Chapitre 4

Finitude de l'ensemble des motifs n-aires k-inévitables $(k \geqslant 2)$

Ursula Schmidt [56] a démontré que tous les motifs binaires de longueur 13 ou plus sont 2-évitables (Peter Roth [53] a ensuite ramené cette longueur à 6). Cela veut dire qu'il y a un nombre fini de motifs binaires 2-inévitables, et donc de motifs binaires k-inévitables pour $k \geqslant 2$ puisque tout motif k-inévitable est aussi 2-inévitable. On peut se demander si cette propriété est vraie pour n'importe quel nombre de variables : l'alphabet Δ étant fixé, y a-t-il dans Δ^* un nombre fini de motifs 2-inévitables, et si oui peut-on borner leur longueur en fonction de la taille n de Δ ?

Dans ce chapitre, nous répondons par l'affirmative à cette question, au moyen de deux constructions différentes. La première utilise des DOL-langages et donne une borne en $O\left(48^{2^n}\right)$; la seconde, avec des HDOL-langages, permet d'améliorer cette borne à $O\left(5^n\right)$

Cette étude a été réalisée en collaboration avec Peter Roth.

4.1 Introduction : ℓ_{nk}

Pour commencer, nous allons résumer les résultats connus concernant la longueur des motifs k-inévitables à n variables. La notation suivante nous sera utile :

Notation: On note ℓ_{nk} le plus petit entier l (ou ∞ s'il n'y a pas d'entier ayant cette propriété) tel que tout motif n-aire de longueur l est k-évitable. Par convention, k peut également être ∞, auquel cas « k-évitable » signifie « évitable ».

Plus généralement, si, pour tout alphabet Σ, $\mathscr{L}(\Sigma)$ est une famille de langages sur Σ (en pratique $\mathscr{L}$ sera DOL ou HDOL, ou la famille de tous les langages quand $\mathscr{L}$ n'est pas indiqué), on note $\ell_{nk}^{\mathscr{L}}$ le plus petit entier l tel que tout motif n-aire de longueur l est $\mathscr{L}(\Sigma_k)$-évitable, avec les mêmes conventions pour ∞.

Il est clair que

$$\ell_{nk}^{\mathscr{L}} \leqslant \ell_{n'k'}^{\mathscr{L}'} \tag{4.1}$$

si $n \leqslant n'$, $k \geqslant k'$ et $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$. Il est aussi bien connu (cf. proposition 1.8 et [65]) que $\ell_{n\infty} = \ell_{n\infty}^{\mathrm{HDOL}} = \ell_{n\infty}^{\mathrm{DOL}} = 2^n$. Le résultat d'Ursula Schmidt [56] s'écrit simplement $\ell_{22} \leqslant 13$, celui de Peter Roth [53] $\ell_{22} = 6$, et celui de Silke Nilgens [47] $\ell_{33} = 8$.

Les questions que l'on peut se poser sont : est-ce que tous ces nombres sont finis ? Que valent-ils exactement, ou à défaut peut-on les encadrer ? Quel est le plus petit k tel que $\ell_{nk} = \ell_{n\infty}$?

Cette dernière question est à relier au problème de trouver des motifs évitables k-inévitables, qu'on ne sait pas résoudre pour $k > 3$, et comme le motif trouvé par Baker, McNulty et Taylor [5] pour $k = 3$ a 7 variables et est bien plus court que 2^7, on n'a aucun moyen de dire que ℓ_{nk} n'est pas égal à 2^n pour $k > 2$.

Si on sait montrer que tous les motifs à n variables sont évitables sur un alphabet à N_n lettres, on peut en déduire que $\ell_{nk} = 2^n$ pour $k \geqslant N_n$. La construction de [5] donne $N_n \leqslant 4(n+2)\lceil\log(n+2)\rceil$, et Mel'ničuk [30] a montré que l'on peut prendre $N_n = 4\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$.

Dans les sections suivantes, nous allons montrer que ℓ_{nk}, $\ell_{nk}^{\mathrm{HDOL}}$ et ℓ_{nk}^{DOL} sont finis pour tout n et tout $k \geqslant 2$. D'après l'inégalité (4.1) il suffit d'étudier ℓ_{n2}^{DOL}. Nous étudierons aussi $\ell_{n2}^{\mathrm{HDOL}}$, qui donne une meilleure borne.

