Etude de la complexité du mot de Fibonacci généralisé

Julien Cassaigne & Idrissa Kaboré

Résumé: Dans ce papier nous menons une étude générale de la complexité du mot de Fibonacci généralisé $F_{l,k}$ engendré par le morphisme $\sigma_{l,m}$ donné par $\sigma_{l,m}(a) = a^l b^m$ et $\sigma_{l,m}(b) = a$.

Abstract: In this paper we undertake a general study of the complexity function of the generalized Fibonacci word which is generated by the morphism defined by $\sigma_{l,m}(a) = a^l b^m$ and $\sigma_{l,m}(a) = a$.

Mots clés: Facteurs spéciaux, complexité, morphismes.

1 Introduction

La fonction de complexité p, qui compte le nombre de facteurs de longueur donnée dans un mot, est une notion essentielle en combinatoire de mots. Elle est souvent utilisée pour caractériser certains mots ou familles de mots [4, 2]. Soit σ le morphisme du monoïde libre $\{a,b\}^*$ défini par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$. En itérant indéfiniment le morphisme σ à partir de a on obtient un mot infini appelé le mot de Fibonacci $F = abaababaabaabab\cdots$. Le mot de Fibonacci a été largement étudié [1, 9, 7, 10] et est devenu celèbre par ses nombreuses propriétés remarquables. Nous référons le lecteur à [3] pour plus de détails. Sa fonction de complexité est connue: il possède, pour tout entier n, exactement $n+1$ facteurs de longueur n. Le morphisme de Fibonacci généralisé du monoïde libre $\{a,b\}^*$ est le morphisme $\sigma_{l,k}$ défini par $\sigma_{l,m}(a) = a^l b^m$ et $\sigma_{l,m}(b) = a$, pour $l \geq 1$ et $m \geq 2$. En itérant le morphisme $\sigma_{l,m}$ on obtient un mot infini appelé mot de Fibonacci généralisé $F_{l,m}$. Nous nous proposons dans ce travail de mener une étude de la complexité de ces mots.

Le papier est organisé de la façon suivante.

Nous rappelons à la section 2 les définitions et notations de base. Nous décrivons ensuite, à la section 3, les facteurs bispéciaux de $F_{l,m}$. Enfin, à la section 4, nous étudions sa complexité.

2 Préliminaires

La plupart des notations utilisées ici peuvent être retrouvées dans le livre de M. Lothaire [8].

Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet fixé. $\mathcal{A}^*$, l'ensemble des mots finis sur A, est le monoïde libre engendré par A; ε le mot vide étant l'élément neutre. Pour tout $u \in A^*$, $|u|$ désigne le nombre de lettres du mot u ($|\varepsilon| = 0$) et pour toute lettre x de A, $|u|_x$ est le nombre d'occurrences de x dans u. Un mot u de longueur n formé d'une seule lettre x est simplement noté $u = x^n$; par extension $x^0 = \varepsilon$.

Un mot infini est une suite de lettres de A indexée par $\mathbb{N}$. On désigne par A^ω l'ensemble des mots infinis sur A. Un mot fini v est facteur d'un mot u s'il existe deux mots u_1 et u_2 sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tels que $u = u_1 v u_2$; on dit aussi que u contient v. Le facteur v est dit préfixe (resp. suffixe) si u_1 (resp. u_2) est le mot vide.

Soient $u \in A^\omega$, w un facteur de u et x une lettre de A. Le langage des facteurs de longueur n de u est noté $L_n(u)$ et l'ensemble de tous les facteurs de u est noté $L(u)$. La lettre x est un prolongement à gauche (resp. à droite) de w si xw (resp. wx) appartient à $L(u)$. Un facteur v de u est dit spécial à gauche (resp. à droite) si av et bv (resp. va et vb) sont dans u. Un facteur à la fois spécial à gauche et à droite est dit bispécial.

La fonction de complexité de u est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $\mathbf{p}_u(n) = \#L_n(u)$, où $\#L_n(u)$ désigne le cardinal de $L_n(u)$. Dans tout ce qui suit, la fonction de complexité, $\mathbf{p}_u$, d'un mot u sera simplement notée $\mathbf{p}$.

