnable de penser que le *facteur hyperfini* pourrait être plus « primitif » que l'ensemble \mathbb{N} et sa prétendument innocente combinatoire.

C'est un peu la (modeste) contre-partie logique de la *géométrie non commutative* de Connes, dont j'ai signalé l'importance *fondationnelle* (section 17.6.2).

La qualité mathématique

La logique s'est attiré le cordial mépris — assez justifié, dans l'ensemble — des mathématiciens pour son manque de :

Technicité : globalement faible, ce qui explique la prolifération des logiques *jetables*. Avec un minimum de compétitivité, la sélection naturelle nous aurait évité les logiques paraconsistantes et autres bidouillages.

Conceptualité : de rares sous-domaines cultivent la technicité, souvent pour elle-même. Ainsi, les *degrés d'indécidabilité* déclinent à n'en plus finir des variantes tordues d'un vrai théorème (Friedberg-Muchnik, 1956) : « les problèmes r.e. indécidables ne sont pas tous équivalents ». C'est difficile sans être profond : une prouesse technique jamais n'abolira le concept.

Standards : rappeler que la logique non monotone contredit l'incomplétude est, paraît-il, *mesquin* ; exiger qu'un calcul des séquents vérifie le *Hauptsatz* serait, de même, *dogmatique* ; refuser un article aux formulations volontairement ambiguës passe pour le comble de l'*élitisme*. Pourtant, un mathématicien qui *compléterait* des opérateurs non bornés se ferait « jeter » ; et, dans la vie courante, personne n'achèterait une voiture sans freins ; pas plus, d'ailleurs, qu'un médicament aux propriétés incertaines.

Universalité : la logique développe des concepts à usage purement interne, un peu comme les devises non convertibles des ci-devant « démocraties populaires ». Un topologue peut-il entendre parler sans sourire des domaines de Scott, cette topologie « non convertible » ?

J'ai personnellement essayé de rapprocher la théorie de la démonstration des « vraies » mathématiques, en particulier de l'analyse fonctionnelle.

J'ai été précédé (et comment !) dans cette voie par mes collègues de théorie des modèles ; on pourra tout au plus leur reprocher la rançon de leurs succès en *géométrie algébrique* : ils sont, en effet, de moins en moins logiciens.

A l'exact antipode de ce livre, la théorie des ensembles est d'un essentialisme forcené : l'infinité de l'infinité de l'infini. Cela dit, cet essentialisme est tellement excessif qu'il en redevient paradoxalement *honnête* — en opposition avec l'essentialisme usuel, le *Deus ex machina* « auto-amnistiant ». Il est difficile de croire que certains travaux, comme ceux de Woodin, n'ont pas un sens profond, au-delà de ce Kamtchatka des mathématiques que constituent les *grands cardinaux*.

Le travail de Dehornoy [14] est, à ce titre, exemplaire. Partant d'un non-sens ensembliste, les *injections élémentaires* de l'univers dans lui-même, il observe que les susnommées sont *auto-distributives* :

$$j(kl) = j(k)j(l) \tag{E.1}$$

La recherche de structures *mathématiques* liées à l'équation (E.1) amène au groupe des *tresses* et à des résultats non triviaux sur l'ordonnabilité de ces groupes. De l'infini le plus infini à la topologie de basse dimension : cela montre que de vraies structures mathématiques sont présentes, ne serait-ce que par délégation, dans les délire ensemblistes. . . qui ne sont donc pas aussi délirants que cela, à condition de trouver l'angle de lecture adéquat.

L'épistémologie

Si j'ai fait de la logique et non pas de l'analyse, c'est à la suite d'accidents de jeunesse ; mais ces accidents sont-ils vraiment accidentels ? En effet, la logique est pour moi — et beaucoup d'autres — une discipline fascinante, une fenêtre *magique* sur le monde : à la fois science et regard sur la science.

Ce regard sur la science suppose des interlocuteurs; autrefois, le regard décapant d'un Kreisel palliait, tant bien que mal, le manque d'*épistémologues* compétents. Passons rapidement sur une variété assez insignifiante, celle des docteurs ès imparfait du subjonctif, déclinaisons allemandes et autres cachets de la poste. Mais que dire de cette autre espèce, celle des *logiciens amateurs*? Avec la musique, i.e., l'idéologie des fondements bétonnés, mais sans les paroles, i.e., un *minimum* de savoir-faire, ils ont fait progresser... le *faux en écriture*: langages abscons, formalismes fumeux, obscurité soigneusement entretenue. Ces définitions boiteuses, ces résultats non reproductibles dénotent un mépris des standards scientifiques: au cri de « l'élitisme à la lanterne! » — comprendre « demain on publie *gratis* » —, ils posent volontiers aux révolutionnaires, ... alors qu'ils sont les pires suppôts du Trône et de l'Autel.

Il s'agit bien d'un désastre écologique: une fée maligne a changé les épistémologues — dont la science a cruellement besoin — en « logiciens » épistémiques — dont elle n'a rien à faire. D'où l'idée un peu utopique de recréer le milieu détruit, de restaurer un dialogue interrompu, quitte à pécher parfois par naïveté: tentons-nous (LIGC, *infra*) de réinstaller le loup (l'épistémologue) dans les montagnes (la science vivante)? Un peu sans doute; pauvre loup, il y a des jours où ta peau ne vaut pas cher!

Le groupe de réflexion pluridisciplinaire¹⁰ (mathématiques, physique, informatique, biologie, logique et épistémologie) LIGC « Logique et Interaction: pour une Géométrie de la Cognition »:

<http://www-philosophie.univ-paris1.fr/Joinet/ligc.html>

est tout, sauf un lieu de pensée unique, encore moins une secte. S'il fallait condenser en une ligne l'« esprit LIGC », ce serait:

Subjectif, mais pas subjectiviste.

Ce slogan — kantien sinon dans la forme, du moins dans l'esprit — réfère à la *constitution du sujet*; un sujet auquel il importe de restituer sa place si l'on veut éviter de prendre pour un absolu ce qui n'est qu'un attribut du miroir.

NON SI NON LA

¹⁰Les notes des pp. 294, 337, 418 renvoient à cette pluridisciplinarité; tout comme la relecture de la logique à la lumière de l'opposition existence/essence. Voir aussi la tentative de synthèse [37].