4.2 Les grands motifs n-aires sont 2-DOL-évitables

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les motifs sur l'alphabet $\Delta = \{X_1, \ldots, X_n\}$.

Proposition 4.1. *Supposons donnés $n-1$ entiers $B_1, \ldots, B_{n-1}$ avec $B_i \geqslant 2$. Soit*

$$M = 4B_{n-1} + 3B_{n-2} + 4B_{n-3} + \cdots + iB_{n+1-i} + \cdots + nB_1 + \frac{3n^2+7n+10}{2}$$

et soit P l'ensemble des motifs non vides $p \in \Delta^*$ tels que toute lettre qui apparaît dans p y apparaît au moins M fois et que, pour tout k compris entre 0 et $n-2$, tout facteur q de p de longueur B_k contient toutes les lettres qui figurent dans p, sauf au plus $n-1-k$.

Soit f le morphisme de Σ^* dans lui-même défini comme suit :

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma^* & \longrightarrow & \Sigma^* \\ & a & \longmapsto & a^{B_{n-1}+2}b^n z_0 b^{n+2} z_1 b^{n+4} \dots z_{n-3} b^{3n-4} z_{n-2} b^{3n-2} a b^{3n} \\ & b & \longmapsto & a^{B_{n-1}+2}b^{n+1} z_0 b^{n+3} z_1 b^{n+5} \dots z_{n-3} b^{3n-3} z_{n-2} b^{3n-1} a b^{3n+1} \end{array}$$

où $\Sigma = \{a, b\}$ et $z_k = \left(ab^{k+1}\right)^{B_{n-1-k}-1} a$.

Alors le DOL-langage $L(\Sigma, f, a)$ évite tous les motifs $p \in P$.

Remarque : Notons que si on prend $p \in P$ et qu'on supprime toutes les occurrences des variables dans une certaine partie de Δ, alors le motif obtenu est soit le mot vide, soit un élément de P.

Notons également que la valeur de M a été choisie de telle sorte que

$$M = \max(|f(a)|, |f(b)|) + B_{n-1} + 1 \ .$$

Preuve : Supposons qu'au contraire il existe un motif $p \in P$ qui ne soit pas évité par ce langage. Soit n' le nombre de variables différentes de p : on choisit p de sorte que n' soit minimal. Soit Δ' l'ensemble des variables qui apparaissent dans p. Soit k le plus petit entier tel que $f^k(a)$ contient p. On a alors $f^k(a) = w_1\varphi(p)w_2$, pour un certain morphisme non-effaçant $\varphi\colon \Delta'^* \to \Sigma^*$. Soit Δ'' l'ensemble des variables $Y \in \Delta'$ telles que $\varphi(Y)$ contient aa.

Comme $|\varphi(p)| \geqslant |p| \geqslant M$, le mot $\varphi(p)$ contient nécessairement $a^{B_{n-1}+2}$ (qui apparaît au début de chaque image de lettre par f), donc soit l'ensemble Δ'' est non vide, soit il y a B_{n-1} variables consécutives dans p dont l'image par φ est simplement a. Dans ce dernier cas, puisque par hypothèse toute variable $Y \in \Delta'$ apparaît dans tout facteur de longueur B_{n-1} de p, on a $\varphi(Y) = a$ pour tout Y. Alors $\varphi(p) = a^{|p|}$, ce qui est clairement impossible.

Définissons maintenant une fonction $h\colon \Delta' \to \{0, \dots, 3n+1\}^*$ de la manière suivante : pour $Y \in \Delta'$, on écrit $\varphi(Y)$ sous la forme $b^{j_0}ab^{j_1}a\dots ab^{j_m}$, avec $0 \leqslant j_i \leqslant 3n+1$, et on pose $h(Y) = j_1 j_2 \dots j_{m-1}$ (qui peut être le mot vide si $m \leqslant 1$).

Définition : Appelons *coupure* un couple de mots (u_1, u_2) tels que $u_1u_2 = f(a)$ (ou $f(b)$) et qu'il existe (p_1, p_2) et (v_1, v_2), avec $p_1p_2 = p$, $w_1\varphi(p_1) = f(v_1)u_1$ et $\varphi(p_2)w_2 = u_2 f(v_2)$. Cette coupure est appelée *coupure initiale* quand $h(Y) = \varepsilon$ pour tout Y figurant dans p_1.