On appelle différence première de la fonction de complexité de u, la fonction notée $\mathbf{s}$ et définie par: $\mathbf{s}(n) = \mathbf{p}(n+1) - \mathbf{p}(n)$. On en déduit la formule $\mathrm{p}(n) = \mathrm{p}(k_0) + \sum_{k=k_0}^{n-1} \mathbf{s}(k)$ Sur un alphabet à deux lettres la fonction $\mathbf{s}$ compte le nombre de facteurs spéciaux à droite d'une longueur donnée dans u.

Un morphisme f est une application de $\mathcal{A}^*$ dans lui-même telle que $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{A}^*$.

On dit qu'un mot infini u est engendré par un morphisme f s'il existe une lettre a telle que les mots a, $f(a)$, $f^2(a)$, $\cdots$, $f^n(a)$, $\cdots$ sont des préfixes de plus en plus longs de u. On note alors $u = f^\omega(a)$.

Soit u un mot infini sur $\mathcal{A}$ et v un facteur de u. Le vecteur de Parikh de v est $\chi(v) = (|v|_a\,, |v|_b)$. On appelle matrice d'incidence d'un morphisme φ

la matrice $M_\varphi = \begin{pmatrix} |\varphi(a)|_a & |\varphi(b)|_a \\ |\varphi(a)|_b & |\varphi(b)|_b \end{pmatrix}$.

3 Facteurs bispéciaux non ordinaires de $F_{l,m}$

Définition 3.1. *Soit u un mot infini sur $\mathcal{A}$ et v un facteur bispécial de u.*

- *v est dit bispécial fort si ava, avb, bva, bvb sont des facteurs de u.*
- *v est dit bispécial faible si uniquement ava et bvb, ou avb et bva, sont des facteurs de u.*
- *v est dit bispécial bispécial ordinaire si v n'est ni fort ni faible.*

Nous décrivons dans le lemme ci-dessous les facteurs bispéciaux non ordinaires de $F_{l,m}$.

Définition 3.2. *Un facteur bispécial de $F_{l,m}$ est dit court s'il ne contient aucun des trois mots a^l, b^m et ba. Un facteur bispécial de $F_{l,m}$ qui n'est pas court sera dit bispécial long.*

Nous décrivons dans les lemmes ci-dessous les facteurs bispéciaux non ordinaires de $F_{l,m}$.

Lemme 3.1.
1. *$F_{l,m}$ possède exactement un facteur bispécial court et faible: b^{m-1}.*
2. *$F_{l,m}$ possède exactement deux facteurs bispéciaux courts et forts qui sont: ϵ, a^l.*

Lemme 3.2. *Soit w un facteur de $F_{l,m}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *w est bispécial long de $F_{l,m}$.*

2. *Il existe un facteur bispécial v de $F_{l,m}$ tel que $w = \hat{\sigma}_{l,m}(v)$ où $\hat{\sigma}_{l,m}(v) = \sigma_{l,m}(v)a^l$.*
   De plus v et w sont de même type et $|v| < |w|$.

Les preuves des lemmes 3.1 et 3.2 utilisent la même technique que celle développée dans [5] et plus récemment dans [6].

En conséquence, nous avons

1. Les facteurs bispéciaux faibles de $F_{l,m}$ sont donnés par la suite (y_n) définie par $y_1 = b^{m-1}$ et $y_{n+1} = \hat{\sigma}_{l,m}(y_n)$ où $\hat{\sigma}_{l,m}(y_n) = \sigma_{l,m}(y_n)\,a^l$ pour $n \geq 1$.
2. Les facteurs bispéciaux forts de $F_{l,m}$ sont donnés par la suite (x_n) définie par $x_0 = \varepsilon$ et $x_{n+1} = \hat{\sigma}_{l,m}(x_n)$ pour $n \geq 0$.

4 Complexité de $F_{l,m}$

Définition 4.1. *Soit $v, w \in A^*$ et $\chi(v), \chi(w)$ leurs vecteurs de Parikh. On dira que $\chi(v)$ est inférieur à $\chi(w)$ et on écrira $\chi(v) \leq \chi(w)$ lorsque $|v|_a \leq |w|_a$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. De plus, si $\chi(v) \neq \chi(w)$, on note $chi(v) < \chi(w)$.*

Proposition 4.1. *Soient v, w, v', w' quatre mots finis tels que $v' = \hat{\sigma}_{l,m}(v)$ et $w' = \hat{\sigma}_{l,m}(w)$. Alors*

$$\chi(v) < \chi(w) \Longrightarrow \chi(v') < \chi(w')$$

Démonstration. D'une part, nous avons $|v'|_a = l\,|v|_a + |v|_b + l$ et $|w'|_a = l\,|w|_a + |w|_b + l$; donc $|v'|_a < |w'|_a$.
D'autre part, nous avons $|v'|_b = m\,|v|_b$ et $|w'|_a = m\,|w|_a$; donc $|v'|_b \leq |w'|_b$. □

