Rendez-vous avenue Henri-Martin ou comment gagner au Monopoly grâce aux chaînes de Markov

Sébastien Ferenczi, Rémy Jaudun, Brigitte Mossé
Laboratoire de Mathématiques Discrètes
CNRS - UPR 9016
Case 930 - 163 av. de Luminy
13288 Marseille Cedex 9

January 2, 2006

1 Le jeu de Monopoly

Cet article est essentiellement destiné à ceux qui connaissent déjà le Monopoly ; nous rappellerons brièvement que le jeu se présente comme une marche aléatoire sur un plateau de jeu de 40 cases, aux instructions desquelles les joueurs doivent se conformer. Ces instructions peuvent modifier, soit le déplacement du joueur, soit sa situation financière, soit les deux. Le but du jeu est de se rendre propriétaire de certaines cases, désignées par des noms de *rues* (dans le jeu d'origine, des rues d'Atlantic City ; nous étudierons ici la traduction franaise qui utilise des rues parisiennes, mais le modèle est exportable dans tous les pays y compris l'ex-URSS), d'y construire des *maisons* et *htels* , et de percevoir de tout joueur s'arrêtant sur ses possessions des loyers de préférence élevés. Le premier joueur qui a ruiné tous les autres est déclaré vainqueur.

Les tarifs d'achat et de construction, ainsi que les loyers, varient suivant les *quartiers*, et la clef du succès est évidemment de s'approprier les quartiers les plus rentables ; toutefois, un élément non fourni par le constructeur et objet de chaudes dscussions est la probabilité qu'a un joueur de tomber sur chaque rue ; il est immédiat, en raison de la position particulière de la *prison* (voir 2), que les rues ne sont pas équiprobables, mais tous les raisonnements empiriques en déduisant l'intérêt d'acheter la place Pigalle ont conduit des générations de joueurs à la frustration, la ruine, voire au suicide. D'autres facteurs règlent en effet les déplacements des joueurs...

Or, il existe un moyen simple de modéliser rigoureusement les déplacements sur le plateau de jeu, sous formre d'une chaîne de Markov (avec quelques restrictions que nous examinerons), et d'en déduire la probabilité qu'auraient les joueurs de tomber sur chaque case si le jeu avait une durée infinie ; en pratique, les puissances de matrices convergeant vite, nous pouvons maintenant affirmer avec certitude quelles sont les rues les plus probables ; à bon entendeur, salut.

2 Les règles de déplacement

Les joueurs se déplacent sur des cases que nous numéroterons de 0 (Départ) à 39 (rue de la Paix), 0 faisant suite à 39. Quand commence son tour de jeu, le joueur, situé sur la case i, jette deux dés à 6 faces, obtient un résultat n, et pose son pion sur la case $j = i + n(modulo \quad 39)$; il suit alors les instructions de cette case, que nous allons décrire seulement dans la mesure où elles affectent le déplacement :

- si $j = 30$ (Allez en prison) le joueur va immédiatement à la case 10 (Prison).
- si $j = 2, 17, 33$, le joueur tire une carte *Caisse de Communauté* ; ces cartes sont au nombre de 16 ; 12 d'entre elles n'affectent pas les déplacements ; une enjoint au joueur d'aller se placer sur la case 0 (Départ), une sur la case 1 (Belleville), une sur la case 10 (Prison) ; la dernière donne le choix entre payer une amende de 1000F ou tirer une carte *Chance* . La carte tirée est remise en bas du paquet, à l'exception d'une, la carte "sortez de prison", que le joueur peut conserver.
- si $j = 7, 22, 36$, le joueur tire une carte de *Chance* ; ces cartes sont au nombre de 16 ; 9 d'entre elles n'affectent pas le déplacement ; 6 d'entre elles envoient le joueur respectivement sur les cases 0, 10, 11 (boulevard de la Villette), 15 (gare de Lyon), 24 (avenue Henri-Martin), 39 ; la dernière le fait reculer de trois cases, ce qui, dans le cas $j = 36$, oblige le joueur à tirer une carte *Caisse de Communauté* . Les cartes *Chance* sont replacées dans les mêmes conditions que précédemment.

D'autre part, si le joueur fait un *double*, c'est-à-dire si le résultat des dés est composé de deux nombres identiques, il rejoue immédiatement ; s'il fait trois *doubles* consécutifs, le troisième n'est pas comptabilisé et le joueur va en prison (case 10).

Si $j = 10$, le joueur se trouve en prison pour une simple visite et continue à jouer normalement ; en revanche, si un joueur arrive à la case "Prison" par tout autre moyen, il doit y rester pendant un nombre de tours variant entre un et trois en fonction à la fois de résultats de jets de dés et d'une décision personnelle ; ses déplacements ultérieurs sont affectés dans la mesure où, en raison de ces règles que nous n'avons pas détaillées, il a plus de chances de quitter la case "Prison" avec un *double* qu'avec tout autre résultat des dés. Cette différence, difficile à quantifier en raison de l'intervention du libre-arbitre, semble négligeable devant les autres paramètres.

