

Rapport sur mes activités antérieures et les travaux que je me propose d'entreprendre

Michel Balazard

6 janvier 2011

Ce texte décrit les principaux éléments de mon parcours professionnel. Il est composé de cinq parties : Recherche, Programme de recherche, Enseignement et encadrement doctoral, Séjours à l'étranger, Animation de la recherche. La plupart de mes publications, et d'autres informations sur mes activités, sont disponibles sur le site

<http://iml.univ-mrs.fr/~balazard/>

RECHERCHE

Dans cette partie, je présente ma contribution aux mathématiques, en signalant également mon influence sur les travaux d'autres chercheurs. L'exposé décrit mon activité depuis 1984 (début de ma carrière de chercheur) jusqu'à 2010. J'aborde successivement les différents thèmes de mes recherches : théorie probabiliste des nombres, fonction zêta de Riemann, théorie élémentaire des nombres premiers, contributions diverses*.

1 Théorie probabiliste des nombres

La théorie probabiliste des nombres est l'étude de la répartition des valeurs des fonctions arithmétiques. Il s'agit de dégager les lois statistiques suivies par ces fonctions, considérées comme des variables aléatoires sur l'ensemble des entiers naturels, probabilisé de diverses façons[†]. Cette branche de la théorie analytique des nombres a connu un développement extraordinaire tout au long du XX^e siècle. Elle constitue maintenant un élément essentiel de la culture générale de tout arithméticien, et est constamment employée dans les applications, par exemple dans l'évaluation du coût d'algorithmes de cryptographie.

C'est Jean-Louis Nicolas qui m'a initié à cette théorie en me proposant un sujet de thèse. J'ai également été très influencé par Hubert Delange et Gérald Tenenbaum.

*Mes articles sont cités tels qu'ils figurent dans la liste complète de mes publications, placée après l'exposé par thèmes. D'autre part, cette partie comporte, p.13, une bibliographie de publications d'autres auteurs, citant certains de mes travaux.

[†]On considère la plupart du temps la mesure ν_N affectant la probabilité $\frac{1}{N}$ à tous les entiers $\leq N$, et 0 aux autres ; on examine alors le comportement de la loi de répartition d'une fonction arithmétique relativement à ν_N , quand N tend vers l'infini.

1.1 Fonctions « nombre de facteurs premiers »

J'ai étudié dans ma thèse des fonctions additives fondamentales, constantes sur l'ensemble des nombres premiers :

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1$$

(nombre de diviseurs premiers de n), et

$$\Omega(n) = \sum_{p^r||n} r$$

(nombre total de facteurs dans la décomposition de n en produit de nombres premiers), ainsi que leurs généralisations :

$$\omega_E(n) = \sum_{\substack{p|n \\ p \in E}} 1,$$

$$\Omega_E(n) = \sum_{\substack{p^r||n \\ p \in E}} r,$$

où E est une partie arbitraire de l'ensemble des nombres premiers.

1.1.1 La loi Poisson-géométrique

Le travail que m'avait proposé Jean-Louis Nicolas consistait en ceci. On disposait en 1984 de trois formules asymptotiques pour la loi locale

$$N(x, k) = \text{card}\{n \leq x, \Omega(n) = k\};$$

d'une part un résultat de Sathe et Selberg de 1954 (essentiellement une loi de Poisson de paramètre $\log \log x$ pour $k \leq (2 - \varepsilon) \log \log x$); d'autre part un résultat de Nicolas de 1984 (en première approximation une loi géométrique de raison $1/2$ pour $k \geq (2 + \varepsilon) \log \log x$); enfin un résultat non publié de Delange (décrivant une transition gaussienne dans l'intervalle $|k - 2 \log \log x| \ll \sqrt{\log \log x}$). Il s'agissait d'unifier la théorie, afin de comprendre précisément les transitions entre ces différentes formules. J'ai mis en évidence la loi de probabilité discrète la plus simple à laquelle comparer $x^{-1}N(x, k)$: c'est la loi « Poisson-géométrique », convolée d'une loi de Poisson de paramètre $\log \log x$ et d'une loi géométrique de raison $1/2$.