Proposition 4.2. *Pour tout $m \geq 2$ on a:*

$$\forall n \geq 0,\ \chi(x_n) < \chi(y_{n+1}) < \chi(x_{n+2})$$

Démonstration. Nous avons $\chi(x_0) < \chi(y_1) < \chi(x_2)$ puisque $x_0 = \varepsilon$, $y_1 = b^{m-1}$ et $x_2 = \left(a^l b^m\right)^l a^l$. Supposons, les inégalités vraies jusqu'à l'ordre n, *i.e.*,

$$\chi(x_n) < \chi(y_{n+1}) < \chi(x_{n+2}).$$

D'après la proposition 4.1 nous avons $\chi(x_{n+1}) < \chi(y_{n+2}) < \chi(x_{n+3})$. □

Le lemme suivant décrit la fonction $\mathbf{s}$.

Lemme 4.1. *Pour tout $n \in N$ on a:*
$\mathbf{s}(n) = 0$ pour $n = 0$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note k le plus grand entier tel que $n > |x_k|$.

1. *Si $k = 0$, on a* $\mathbf{s}(n) = \begin{cases} 2 & si\ 1 \leq n \leq \min(l, m-1) \\ 1 & si\ m \leq n \leq l \end{cases}$.
2. *Sinon, on a* $\mathbf{s}(n) = \begin{cases} 3 & si\ n \leq |y_k| \\ 2 & si\ |y_k| < n \leq |y_{k+1}| \\ 1 & si\ |y_{k+1}| < n \end{cases}$.

Démonstration. La différence première est donnée par la formule suivante

$$\mathbf{s}(n) = 1 + \#\{w \text{ bispecial fort}:\ |w| < n\} - \#\{w \text{ bispecial faible}:\ |w| < n\}.$$

Nous savons que $\mathbf{s}(0) = 0$ et il est facile de d'observer que $\mathbf{s}(n) = 2$ si $1 \leq n \leq \min(l, m-1)$ et $\mathbf{s}(n) = 1$ si $m \leq n \leq l$. Supposons $n \geq |x_1|$. On note k le plus grand entier tel que $n > |x_k|$. Alors, on a:

$$\mathbf{s}(n) = 1 + (k+1) - \begin{cases} k-1 & \text{si } n \leq |y_k| \\ k & \text{si } |y_k| < n \leq |y_{k+1}| \\ k+1 & \text{si } |y_{k+1}| < n \end{cases}.$$

Ce qui prouve le lemme. □

Théorème 4.3. *La complexité de $F_{l,m}$ satisfait les inégalités suivantes:*

$$n+1 \leq \mathbf{p}(n) \leq 3n+1.$$

Démonstration. D'après le lemme 4.1, nous avons

$$\forall n \geq 0,\ 1 \leq s(n) \leq 3.$$

D'où

$$1+\sum_{k=0}^{n-1} 1 \leq p(n) \leq 1+\sum_{k=0}^{n-1} 3.$$

□

Lemme 4.2. *1.* $m \in [1,\ 2l^2+1] \Longleftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0,\ |x_k|-|y_k|>0$

2. $m \in [2l^2+2,\ \infty[\Longleftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0,\ |x_k|-|y_k|<0$

Démonstration. Considérons les suites $(v_k)_{k\geq 1}$ et $(V_k)_{k\geq 1}$ définies par $v_k = |x_k|-|y_k|$ et $V_k = \chi(x_k)-\chi(y_k)$. Nous avons:

$$V_1 = \begin{pmatrix} l \\ -m+1 \end{pmatrix} \text{ et } V_{k+1} = AV_k$$

où $A = \begin{pmatrix} l & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ désigne la matrice d'incidence de $\sigma_{l,m}$. Les valeurs propres de A, étant racines de X^2-lX-m, sont

$$\lambda_1 = \frac{l+\sqrt{l^2+4m}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{l-\sqrt{l^2+4m}}{2}.$$

Observons que $\lambda_1 > l \geq 1$ et $|\lambda_2| < \lambda_1$. Par ailleurs, nous avons

$$\forall k \geq 1,\ v_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} V_k$$