Si u est un facteur figurant une seule fois dans $f(a)$, on dit que u est *coupé* s'il existe une coupure non initiale (v_1u_1, u_2v_2) où u_1 et u_2 sont des mots non vides tels que $u_1u_2 = u$.

La suite de la preuve de la proposition 4.1 repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Il existe un entier r dans l'ensemble $\{n, n+2, \dots, 3n\}$ tel que ab^ra n'est pas coupé, et de même il existe un entier s dans l'ensemble $\{n+1, n+3, \dots, 3n+1\}$ tel que ab^sa n'est pas coupé.*

Preuve : Supposons au contraire que tous les $ab^r a$ sont coupés. Soit j ($0 \leqslant j \leqslant n$) tel qu'il n'existe pas de variable $Y \in \Delta'$ pour laquelle $h(Y)$ se termine par j, et minimal pour cette propriété. Il existe un tel j, car les $n+1$ valeurs $0, \ldots, n$ ne peuvent pas toutes apparaître à la fin des n' mots $h(Y)$. Soit F l'ensemble des $Y \in \Delta'$ telles que le dernier symbole de $h(Y)$ n'est pas dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ (cela inclut le cas $h(Y) = \varepsilon$). Cet ensemble F possède au plus $n' - j$ éléments, car il y a au moins j variables différentes $Y \in \Delta'$ pour lesquelles $h(Y)$ se termine par un élément de $\{0, 1, \ldots, j-1\}$. Le mot $ab^{n+2j}a$ est coupé, on peut donc écrire $w_1\varphi(p_1) = f(v_1)u_1ab^{i_1}$ et $\varphi(p_2)w_2 = b^{i_2}au_2f(v_1)$ avec $p = p_1p_2$, $i_1 + i_2 = n + 2j$ et $u_1ab^{n+2j}au_2 = f(a)$. Soit Y la dernière variable de p_1 telle que $h(Y) \neq \varepsilon$ (elle existe car la coupure n'est pas initiale), et $Y_1, \ldots, Y_m$ les variables qui suivent Y dans p_1. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, le mot $\varphi(Y_i)$ contient au plus un a, et u_1 se termine par $ab^{n+2j-2}(ab^j)^{B_{n-j}-1}$ (ou $u_1 = a^{B_{n-1}+1}$ si $j = 0$), par conséquent si $m < B_{n-j} - 1$ (ou $m \leqslant B_{n-1}$ si $j = 0$), les deux derniers a dans $\varphi(Y)$ sont séparés par b^j et $h(Y)$ se termine par le symbole j, une contradiction. D'un autre côté $m \geqslant B_{n-j}$ (ou $m \geqslant B_{n-1}$ si $j = 0$) est impossible d'après la définition de P car $Y_1 \ldots Y_m$ contient au plus $n' - j$ lettres différentes ($n' - 1$ si $j = 0$). Le seul cas restant est $j \neq 0$, $m = B_{n-j} - 1$; alors $h(Y)$ se termine par $n + 2j - 2$ ou j, donc $Y \in F$, et $YY_1 \ldots Y_m$ contredit à nouveau la définition de P. ■

Soit maintenant ψ l'application de Δ' dans Σ^* définie par $\psi = g \circ h$, où $g(r) = a$, $g(s) = b$ et $g(j) = \varepsilon$ pour toutes les autres valeurs de j, les entiers r et s étant donnés par le lemme 4.1. On prolonge ψ en un morphisme de Δ'^* dans Σ^*. Alors $\psi(p)$ est facteur de $f^{k-1}(a)$: en effet, chaque occurrence de $f(a)$ dans $\varphi(p)$ est marquée par le mot non coupé $ab^r a$, et correspond donc à un a dans $\psi(p)$, et de même chaque occurrence de $f(b)$ dans $\varphi(p)$ correspond à un b dans $\psi(p)$. Soit p' le motif obtenu en effaçant dans p les variables Y pour lesquelles $\psi(Y) = \varepsilon$. Comme p contient au moins une variable dont l'image par φ contient aa, et comme cette variable apparaît au moins M fois dans p, on a $|\varphi(p)| \geqslant 2M$, donc $\varphi(p)$ contient $f(a)$ ou $f(b)$, dans lesquels il y a une occurrence de $ab^r a$ ou $ab^s a$, et il ne peut pas y avoir de coupure initiale dans ce mot à cause du aa correspondant à un élément de Δ'' qui apparaît quelque part avant ce mot. Cela veut dire que $\psi(p) \neq \varepsilon$, et donc que p' n'est pas vide. Si $p' = p$, k n'est pas minimal; si $p' \neq p$, la taille de l'alphabet des variables de p n'est pas minimale. Dans les deux cas on aboutit donc à une contradiction, ce qui achève la preuve de la proposition 4.1. ■