Ce travail de synthèse a été l'objet d'une note à trois auteurs **R1** et d'un exposé de séminaire **C1**, mais la démonstration complète (assez délicate) ne se trouve que dans ma thèse[‡]. Il a été à l'origine d'intéressants développements par Delange ([5] et [6]) et de généralisations à d'autres structures combinatoires par Hwang ([8],[9],[10],[11],[12],[13]).

J'ai obtenu, toujours dans ma thèse, des encadrements de la loi locale

$$N_E(x, k) = \text{card}\{n \leq x, \Omega_E(n) = k\},$$

en termes de la loi Poisson-géométrique de paramètre $\sum_{p \in E, p \leq x} p^{-1}$ et de raison $1/\min E$. Ici, l'enjeu était d'obtenir une complète uniformité en les trois paramètres x , k et E . J'y suis parvenu dans une certaine mesure (cf. **R3**), mais la théorie est incomplète, encore aujourd'hui. Mon article **R3** est cependant une référence toujours actuelle pour certains problèmes (cf. [17] et [2]).

[‡]Sur la répartition des valeurs de certaines fonctions arithmétiques additives, Université de Limoges, 1987.

1.1.2 Problèmes de distribution conjointe

Vers la fin de ma première année de thèse, je fus mêlé à des discussions sur un problème posé par Ivić : estimer le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $\Omega(n) \geq \alpha \omega(n)$, où $\alpha > 1$ est fixé. Pendant l'été 1985, j'étudiai la méthode de Selberg-Delange et l'appliquai à cette question, ce qui me conduisit à des calculs diophantiens assez intéressants. Le résultat, avec un terme principal discontinu en α (cf. **R2**), surprit les spécialistes de ce type de questions, et ce travail fut l'occasion d'échanges passionnants avec Tenenbaum : son approche du problème (et notamment un meilleur terme d'erreur) est exposée dans [16].

Un problème de Steinig, estimer le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $\tau(n) \geq \log x$ (où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n), fut l'objet d'une collaboration à quatre auteurs (cf. **R5**). L'approche adoptée fut de considérer la distribution conjointe de ω et de $\log \tau / \log 2 - \omega$, fonction additive s'annulant sur les nombres premiers. La méthode de Selberg-Delange s'applique encore ici et mène de nouveau à un terme principal discontinu. Par la suite, Deléglise et Nicolas firent une étude numérique très détaillée des oscillations de ce terme principal (cf [7]).

1.1.3 La conjecture d'unimodalité d'Erdős

Dans le prolongement de ma thèse, mon résultat le plus important est le suivant.

Théorème 1 (1990, R4) *Il existe un nombre réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$ la suite*

$$k \mapsto \pi(x, k) = \text{card}\{n \leq x, \omega(n) = k\}$$

est unimodale (elle croît, atteint un maximum, puis décroît).

Cette propriété qualitative de la distribution du nombre de diviseurs premiers des entiers avait été conjecturée en 1948 par Erdős et restait non démontrée 40 ans plus tard, bien que le sens de variation de $k \mapsto \pi(x, k)$ fut connu dans de grandes zones de valeurs de k grâce à des travaux fondamentaux de Selberg, et de Hildebrand et Tenenbaum. Pour prouver l'unimodalité globale, j'ai utilisé la fonction de trois variables $\pi(x, t, k)$, nombre d'entiers $n \leq x$ ayant exactement k diviseurs premiers, tous supérieurs à t . En effet, cette fonction possède, contrairement à $\pi(x, k)$, une équation fonctionnelle permettant un raisonnement par récurrence, dont la première étape est fournie par une version adéquate de résultats antérieurs d'Alladi.

Ma démarche est présentée dans un contexte plus général dans un article de Saias (cf. [15]). Une autre démonstration a été obtenue par Kerner dans sa thèse, comme conséquence d'une formule asymptotique pour $\pi(x, k+1)/\pi(x, k)$ uniforme dans presque toute la zone pertinente de valeurs de k , et d'un argument combinatoire que j'avais exposé dans **R4**.