D'où

$$\begin{aligned} v_k =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A^{k-1} \begin{pmatrix} l \\ -m+1 \end{pmatrix} \\ =& \alpha_1\lambda_1^{k-1}+\alpha_2\lambda_2^{k-1} \end{aligned}$$

avec α_1 et α_2 vérifiant le système

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 &= l-m+1 \\ \alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2 &= l^2+lm-m+1 \end{cases}$$

Nous avons

$$\alpha_1 = \frac{l^2 + lm - m + 1 - \lambda_2 (l - m + 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)},$$
$$\alpha_2 = \frac{l^2 + lm - m + 1 - \lambda_1 (l - m + 1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Puisque $|\lambda_2| < \lambda_1$, alors v_k est du signe de α_1 pour k assez grand.

Cas 1 $l-m+1 < 0$. Alors, nous avons $-\lambda_2 (l - m + 1) \geq 0$ car $\lambda_2 < 0$. Donc, $\alpha_1 > 0$ puisque $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ et $l^2 + lm - m + 1 = l^2 + l(m-1) + 1 > 0$.

cas 2 $l - m + 1 \leq 0$. Nous avons:

$$\begin{aligned}\alpha_1 > 0 &\Longleftrightarrow \lambda_2 > \frac{l^2 + lm - m + 1}{l - m + 1} \\ &\Longleftrightarrow \frac{l - \sqrt{l^2 + 4m}}{2} > \frac{l^2 + lm - m + 1}{l - m + 1} \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{l^2 + 4m} < \frac{-l^2 + 3lm + l + 2m - 2}{l - m + 1} \\ &\Longleftrightarrow l^2 + 4m < \frac{(-l^2 + 3lm + l + 2m - 2)^2}{(l - m + 1)^2}\end{aligned}$$

car $-l^2+3lm+l+2m-2 = m(2-3l)-l(l-1)-2 < 0$ et $l-m+1 < 0$. La dernière inégalité peut se ramener à l'inégalité suivante:

$$P_l(m) = m^3+m^2 \left(-2l^2 + l - 3\right)+m \left(-2l^3 + 3l^2 - 2l + 3\right)+l^3-l^2+l-1 < 0$$

Si $l = 1$, $P_l(m) = m(m^2 - 4m + 2)$. Donc, $P_l(m) < 0 \Longleftrightarrow m \in \{2, 3\}$. Supposons désormais $l \geq 2$. La dérivée $P_l'(m) = 3m^2+2m(-2l^2 + l - 3)-2l^3 + 3l^2 - 2l + 3$ admet deux racines de signes contraires

$$\beta_1 = \frac{2l^2 - l + 3 + \sqrt{4l^4 + 2l^3 + 4l^2}}{3} > 0 \text{ et } \beta_2 = \frac{2l^2 - l + 3 - \sqrt{4l^4 + 2l^3 + 4l^2}}{3} < 0$$

pour $l \geq 2$ et est négative entre ces deux racines. Donc, P_l est décroissante sur $[\beta_1, \beta_2]$ qui contient 0 et croît sur $]-\infty, \beta_1] \cup [\beta_2, +\infty[$. De plus, on vérifie que $P_l(0) > 0$, $P_l(1) < 0$, $P_l(2l^2 + 1) < 0$ et $P_l(2l^2 + 2) > 0$. Ce qui implique que, P_l admet deux racines positives m_1 et m_2 et une troisième racine négative m_3 avec $1 < m_1 < 2$, $2l^2 + 1 < m_2 < 2l^2 + 2$ et $m_1 \leq \beta_2 \leq m_2$. Donc, P_l est strictement négative sur $]m_1, m_2[$ et strictement positive sur $]m_2, +\infty[$. Ainsi, $\alpha_1 > 0$ si $m \in [2, 2l^2 + 1]$ et $\alpha_1 < 0$ si $m \geq 2l^2 + 2$.