Nous pouvons maintenant démontrer que les nombres ℓ_{k2}^{DOL} sont tous finis, et en calculer un majorant :

Théorème 4.1. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a un nombre fini de motifs à n variables 2-inévitables. Plus précisément, tous les motifs à n variables de longueur supérieure ou égale à $\frac{1}{16}48^{2^{n-1}}$ sont 2-DOL-évitables.*

Preuve : Supposons que nous avons prouvé que pour tout $k < n$, ℓ_{k2}^{DOL} est fini. Posons $B_k = \ell_{k2}^{\mathrm{DOL}}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et appliquons la proposition 4.1 : un motif p de longueur MB_{n-1} à n variables est soit dans P, et alors il est évité par $L(\Sigma, f, a)$, soit contient un facteur p' de longueur B_k à au plus k variables. Dans les deux cas nous pouvons conclure que p est 2-DOL-évitable. Par conséquent, $\ell_{n2}^{\mathrm{DOL}} \leqslant MB_{n-1}$.

Soit (L_n) la suite définie par récurrence comme suit : $L_1 = 3$ et

$$L_n = L_{n-1}\left(2L_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} kL_{n-k+1} + \frac{3n^2+7n+10}{2}\right) .$$

Il est clair que $\ell_{n2}^{\mathrm{DOL}} \leqslant L_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

On voit que $L_n > 2L_{n-1}$, donc $L_{n-k+1} < 2^{-k+2}L_{n-1}$. Comme de plus

$$\frac{3n^2+7n+10}{2} \leqslant 9.2^{n-1} \leqslant 6L_{n-1} ,$$

on a

$$L_n < L_{n-1}^2\left(2 + \sum_{k=2}^{n} 2^{-k+2}k + 6\right) < 16L_{n-1}^2 .$$

Par conséquent $\ell_{n2} \leqslant \ell_{n2}^{\mathrm{DOL}} \leqslant L_n < \frac{1}{16}48^{2^{n-1}}$. ∎

Remarque : Il est bien entendu possible d'améliorer considérablement cette borne, vu la grossièreté des approximations effectuées. Elle resterait toutefois de la forme $O\left(\alpha^{2^n}\right)$.

4.3 Une meilleure borne avec des HDOL-systèmes

Dans [5], Baker, McNulty et Taylor construisent un mot infini W_n sur un alphabet à N_n lettres, où $N_n \leqslant 4(n+2)\lceil\log(n+2)\rceil$, qui évite tous les motifs évitables à au plus n variables. Ce mot est obtenu comme point fixe d'un morphisme, donc il est équivalent à un DOL-système. Il est construit par le procédé suivant : soit m et z des entiers tels que $z > 0$ et $m > (n+1)z$, et $N_n = mb$ avec $b = \left\lceil m^{1/z}\right\rceil$ (on peut choisir m et z de façon à avoir l'inégalité annoncée ci-dessus, à savoir $z = \lceil\log(r+2)\rceil$ et $m = z(r+2)$). Le mot infini $W_n = \Omega_{m,z}$ est le point fixe du morphisme $h_{m,z} : \Sigma^* \to \Sigma^*$, uniforme de longueur m sur l'alphabet $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_{N_n-1}\}$, défini par $h(a_i) = a_{md_0^i+0}a_{md_1^i+1}a_{md_2^i+2}\cdots a_{md_{m-1}^i+m-1}$ où d_0^i, d_1^i,..., d_{z-1}^i sont les chiffres du développement de i en base b, en commençant par le chiffre le moins significatif, la suite d_j^i étant prolongée cycliquement par $d_{j+z}^i = d_j^i$.