Tout chercheur en mathématiques est confronté au problème d'expliquer la nature de son travail à des personnes qui ignorent l'existence de cette profession. J'aime particulièrement présenter ce résultat dans de telles occasions car son énoncé est accessible à quiconque a déjà décomposé un nombre entier en produit de facteurs premiers et observé une statistique.

1.1.4 Nombre de facteurs premiers de l'indicateur d'Euler

L'article d'exposition **A7**, écrit en collaboration avec Smati, présentait l'ensemble des travaux de Pomerance sur la fonction d'Euler (jusqu'en 1992). À cette occasion, nous avons obtenu un résultat

nouveau (inséré dans **A7**) sur la vitesse de convergence de la distribution de $\Omega(\varphi(n))$ vers une loi normale : on a uniformément pour $x \geq 3$, $z \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x, \Omega(\varphi(n)) \leq y^2/2 + (z/\sqrt{3})y^{3/2}\} = \Phi(z) + O(1/\sqrt{y}),$$

avec $y = \log \log x$ et $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$.

Surtout, nous avons émis une conjecture selon laquelle, uniformément pour $x \geq 3$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x, \Omega(\varphi(n)) = k\} \ll (\log \log x)^{-3/2}.$$

Cette conjecture fut à l'origine d'un travail remarquable de Marie-Jeanne et Tenenbaum [14], qui la démontrèrent ainsi que son analogue pour $\omega(\varphi(n))$, fonction qui n'est plus additive et présente donc des difficultés supplémentaires.

1.2 La fonction d'Euler

La répartition des valeurs de la fonction d'Euler $\varphi(n)$ a été l'un de mes thèmes de recherche privilégiés via l'étude du comportement asymptotique de

$$A(x) = \text{card}\{n, \varphi(n) \leq x\}.$$

Un article important de Bateman (1972) comparait les résultats obtenus par diverses méthodes, et cet aspect méthodologique est resté l'une des caractéristiques de ce sujet. Ainsi Bateman obtenait son meilleur résultat par intégration complexe et présentait également une approche fondée sur des travaux de Diamond sur les nombres généralisés de Beurling. En effet, la suite $(\varphi(n))$ se comporte en première approximation comme la suite des nombres entiers généralisés correspondant à la suite de nombres premiers généralisés $(p-1)$, p décrivant la suite des nombres premiers impairs usuels.

Ensuite, Nicolas (1983) aborda ce problème par une méthode de pondération logarithmique à la Tchebycheff. Smati (1989) développa cette approche ; je suivis de près ses travaux et m'intéressai alors à cette question.

Dans **C2**, écrit en collaboration avec Smati, nous retrouvons le meilleur résultat de Bateman par une méthode élémentaire utilisant la décomposition $n = ab$ où les facteurs premiers de a sont tous $\leq y$, et ceux de b tous $> y$. Puis j'ai observé dans **R7** que la méthode de Diamond[§] permet en fait d'améliorer légèrement le résultat de Bateman, encore de façon élémentaire (c'est à dire sans faire appel à l'intégration complexe).

Enfin, le meilleur résultat actuel est le suivant, obtenu en collaboration avec Tenenbaum.

Théorème 2 (1998, R6) *Pour $x \geq 3$, on a*

$$A(x) = x \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} + O(x\mathcal{L}(x)^{-c})$$

où c est une constante positive et $\mathcal{L}(x) = \exp((\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5})$.

[§]J'ai d'ailleurs rédigé un article de synthèse **R10** sur cette méthode ; il contient aussi une forme générale du résultat de **R7**.

Sa démonstration repose sur une analyse détaillée de l'ordre de grandeur des sommes exponentielles

$$\sum_{M < p \leq N} (p-1)^{i\tau}.$$

Elle est effectuée à l'aide de la technique mise au point par Vaughan pour étudier des sommes portant sur les nombres premiers, et des estimations de Korobov, Vinogradov et Karatsuba de sommes exponentielles.