En défintive, $m \in [2, 2l^2+1]$ et $\alpha_1 > 0$ et pour $m \geq 2l^2+2$, $\alpha_1 < 0$.
Par conséquent, $m \in [2, 2l^2+1]$ équivaut à il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0,\, v_k > 0.$$

□

Théorème 4.4. *1. Si $m \in [1,\ 2l^2+1]$ alors, il existe une constante c telle que*

$$\forall n \geq 0,\, n+1 \leq p(n) \leq 2n+c.$$

2. Si $m \in [2l^2+2,\ +\infty[$ alors, il existe une constante c telle que

$$\forall n \geq 1,\, 2n+c \leq p(n) \leq 3n+1.$$

Démonstration. Supposons $m \in [2, 2l^2+1]$. Alors, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $v_k > 0$. Dans ce cas, pour $n \in]|x_k|,\, |x_{k+1}|]$ on a

$$\mathbf{s}(n) = 1 + (k+1) - \begin{cases} k & \text{si } n \leq |y_{k+1}| \\ k+1 & \text{si } |y_{k+1}| < n \end{cases}.$$

D'où

$$\mathrm{s}(n) = \begin{cases} 2 \quad \text{si } |y_k| < n \leq |y_{k+1}| \\ 1 \qquad\quad \text{si } |y_{k+1}| < n \end{cases}$$

Donc,

$$\forall n \geq v_{k_0}|x_{k_0}|,\, 1 \leq s\,(n) \leq 2.$$

En prenant la somme on obtient les inégalités

$$\sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} 1 \leq \mathbf{p}\,(|x_{k_0}|) + \sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} \mathbf{s}\,(k) \leq \sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} 2$$

Ou encore

$$P\,(|x_{k_0}|) + n - |x_{k_0}| \leq \mathbf{p}(n) \leq \mathbf{p}\,(|x_{k_0}|) + 2\,(n - |x_{k_0}|)$$

D'où

$$n+1 \leq P(n) \leq 2n+c, \text{ avec } \; c \in \mathbb{Z}$$

Supposons $m \geq 2l^2+2$. Alors, d'après le lemme 4.2, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $v_k < 0$.

Dans ce cas, pour $n \in]|x_k|,\, |x_{k+1}|]$ on a

$$\mathrm{s}(n) = 1 + (k+1) - \begin{cases} k-1 & \text{si } n \leq |y_k| \\ k & \text{si } |y_k| < n \end{cases}$$

D'où

$$\mathrm{s}(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \leq |y_k| \\ 2 & \text{si } |y_k| < n \leq |x_{k+1}| \end{cases}$$

Donc,

$$\forall n \geq |x_{k_0}|, 2 \leq s(n) \leq 3.$$

On prenant la somme on obtient

$$\sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} 2 \leq \mathbf{p}\left(|x_{k_0}|\right) + \sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} \mathbf{s}\left(k\right) \leq \sum_{k=|x_{k_0}|}^{n-1} 3.$$

Ou encore

$$\mathbf{p}\left(|x_{k_0}|\right) + 2\left(n - |x_{k_0}|\right) \leq \mathbf{p}(n) \leq \mathbf{p}\left(|x_{k_0}|\right) + 3\left(n - |x_{k_0}|\right).$$

D'où

$$2n + c \leq \mathbf{p}(n) \leq 3n + 1.$$

□

Références

[1] J. Berstel, *Mots de Fibonacci*, L.I.T.P. Séminaire d'Informatique Théorique, Paris (1980-1981), 57-78.

[2] J. Cassaigne, F. Nicolas,*Combinatorics, Automata and Number Theory*, V. Berthé, M. Rigo (Eds), Encyclopedia of Mathematics and its Applications 135, Cambridge University Press (2010).

[3] J. Cassaigne, *On extremal properties of the Fibonacci word.* Theoret. Inform. Appl., 42:4, (2008), 701-715.

[4] J. Cassaigne, *Complexité et facteurs spéciaux*, Bull. Belg. Math. Soc. 4 (1997), 67-88.

[5] J. Cassaigne, *An algorithm to test if a given circular HD0L-language avoids a pattern*, in: IFIP World Computer Congress'94, North-Holland, 1994, pp. 459-464.

[6] K. Klouda, *Bispecial factors in circular non-pushy D0Llanguages*, arXiv:1201.1186v1[math.CO], 18 pages.

[7] A. de Luca. *A combinatorial property of the Fibonacci words.* Inform. Process. Lett., 12:4, (1981), 193-195.

[8] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.

[9] F. Mignosi, G. Pirillo. *Repetitions in the Fibonacci infinite word.* RAIRO Inform. Théor. Appl., 26:3, (1992), 199-204.

[10] G. Pirillo. *From the Fibonacci word to Sturmian words.* Publ. Math. Debrecen, 54(suppl.), (1999), 961-971. Automata and formal languages, VIII.

