Logique de la Programmation Concurrente

Emmąnueł Beffaŕski

14 octobre 2004

ça c'est du titre

The Masterplan

1. Logique
2. Logique de la Programmation
3. Programmation Concurrente
4. Logique Concurrente
5. Logique de la Programmation Concurrente

Logique de la programmation ?

- Programmation logique ?

$$
\begin{aligned}
\text{programme} &= \text{règles de déduction} \\
\text{données} &= \text{axiomes} \\
\text{évaluation} &= \text{recherche de démonstrations}
\end{aligned}
$$

Logique de la programmation ?

- Programmation logique ?   Non.
- Vérification de programmes ?
  - Une logique pour décrire des propriétés d'un programme,
  - Des techniques pour vérifier ces propriétés.

Logique de la programmation ?

- Programmation logique ? Non.
- Vérification de programmes ? Non.
- Entre les deux :

$$\begin{array}{rcl} \text{démonstration} & = & \text{programme} \\ \text{formule} & = & \text{type} \\ \text{élimination des coupures} & = & \text{évaluation} \end{array}$$

Constructivisme

Les idées de base de la logique *intuitionniste* :

- Une démonstration d'existence n'est valable que si elle permet de *construire* l'objet dont elle parle.

$$\forall x \exists y \, P(x,y) \simeq \text{fonction (calculable) } f \text{ tq } \forall x \, P(x, f(x))$$

- Conséquence : refus du raisonnement par l'absurde.
- Conséquence^2 : la négation change de signification

$$\neg\neg A \neq A$$

Reste à formaliser ces idées pour comprendre ce qu'on fait.

Correspondance de Curry-Howard

- Le λ-calcul :

$$
\begin{array}{ll}
\text{les termes :} & t, u ::= x \mid t(u) \mid \lambda x.t \\
\text{l'évaluation :} & (\lambda x.t)(u) \longrightarrow t[u/x]
\end{array}
$$

Correspondance de Curry-Howard

- Le λ-calcul :

$$\begin{aligned} &\text{les termes :} && t, u ::= x \mid t(u) \mid \lambda x.t \\ &\text{l'évaluation :} && (\lambda x.t)(u) \longrightarrow t[u/x] \end{aligned}$$

- Logique intuitionniste minimale :

$$\text{axiome : } \frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

$$\text{flèche : } \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

$$\text{coupure : } \frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Correspondance de Curry-Howard

- Le λ-calcul :

$$\begin{array}{ll} \text{les termes :} & t, u ::= x \mid t(u) \mid \lambda x.t \\ \text{l'évaluation :} & (\lambda x.t)(u) \longrightarrow t[u/x] \end{array}$$

- λ-calcul simplement typé :

$$\text{axiome : } \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

$$\text{flèche : } \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}$$

$$\text{coupure : } \frac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t(u) : B}$$

Correspondance de Curry-Howard

- Les coupures peuvent être éliminées lorsqu'elles sont précédées de règles flèche :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\pi_1\left[\pi_2 \,/\, \Gamma, A \vdash A\right]}{\Gamma \vdash B}$$

Correspondance de Curry-Howard

- Les coupures peuvent être éliminées lorsqu'elles sont précédées de règles flèche :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\pi_1\left[\pi_2 \,/\, \Gamma, A \vdash A\right]}{\Gamma \vdash B}$$

- C'est isomorphe à l'évaluation en λ-calcul typé :

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash (\lambda x.t)(u) : B} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash t[u/x] : B}$$

- Conservation du type par l'évaluation, cohérence du calcul.

Programmation concurrente

Par *concurrence* on désigne plusieurs aspects d'un système :

- un ensemble de processus indépendants,
- synchronisation par *communication*,
- accès *concurrent* à des *ressources*.

On veut :

- un *langage* pour représenter ces systèmes,
- une *logique* pour les décrire.

The Calculus of Communicating Systems

- On se donne un ensemble de *messages* possibles :

$$a, b, c, \dots \qquad \text{et} \qquad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$$

- On construit des agents qui échangent ces messages :

$$\begin{aligned} P, Q ::= {} & \bar{a}.P && \text{émission de } a \\ & a.P && \text{réception de } a \\ & P \mid Q && \text{composition parallèle} \\ & P + Q && \text{choix} \\ & !P && \text{réplication} \\ & \dots \end{aligned}$$

- On donne une sémantique opérationnelle.