2 La fonction zêta de Riemann

En 1996 j'ai entamé l'étude d'un nouveau domaine de recherche : la fonction zêta de Riemann, et notamment l'hypothèse de Riemann (selon laquelle tous les zéros non réels de la fonction $\zeta(s)$ se trouveraient sur la droite $\Re(s) = 1/2$; nous la désignerons par (HR)).[¶]

2.1 Le critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann

Ce travail sur l'hypothèse de Riemann a été effectué pour l'essentiel en collaboration avec Saias. Notre point de départ fut la lecture de l'article de Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312-314. Il contient la généralisation d'un résultat antérieur de Nyman qui montrait l'équivalence entre (HR) et un problème d'approximation dans l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$: (HR) est vraie si et seulement si la constante **1** sur $]0,1[$ est dans l'adhérence du sous-espace vectoriel \mathcal{B} formé des fonctions

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \{\theta_k/t\}, \tag{1}$$

où $n \geq 1, 0 < \theta_k \leq 1, a_k \in \mathbb{C}$ et

$$\sum_{k=1}^n a_k \theta_k = 0,$$

$\{u\}$ désignant la partie fractionnaire du nombre réel u . Mes articles d'exposition **R11** (avec Saias) et **C3** sont de bons points de départ pour l'étude du critère de Nyman et de questions connexes.

L'étude de ce problème d'approximation avait été commencée par Báez-Duarte et Vassiouline. Notre première contribution (cf. **R8**) a été de répondre à une question posée par Báez-Duarte en montrant que (HR) équivaut à la convergence de la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \{1/nx\}, \tag{2}$$

dans $L^{2-\varepsilon}(0,1)$ pour tout ε positif. En fait, ce premier théorème était une redécouverte : J. Lee l'avait obtenu avant nous, et publié dans l'article *Convergence and the Riemann hypothesis*, Commun. Korean Math. Soc. **11** (1996), 57-62.

[¶]Mon article d'exposition **A13** énumère les principaux résultats obtenus depuis un siècle et demi sur cette question.

2.2 Étude d'une distance

Ce travail nous a conduit à une fructueuse collaboration avec Luis Báez-Duarte et Bernard Landreau. Dans la publication **R13**, nous étudions la distance $D(\lambda)$ dans $L^2(0, \infty)$ entre la fonction χ indicatrice de l'intervalle $]0, 1]$ et l'ensemble des fonctions de la forme (1) où $\lambda \leq \theta_k \leq 1$, et nous donnons une limitation pour la vitesse de l'hypothétique convergence de $D(\lambda)$ vers 0, quand λ tend vers 0.

Théorème 3 (1998, R13) *On a*

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda)^2 \log(1/\lambda) \geq \sum \frac{1}{|\rho|^2},$$

où la sommation porte sur les zéros de ζ de partie réelle $1/2$, chacun étant compté une unique fois, quel que soit son ordre de multiplicité $m(\rho)$.

Ce résultat a suscité un important travail de Jean-François Burnol (cf. [3]), qui a montré que le minorant peut être remplacé par

$$\sum \frac{m(\rho)^2}{|\rho|^2}.$$

De nombreuses questions restent en suspens concernant la fonction $D(\lambda)$. Est-elle strictement croissante ? Est-elle continue ?

2.3 L'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »

Nous avons ensuite entrepris l'étude de la géométrie du système de vecteurs e_α , $\alpha > 0$. Cela passe par l'analyse des produits scalaires :

$$\begin{aligned} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle &= \int_0^{+\infty} \{1/\alpha t\} \{1/\beta t\} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} A\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

où

$$A(\lambda) = \int_0^{+\infty} \{t\} \{\lambda t\} t^{-2} dt \quad (3)$$

est la fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » (dans l'espace de Hilbert $L^2(0, \infty; t^{-2} dt)$).

Dans l'article **R16** (avec Báez-Duarte, Landreau et Saias), nous résumons les résultats obtenus. Notre principale contribution consiste en deux identités vérifiées par la fonction A , qui entraînent notamment que tout nombre rationnel est un maximum local strict pour A . Ces identités découlent par inversion de Mellin de l'équation fonctionnelle de la fonction d'Estermann.