Comme dans la section précédente, nous allons pour tout n construire un morphisme dépendant de $n-1$ entiers B_k, mais ce morphisme servira cette fois à coder le mot W_n sur l'alphabet binaire, et non à construire un DOL-langage.

Proposition 4.2. *Supposons donnés $n-1$ entiers $B_1, \ldots, B_{n-1}$ supérieurs ou égaux à 2. Soit*

$$M = 4B_{n-1} + 3B_{n-2} + 4B_{n-3} + 5B_{n-4} + \cdots + nB_1 + T_n$$

avec $T_n = \frac{(N_n-1)(n+1)(n+2)}{2} + n^2 + 2n + 4$, et soit P l'ensemble des motifs non vides p de longueur M ou plus tels que, pour tout k compris entre 1 et $n-1$, tout facteur q de p de longueur B_k contient au moins $k+1$ variables distinctes.

Considérons le morphisme :

$$\begin{array}{rccl} g: & \Sigma^* & \longrightarrow & \Sigma'^* \\ & a_k & \longmapsto & a^{B_{n-1}+2} b^{n+k} z_0 b^k z_1 b^k \ldots z_{n-3} b^k z_{n-2} b^k a b^{n+nN_n+k} \end{array}$$

où $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{N_n-1}\}$, $\Sigma' = \{a, b\}$ et $z_k = \left(ab^{k+1}\right)^{B_{n-1-k}-1} ab^{n+(k+1)N_n}$.

Alors le mot infini $g(W_n)$ évite tous les motifs $p \in P$.

Remarque : Si on prend $p \in P$ et que l'on supprime toutes les occurrences des variables d'un certain sous-ensemble de Δ, alors on obtient soit le mot vide soit un motif qui n'est pas nécessairement dans P mais qui est toujours évitable (par la proposition 1.7) car il ne contient pas de variable isolée : puisque $M \geqslant 4B_{n-1}$, toute variable apparaît au moins quatre fois.

La valeur de M a été choisie de telle sorte que $M = \max(|g(a_k)|) + B_{n-1} + 1$.

Preuve : La preuve est similaire à celle de la proposition 4.1, et n'est pas détaillée ici. ∎

Comme à la section précédente, cette proposition permet de montrer que

Théorème 4.2. *La longueur ℓ_{n2}^{HDOL} à partir de laquelle tous les motifs à n variables sont 2-HDOL-évitables (et donc 2-évitables) est bornée par*

$$\ell_{n2} \leqslant \ell_{n2}^{HDOL} = O\left(\lambda^n\right)$$

pour toute base $\lambda > \frac{1}{1-2^{-\frac{1}{3}}} \simeq 4,847322102$ (par exemple $\lambda = 5$).

Preuve : Supposons que nous avons prouvé que pour $k < n$, tout motif de longueur S_k à k variables est évité par $h(W_j)$ pour un certain entier j ($1 \leqslant j \leqslant k$) et un certain morphisme h. Soient $B_1 = S_1, B_2 = S_2, \ldots, B_{n-1} = S_{n-1}$. Alors un motif p de longueur $S_n = M$ à n variables est soit dans P (auquel cas, d'après la proposition 4.2, il est évité par $g(W_n)$), soit contient un facteur p' de longueur B_k à au plus k variables, qui est évité par un certain $h(W_j)$.

Nous avons montré que tout motif à n variables de longueur S_n ou plus est 2-HDOL-évitable, où la suite (S_n) est définie par $S_1 = 3$ et

$$S_n = 2S_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} kS_{n-k+1} + T_n \quad .$$

Soit $\lambda > \frac{1}{1-2^{-\frac{1}{3}}}$ (de telle sorte que $K = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{-2} + \frac{2}{\lambda} - 1 < 1$) et

$$C = \max\left(\frac{3}{\lambda}, \frac{1}{1-K} \max_{n \geqslant 1}\left(\frac{T_n}{\lambda^n}\right)\right) \quad .$$