L'Ordre Supérieur

Si on ajoute la possibilité de communiquer des noms de canaux, on obtient le π-calcul :

$$
\begin{array}{rll}
P, Q ::= & \bar{u}\langle\vec{v}\rangle.P & \text{émission de } \vec{v} \text{ sur } u \\
& u(\vec{x}).P & \text{réception sur } u \\
& \nu x.P & \text{restriction / création d'un nom } x \\
& P \mid Q & \text{composition parallèle} \\
& P + Q & \text{choix} \\
& !P & \text{réplication} \\
& \dots &
\end{array}
$$

On donne aussi une sémantique opérationnelle.

Quelle logique pour la concurrence ?

Revenons sur l'intuitionnisme :

- la notion de base est l'*implication*,
- le langage des preuves décrit des *fonctions*,
- les *coupures* apparaissent par *application*,
- l'évaluation marche par *substitution* (de termes).

Quelle logique pour la concurrence ?

Revenons sur l'intuitionnisme :

- la notion de base est l'*implication*,
- le langage des preuves décrit des *fonctions*,
- les *coupures* apparaissent par *application*,
- l'évaluation marche par *substitution* (de termes).

Dans le cas concurrent, on remplace :

- les fonctions par des *processus*,
- l'application par la *mise en communication*,
- la substitution par l'échange de noms.

Et l'implication, elle devient quoi ?

Linéarité

Une différence importante entre λ et π est la *linéarité* :

- En λ-calcul, la réduction duplique des termes :

$$(\lambda x.t)(u) \to t[u/x]$$

- En π-calcul, les termes restent en un exemplaire :

$$\bar{a}\langle u, v\rangle.P \mid a(x, y).Q \to P \mid Q[u/x, v/y]$$

Donc la logique doit prendre conscience de la duplication.

Logique linéaire : principes

On refuse les deux règles suivantes (sous cette forme) :

$$\text{contraction} : \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \text{affaiblissement} : \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Logique linéaire : principes

On refuse les deux règles suivantes (sous cette forme) :

$$\text{contraction} : \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \text{affaiblissement} : \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Il n'y a plus de distinction fonction/argument :

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B \qquad \text{devient} \qquad \vdash A_1, \ldots, A_n$$

Logique linéaire : principes

On refuse les deux règles suivantes (sous cette forme) :

$$\text{contraction} : \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \text{affaiblissement} : \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Il n'y a plus de distinction fonction/argument :

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B \qquad \text{devient} \qquad \vdash A_1, \ldots, A_n$$

On n'a pas de négation mais une *orthogonalité*

$$A^\perp \qquad \text{avec} \qquad A^{\perp\perp} = A$$

qui parle d'interaction.

Logique linéaire : opérateurs

Si on refuse contraction et affaiblissement,
on obtient deux conjonctions :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$$

Logique linéaire : opérateurs

Si on refuse contraction et affaiblissement,
on obtient deux conjonctions :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \mathbin{\&} B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$$

et deux disjonctions :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}$$

Logique linéaire : opérateurs

Si on refuse contraction et affaiblissement,
on obtient deux conjonctions :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \mathbin{\&} B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}$$

et deux disjonctions :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}$$

La coupure devient l'interaction de deux interfaces opposées :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

Logique linéaire : interprétation

Les opérateurs *multiplicatifs* parlent de composition :

- $\otimes$ correspond à la composition parallèle (séparante) $P \mid Q$
- $⅋$ est pénible à expliquer

Les opérateurs *additifs* parlent de choix :

- $\&$ correspond à la somme $P + Q$
- $\oplus$ correspond au choix dans une somme

Il y a des opérateurs *exponentiels* qui parlent de réplication.

Logique linéaire : interprétation

Les opérateurs *multiplicatifs* parlent de composition :

- $\otimes$ correspond à la composition parallèle (séparante) $P \mid Q$
- $⅋$ est pénible à expliquer

Les opérateurs *additifs* parlent de choix :

- $\&$ correspond à la somme $P + Q$
- $\oplus$ correspond au choix dans une somme

Il y a des opérateurs *exponentiels* qui parlent de réplication.

La *coupure* peut être associée à la restriction :

- $\nu x.P$ rend privé le nom x dans P,
- la communication sur x réduit le processus sans changer son interface $\simeq$ élimination de coupures.

Et après ?

- Reste à formuler une description précise de la correspondance démonstrations / processus.
- La logique linéaire décompose la logique intutionniste.
  - LL est née comme décomposition de l'intuitionniste.
  - Décomposition du calcul fonctionnel en étapes élémentaires.
- Étudier d'autres idées sur le typage des processus.
  - Logiques spatiales, logiques modales, etc.
  - Sens des restrictions de LL ou du π-calcul.
- On n'a pas parlé de logique classique.