2.4 Le critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann

Revenons à la série (2). Báez-Duarte a montré qu'elle diverge dans $L^2(0, \infty)$ mais on peut néanmoins chercher à approcher χ par des combinaisons linéaires des fonctions $e_n(x) = \{1/nx\}$. Posons :

$$d_n = \text{dist}_{L^2(0, \infty)}(\chi, \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)).$$

Il est évident que la relation $d_n = o(1)$ est suffisante pour (HR), mais est-elle nécessaire ?

Nous conjecturons dans **R13** que

$$d_n^2 \sim \frac{2 + \gamma - \log 4\pi}{\log n} \quad (4)$$

(γ désignant la constante d'Euler), en accord avec les résultats d'expérimentations numériques. Le théorème de Burnol montre que $d_n^2 \geq (2 + \gamma - \log 4\pi + o(1))/\log n$, et que (4) entraîne non seulement (HR) mais aussi la simplicité des zéros de ζ .

D'autre part, Báez-Duarte a donné en 2003 une réponse positive à la question ci-dessus : la relation $d_n = o(1)$ est bien équivalente à (HR). J'ai fourni une version quantitative de sa démonstration :

$$(HR) \Rightarrow d_n = O((\log \log n)^{-1/3}).$$

Ce résultat est inséré dans son article [1]. En 2010, en collaboration avec Anne de Roton, nous avons amélioré cette estimation en montrant

$$(HR) \Rightarrow d_n = O((\log \log n)^c (\log n)^{-1/2}),$$

pour tout $c > 5/2$ (cf. **R21**). Notre démonstration utilise une technique mise au point par Maier, Montgomery et Soundararajan dans l'étude de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius.

Dès lors, il est tentant d'adopter une stratégie *maximaliste* : calculons d_n^2 explicitement par la formule

$$d_n^2 = \frac{\text{Gram}(e_1, \dots, e_n, \chi)}{\text{Gram}(e_1, \dots, e_n)}, \quad (5)$$

où $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n) = \det(\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$, et lisons sur l'hypothétique formule exacte obtenue, l'équivalence asymptotique (4) !

La mise en oeuvre de ce programme présente d'importantes difficultés techniques : bien que tous les produits scalaires intervenant dans (5) possèdent des expressions explicites (formules de Vassioumine), le calcul exact des déterminants ne semble pas évident. Pour commencer, l'article **R14** (avec Saias) présente des versions simplifiées de ce problème où le calcul peut être mené à son terme. J'ai également entrepris l'étude du dénominateur de (5) via celle du quotient

$$\frac{\text{Gram}(e_1, \dots, e_n)}{\text{Gram}(e_1, \dots, e_{n-1})} = \text{dist}_{L^2(0, \infty)}(e_n, \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})).$$

Je donne dans l'article **R17** un premier encadrement de cette quantité.

2.5 Le logarithme de la fonction zêta

Le logarithme de la fonction zêta est essentiellement la série de Dirichlet associée à la suite des nombres premiers. Dans son étude, l'analyse et l'arithmétique interagissent en permanence, ce qui rend cet objet fascinant. Dans l'article **R12** (avec A. Ivić), nous donnons des informations nouvelles (ordre de grandeur, presque-périodicité) sur la quantité

$$R(T, \sigma) = \int_0^T |\log \zeta(\sigma + i\tau)|^2 d\tau - T \sum_{p, k} \frac{1}{k^2 p^{2k\sigma}},$$

définie pour $\sigma > 1/2$.

Une autre contribution au sujet est une nouvelle forme équivalente pour (HR), obtenue en collaboration avec Saias et Yor. Elle s'écrit :

$$\int_{\Re(s)=\frac{1}{2}} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^2} |ds| = 0.$$

où l'intégrale converge absolument et est positive où nulle, cf. **R11**. Cette forme équivalente peut être reformulée en termes de mouvement brownien. L'ouvrage de Crandall et Pomerance [4] contient (p.440) d'intéressants commentaires sur notre résultat.