Julien Cassaigne
Institut de Mathématiques de Luminy
163 avenue de Luminy, case 907
F-13288 Marseille Cedex 9
France
Julien.Cassaigne@iml.univ-mrs.fr

Idrissa Kaboré
Institut des Sciences Exactes et Appliquées
Université polytechnique de Bobo-Dioulasso
01 BP 1091 Bobo-Dioulasso 01
Burkina Faso
ikaborei@yahoo.fr

5 Comportement asymptotique de $\dfrac{p(n)}{n}$

Théorème 5.1.

$$\limsup \frac{p(n)}{n} = \frac{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{1}{\lambda_1},\ et\ \liminf \frac{p(n)}{n} = 2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_1 - 1}\frac{1}{\beta_1} < 2.$$

Démonstration. Pour k assez grand nous avons $|y_{k-1}| < |x_k|$ D'où $\liminf\left(\frac{p(n)}{n}\right) = \lim\left(\frac{p(|x_k|+1)}{|x_k|}\right)$ et $\limsup\left(\frac{p(n)}{n}\right) = \lim\left(\frac{p(|y_k|+1)}{|y_k|}\right) =$ Calcul de $P(|x_k|+1)$ et $P(|y_k|+1)$

$$\begin{aligned}
P(|x_k|+1) &= 1 + (|x_k|+1) + \sum_{w \text{ bispécial } |w|\le|x_k|} m(w)(|x_k| - |w|) && (1)\\
&= |x_k| + 2 + \sum_{j=0}^{k-1}(|x_k| - |x_j|) - \sum_{j=1}^{k-1}(|x_k| - |y_j|) && (2)\\
&= 2|x_k| + 2 - \sum_{j=1}^{k-1}(|x_k| - |y_j|) && (3)\\
&= |x_k| + |y_k| + 2 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1\frac{\lambda_1^k - 1}{\lambda_1 - 1} + \alpha_2\frac{\lambda_2^k - 1}{\lambda_2 - 1} && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(|y_k|+1) &= 1 + (|y_k|+1) + \sum_{w \text{ bispécial } |w|\le|y_k|} m(w)(|y_k| - |w|) && (5)\\
&= 2|y_k| + 2 + \sum_{j=1}^{k-1}(|x_k| - |x_j|) - \sum_{j=1}^{k-1}(|x_k| - |y_j|) && (6)\\
&= 2|y_k| + 2 - \sum_{j=1}^{k-1}(|x_k| - |y_j|) && (7)\\
&= 2|y_k| + 2 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1\frac{\lambda_1^k - 1}{\lambda_1 - 1} + \alpha_2\frac{\lambda_2^k - 1}{\lambda_2 - 1} && (8)
\end{aligned}$$

Soit w et w' deux mots tels que $w' = \hat{\sigma}_{l,k},\ (w) = \sigma_{l,k}(w)\,a^l$. Posons $W = \begin{pmatrix} |w|_a \\ |w|_b \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $|w| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} W$ $W' = BW$ avec $B = \begin{pmatrix} l & 1 & l \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En revenant aux suites $(x_k)_{k\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$ $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ m-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on obtient

$$\begin{aligned} |x_k| &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^k X_0 && (9)\\ &= \beta_1\lambda_1^k + \beta_2\lambda_2^k + \beta_3 && (10) \end{aligned}$$

où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vérifie est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3 & = & l \\ \beta_1\lambda_1^2 + \beta_2\lambda_2^2 + \beta_3 & = & l^2 + l(m+1) \\ \beta_1\lambda_1^3 + \beta_2\lambda_2^3 + \beta_3 & = & l^3 + l^2(m+1) + l(2m+1) \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} |y_k| &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^k Y_1 && (11)\\ &= \gamma_1\lambda_1^k + \gamma_2\lambda_2^k + \gamma_3 && (12) \end{aligned}$$

où $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \gamma_3 & = & l + m - 1 \\ \gamma_1\lambda_1^2 + \gamma_2\lambda_2^2 + \gamma_3 & = & l^2 + 2lm + m^2 - m \\ \gamma_1\lambda_1^3 + \gamma_2\lambda_2^3 + \gamma_3 & = & l^3 + l^2(2m^2+1) + l(m^2+1) + m^2 - m \end{array} \right.$$

D'où $\lim \frac{p(|x_k|+1)}{|x_k|+1} = \frac{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{1}{\lambda_1}$ et $\lim \frac{p(|y_k|+1)}{|y_k|+1} = 2 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\frac{1}{\lambda_1}$

$\square$