3 Le modèle mathématique simplifié

Pour plus de clarté, nous commencerons par nous passer de trois points de la règle qui présentent quelques difficultés ; ce sont

- A) la possibilité de tirer une carte *Chance* enjoignant de reculer de trois cases puis, à la suite de ce mouvement, de devoir tirer une carte *Caisse de Communuté* .
- B) la carte de *Caisse de Communauté* qui donne le choix entre payer une amende et tirer une carte de *Chance* .
- C) la règle des trois doubles consécutifs menant en prison.

D'autre part, nous nous intéressons à la probabilité d'**arriver** sur une case, et plus particulièrement, pour des raisons financières évidentes, une case de rue ; nous ne cherchons pas à savoir combien de temps les joueurs restent en prison, et le passage par une case "Chance" n'est pas comptabilisé s'il précède immédiatement un déplacement imposé par une carte.

Dans ces conditions, la position d'un joueur sur le tableau de jeu est donnée par une chaîne de Markov à 40 états (dont un de probabilité nulle, l'état 30 correspondant à la case "Allez en prison") dont les probabilités de transition se calculent de la manière suivante :

soit q_i la probabilité d'obtenir i avec deux dés à six faces ; on a

$$q_2 = q_{12} = 1/36 \quad q_3 = q_{11} = 2/36 \quad q_4 = q_{10} = 3/36 \quad q_5 = q_9 = 4/36 \quad q_6 = q_8 = 5/36 \quad q_7 = 6/36$$

On a alors

$$p_{ij} = p_{ij}^N + p_{ij}^C + p_{ij}^H$$

où, toutes les différences étant prises modulo 40,
$p_{ij}^N = (9/16)q_{j-i}$ si j = 7, 22, 36,
$p_{ij}^N = (13/16)q_{j-i}$ si j = 2, 17, 33,
$p_{ij}^N = q_{10-i} + q_{30-i}$ si j = 10,
$p_{ij}^N = 0$ si j = 30,
$p_{ij}^N = q_{j-i}$ pour toutes les autres valeurs de j.

$p_{ij}^C = (1/16)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i})$ si j = 0, 1, 10,
$p_{ij}^C = 0$ pour les autres valeurs de j.

$p_{ij}^H = (1/16)(q_{7-i} + q_{22-i} + q_{36-i})$ si j = 0, 10, 11, 15, 24, 39,

$p_{ij}^H = (1/16)(q_{7-i})$ si j = 4,
$p_{ij}^H = (1/16)(q_{22-i})$ si j = 19,
$p_{ij}^H = (1/16)(q_{36-i})$ si j = 33,
$p_{ij}^H = O$ pour les autres valeurs de j.

Les trois p_{ij} représentent respectivement la probabilité d'accéder de i à j directement, par l'intermédiaire d'une carte *Caisse de Communauté* et par l'intermédiaire d'une carte *Chance* .

4 Le modèle mathématique complet

Nous ajoutons maintenant la règle A), c'est-à-dire que le joueur qui a tiré une carte *Chance* à la case 36 peut ensuite devoir tirer une carte *Caisse de Communauté* à la case 33. Il faut alors modifier les p_{ij}^C de la manière suivante:
$p_{ij}^C = (1/256)(q_{36-i})$ si j = 1,
$p_{ij}^C = (1/16)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i}) + (1/256)q_{36-i}$ si j = 0, 10,
$p_{ij}^C = (13/256)(q_{36-i})$ si j = 33,
p_{ij}^C est inchangée pour les autres valeurs de j.

La règle B) est a priori informalisable puisqu'elle fait appel à un choix humain ; em première approximation, nous déciderons que chaque joueur a une probabilité a de décider de tirer une carte *Chance* et une probabilité 1-a de payer l'amende. En pratique, le montant de cette amende est négligeable par rapport aux autres sommes intervenant dans le jeu, et un joueur expérimenté choisira plutt le risque (a=1) en début de partie et la sécurité (a=0) en fin de partie. On doit alors rempacer les p_{ij} par des $p_{ij}(a)$ de la manière suivante (la carte "recul de trois cases" créant des cas supplémentaires):

$$p_{ij}(a) = p_{ij}^N(a) + p_{ij}^C(a) + p_{ij}^H(a)$$

où, toutes les différences étant prises modulo 40,
$p_{ij}^N(a) = (9/16)q_{j-i}$ si j = 7, 22, 36,
$p_{ij}^N(a) = (12/16 + (1-a)/16 + 9a/256)q_{j-i}$ si j = 2, 17, 33,
$p_{ij}^N(a) = q_{10-i} + q_{30-i}$ si j = 10,
$p_{ij}^N(a) = 0$ si j = 30,
$p_{ij}^N(a) = q_{j-i}$ pour toutes les autres valeurs de j.