2.6 Une somme multiple faisant intervenir la fonction de Möbius

L'étude des fonctions sommatoires des fonctions arithmétiques de plusieurs variables présente des difficultés techniques considérables. Ce thème a connu un net regain d'intérêt ces dernières années car il intervient dans la démonstration du théorème de Goldston, Pintz et Yıldırım sur les petites différences entre nombres premiers, et aussi dans des questions de comptage de points rationnels de hauteur bornée sur certaines variétés (travaux de la Bretèche).

L'étude asymptotique de la somme

$$S_r(x) = \sum_{\substack{n_j \leq x \\ j=1, \dots, r}} \frac{\mu(n_1) \cdots \mu(n_r)}{[n_1, \dots, n_r]}$$

avait été proposée par Motohashi, le cas $r = 2$ ayant été traité par Dress, Iwaniec et Tenenbaum.

Naimi et Pétermann ont démontré que $M_r(x) = P_r(\log x) + o(1)$ où P_r est un polynôme, nul quand r est impair. J'ai contribué à la partie préliminaire de cette démonstration (cf. **R19** avec Naimi et Pétermann).

2.7 Zéros des sommes partielles de la fonction zêta

L'hypothèse de Riemann peut également être considérée comme cas particulier d'un problème général : décrire la répartition des zéros des fonctions entières. Mon étudiant Oswaldo Velasquez Castañón a considéré dans sa thèse le cas de fonctions liées à la fonction zêta de Riemann. Par la suite, nous avons démontré dans la note **R20** le résultat suivant :

$$\inf \left\{ \Re \rho, \sum_{k=1}^n k^{-\rho} = 0 \right\} \sim -n \log 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

La démonstration allie deux résultats fondamentaux de théorie des nombres : le théorème d'équivalence de Bohr et le théorème de Siegel sur la finitude du nombre de points entiers d'une courbe elliptique.

3 Théorie élémentaire des nombres premiers

Les méthodes élémentaires (c'est-à-dire l'utilisation de la variable réelle par opposition à la variable complexe) ont toujours tenu une place prépondérante dans ma réflexion. J'ai entrepris de revisiter en profondeur l'application de ces techniques au problème de la répartition des nombres premiers. Le premier fruit de ce travail est l'article **R18** qui donne une « identité de Selberg » généralisée en termes de polynômes d'Appell.

4 Contributions diverses

4.1 Une classe de fonctions continues

J'ai obtenu dans **P1** une généralisation de la propriété de continuité des fonctions convexes. Soit a et b deux fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, *sans zéro commun*, et $((\alpha_i, \beta_i))_{i \in I}$ une famille de couples de nombres réels. Soit

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} (\alpha_i a(x) + \beta_i b(x)) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Alors, si $\varphi(x) < \infty$ pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction φ est continue. Le cas des fonctions convexes correspond à $a(x) = 1$ et $b(x) = x$.

4.2 Démonstration d'une inégalité pour certaines séries infinies

Allouche, Mendès France et Tenenbaum (dans *Entropy : an inequality*, Tokyo J. Math. **11** (1988), 323-328.) ont obtenu l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^\alpha \leq ((\lambda + 1)^\alpha - \lambda^\alpha)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \right)^\alpha,$$

où (x_k) est une suite de nombres réels positifs ou nuls, vérifiant $\sum_{k \geq n} x_k \leq \lambda x_n$, et $0 < \alpha < 1$.

Ils incluent dans leur article plusieurs démonstrations de ce résultat, notamment une qui m'est due, et qui a servi de point de départ à des travaux ultérieurs de Daróczy.

4.3 Une remarque sur la suite de Thue-Morse

Dans l'article **R15** (avec Mendès France et Sebbar), nous avons notamment étudié la série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{t(n)}}{(n+1)^s},$$

où $t(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base 2. Nous avons obtenu l'estimation

$$D(i\tau) \ll |\tau| \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

pour le prolongement analytique $D(s)$ de cette série.

5 Liste complète de mes publications

5.1 Articles publiés par des revues à comité de lecture

R1. avec H. Delange et J.-L. Nicolas, *Sur le nombre de facteurs premiers des entiers*, C. R. Acad. Sci. Paris **306**, Série I (1988), 511-514.