Alors $S_n \leqslant C\lambda^n$, car $3 = S_1 \leqslant C\lambda$ et si $S_k \leqslant C\lambda^k$ pour $1 \leqslant k < n$,

$$S_n \leqslant C\lambda^n \left(\frac{2}{\lambda} + \sum_{k=2}^{n} k\lambda^{1-k} + \frac{T_n}{C\lambda^n}\right)$$

avec $\frac{2}{\lambda} + \sum\limits_{k=2}^{n} k\lambda^{1-k} < K$ et $\frac{T_n}{C\lambda^n} \leqslant 1 - K$. On remarquera que l'expression de N_n, et donc de T_n, n'influe que sur la valeur de la constante C, pourvu que $N_n = o(n^{-2}\lambda^n)$. ■

4.4 Valeurs connues de ℓ_{nk}

Le tableau 4.1 résume les valeurs connues de ℓ_{nk}. La colonne $n = 1$ est connue depuis A. Thue, la colonne $n = 2$ depuis les travaux de P. Roth (cf. chapitre 2), et la colonne $n = 3$ résulte de notre classification partielle des motifs ternaires (cf. annexe A). La ligne $k = \infty$ résulte de la proposition 1.8. On notera que les valeurs indiquées dans ce tableau sont aussi des valeurs de $\ell_{nk}^{\mathrm{HDOL}}$ puisqu'elles sont toutes obtenues au moyen de DOL-systèmes ou de HDOL-systèmes.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k = 1$	∞	∞	∞	∞
$k = 2$	3	6	12	
$k = 3$	2	4	8	
$k = 4$	2	4	8	
$k = 5$	2	4	8	
$k = \infty$	2	4	8	16

TAB. 4.1 - *Valeurs connues de ℓ_{nk}*

Le tableau 4.2 est l'équivalent du précédent pour ℓ_{nk}^{DOL}. La colonne $n = 1$ est identique, la première différence se situant dans la colonne $n = 2$: d'après le théorème 3.5, $\ell_{22}^{\mathrm{DOL}} = 7$; la colonne $n = 3$ résulte également de la classification partielle des motifs ternaires. Enfin, la ligne $k = \infty$ est identique en vertu de la proposition 3.3.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k = 1$	∞	∞	∞	∞
$k = 2$	3	7	15	
$k = 3$	2	4	8	
$k = 4$	2	4	8	
$k = 5$	2	4	8	
$k = \infty$	2	4	8	16

TAB. 4.2 - *Valeurs connues de ℓ_{nk}^{DOL}*

Finalement, au vu des valeurs de ℓ_{nk} et ℓ_{nk}^{DOL} pour $n = 1, 2, 3$, nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. *Pour tout $n \geqslant 1$, $\ell_{n2} = \ell_{n2}^{HDOL} = 3.2^{n-1}$, $\ell_{n2}^{DOL} = 2^{n+1} - 1$, et pour $k \geqslant 3$, $\ell_{nk} = \ell_{nk}^{HDOL} = \ell_{nk}^{DOL} = 2^n$.*

Il est en tout cas certain que ces valeurs sont des minorants :

Proposition 4.3. *Pour tout $n \geqslant 1$, $\ell_{n2}^{HDOL} \geqslant \ell_{n2} \geqslant 3.2^{n-1}$, $\ell_{n2}^{DOL} \geqslant 2^{n+1} - 1$, et pour $k \geqslant 3$, $\ell_{nk}^{DOL} \geqslant \ell_{nk}^{HDOL} \geqslant \ell_{nk} \geqslant 2^n$.*

Preuve : Pour $k \geqslant 3$, cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition 1.8 et de l'inégalité (4.1). Pour ℓ_{n2}, comme le motif AA est 2-inévitable, on montre de la même manière qu'à la proposition 1.9 que les motifs R_n, définis par $R_1 = A_1 A_1$ et, pour $n > 1$, $R_n = R_{n-1} A_n R_{n-1}$, de longueur $3.2^{n-1} - 1$, sont 2-inévitables, et donc que ℓ_{n2} ne peut être inférieur à 3.2^{n-1}. Enfin, pour ℓ_{n2}^{DOL}, on considère les motifs $K_n = Z_n Z_n$, carrés des sesquipuissances, de longueur $2^{n+1} - 2$. Pour $n \geqslant 2$, le motif K_n est 2-évitable puisqu'il contient $ABAABA$; mais on vérifie que K_n est contenu d'une part dans $\theta^{2n-2}(aa)$, facteur de la suite de Thue-Morse, et d'autre part dans le multichevauchement O_n, donc est 2-DOL-inévitable par application du théorème 3.4. ∎