$p_{ij}^C(a) = (1/16 + a/256)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i})$ si j = 0,
$p_{ij}^C(a) = (1/16)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i})$ si j = 1,
$p_{ij}^C(a) = (1/16 + a/256)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i}) + (a/256)q_{33-i}$ si j = 10,
$p_{ij}^C(a) = (a/256)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i})$ si j = 11, 15, 24,
$p_{ij}^C(a) = (a/256)q_{17-i}$ si j = 14,// $p_{ij}^C(a) = (a/256)(q_{2-i} + q_{17-i} + q_{33-i}) +$

$(a/256)q_{2-i}$ si j = 39,
$p^C_{ij}(a) = 0$ pour les autres valeurs de j.

$p^H_{ij}(a) = (1/16)(q_{7-i} + q_{22-i} + (1 + a/240)q_{36-i})$ si j = 0, 10, 11, 15, 24, 39,
$p^H_{ij}(a) = (1/16)(q_{7-i})$ si j = 4,
$p^H_{ij}(a) = (1/16)(q_{22-i})$ si j = 19,
$p^H_{ij}(a) = (1/16)(12/16 + (1 - a)/16 + a/240)(q_{36-i})$ si j = 33,
$p^H_{ij}(a) = 0$ pour les autres valeurs de j.

Il reste à rajouter la règle C) ; pour ne pas introduire de chaînes de Markov à trois étapes, nous utiliserons le modèle simplifié suivant :

on garde le résultat du jet de dés seulement s'il ne mène pas en prison, c'est-à-dire s'il n'est pas un troisième double consécutif ; cela revient à diminuer les q_i de 1/1296 pour tous les i pairs, et à augmenter à la fin tous les p_{i10} de 1/216.

5 Les résultats

Nous incorporons successivement les modifications dans le modèle ; en ce qui concerne la règle B), nous ferons les calculs d'abord avec a = 1 (situation du début de partie) puis avec a =0 (situation de fin de partie). Nous obtenons donc finalement une matrice 39 sur 39 (l'état 30 disparaissant) stochastique régulière, et nous calculons la ditribution stationnaire de celle-ci en résolvant les 39 équations associées avec la contrainte que la somme des coordonnées vaille 1. Un programme simple utilisant la méthode de Gauss donne les valeurs suivantes pour les probabilités d'arriver sur les rues considérées, en début de partie et en fin de partie :

- 1)boulevard de Belleville : 0,02607 puis 0,02614
- 3)rue Lecourbe : 0,02198 puis 0,02200
- 5)gare Montparnasse : 0,02260 puis 0,02260
- 6)rue de Vaugirard : 0,02318 puis 0,02318
- 8)rue de Courcelles : 0,02345 puis 0,02350
- 9)avenue de la République : 0,02297 puis 0,02305
- 11)boulevard de la Villette : 0,02708 puis 0,02684
- 12)compagnie de distribution d'électricité : 0,02276 puis 0,02281
- 13)avenue de Neuilly : 0,02367 puis 0,02370
- 14)rue de Paradis : 0,02483 puis 0,02471

- 15)gare de Lyon : 0,03140 puis 0,03105
- 16)avenue Mozart : 0,02801 puis 0,02795
- 18)boulevard St-Michel : 0,02948 puis 0,02938
- 19)place Pigalle : 0,03071 puis 0,03063
- 21)avenue Matignon : 0,02818 puis 0,02813
- 23)boulevard Malesherbes : 0,02711 puis 0,02712
- 24)avenue Henri-Martin : 0,03200 puis 0,03173
- 25)gare du Nord : 0,02722 puis 0,02724
- 26)faubourg St-Honoré : 0,02726 puis 0,02727
- 27)place de la Bourse : 0,02700 puis 0,02699
- 28)compagnie de distribution des eaux : 0,02661 puis 0,02659
- 29)rue la Fayette : 0,02627 puis 0,02623
- 31)avenue de Breteuil : 0,02679 puis 0,02671
- 32)avenue Foch : 0,02602 puis 0,02597
- 34)boulevard des Capucines : 0,02464 puis 0,02461
- 35)gare St-Lazare : 0,02380 puis 0,02379
- 37)avenue des Champs-Elysées : 0,02140 puis 0,02143
- 39)rue de la Paix : 0,02631 puis 0,02599

On constate donc que l'avenue Henri-Martin est la plus fréquentée ; si l'on groupe les rues par *quartiers* , c'est le quartier "orange" (16-18-19) qui l'emporte de peu sur le quartier "rouge" (21-23-24) ; si l'on considère le rendement par tour de jeu, c'est-à-dire le quotient de l'investissement à réaliser par le produit du loyer par la fréquence de passage, c'est encore le quartier orange qui l'emporte avec 0,04131, devant le quartier jaune (26-27-29) avec 0,0378 ; ces derniers chiffres ne sont pas entièrement significatifs, car il faudrait aussi avoir une estimation de la duréee moyenne du jeu, le capital investi restant fixe.