R2. *Sur la moyenne des exposants dans la décomposition en facteurs premiers*, Acta Arithmetica **52** (1989), 11-23.

R3. *Remarques sur un théorème de G. Halász et A. Sárközy*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 389-413.

R4. *Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier*, Ann. Inst. Fourier, **40** (1990), 255-270.

R5. avec J.-L. Nicolas, C. Pomerance et G. Tenenbaum, *Grandes déviations pour certaines fonctions arithmétiques*, Journal of Number Theory **40** (1992) 146-164.

R6. avec G. Tenenbaum, *Sur la répartition des valeurs de la fonction d' Euler*, Compositio Mathematica **110** (1998), 239-250.

R7. *Une remarque sur la fonction d' Euler*, Rend. Circ. Mat. Palermo. **47** (1998), 325-330.

R8. avec E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 1*, Advances in Mathematics **139** (1998), 310-321.

R9. avec E. Saias et M. Yor, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 2*, Advances in Mathematics **143** (1999), 284-287.

R10. *La version de Diamond de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet*, L'Enseignement Mathématique **45** (1999), 253-270.

R11. avec E. Saias, *The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis*, Expositiones Mathematicae **18** (2000), 131-138.

R12. avec A. Ivić, *The mean square of the logarithm of the zeta-function*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 157-166.

R13. avec L. Báez-Duarte, B. Landreau et E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3*, Advances in Mathematics **149** (2000), 130-144.

R14. avec E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 4*, Advances in Mathematics **188** (2004), 69-86.

R15. avec M. Mendès France et A. Sebbar, *Variations on a theme of Hardy's*, Ramanujan Journal **9** (2005), 203-213.

R16. avec L. Báez-Duarte, B. Landreau et E. Saias, *Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »*, Ramanujan Journal **9** (2005), 215-240.

R17. *Sur les dilatations entières de la fonction « partie fractionnaire »*, Functiones et Approximatio **25** (2006), 37-49.

R18. *Sur la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt généralisée*, Arch. Math. **90** (2008), 31-38.

R19. avec M. Naimi et Y.-F.S. Pétermann, *Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Moebius. Première partie*, Acta Arithmetica **132** (2008), 245-264.

R20. avec O. Velasquez Castañón, *Sur l'infimum des parties réelles des zéros des sommes partielles de la fonction zêta de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 343-346.

R21. avec A. de Roton, *Sur un critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann*, Int. J. Number Theory **6** (2010), 883-903.

5.2 Actes de colloques et séminaires à comité de lecture

C1. *Comportement statistique du nombre de facteurs premiers des entiers*, in C. Goldstein (éd.), Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-1988, Birkhäuser (1990), 1-21.

C2. avec A. Smati, *Elementary proof of a theorem of Bateman*, in B. C. Berndt, H. G. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand (eds.), Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in Honor of Paul T. Bateman, Birkhäuser (1990), 41-46.

C3. *Completeness problems and the Riemann hypothesis : an annotated bibliography*, dans^{||} : Number Theory for the Millennium, Proc. Millennial Conf. Number Theory (Urbana, IL, 2000) (M. A. Bennett et al., eds.), A K Peters, Boston (2002), 21-48.

5.3 Autres publications

A1. *Sur la fonction $\Omega_E(n)$* , Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, 1re-2e années, Institut Henri Poincaré (1984-1985), n°34, 10 p.

A2. *Distribution des valeurs de la fonction $\Omega_E(n)$* , Colloque de théorie analytique des nombres "Jean Coquet" (1985), Pub. Mat. Orsay 88-02, 49-54.

A3. *Sur un théorème de Halász et Sárközy*, Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, 3e année, Institut Henri Poincaré (1985/86), n°17, 9 p.

^{||}Cet article figure également dans le recueil : Surveys in Number Theory (B. Berndt et al., eds.), A K Peters, Boston, (2002), 1-28.

A4. *Sur certaines fonctions additives*, Groupe de travail en théorie analytique et élémentaire des nombres (1986-1987), Pub. Mat. Orsay 88-01, 4-14.

A5. *Les formules sommatoires de Selberg et applications*, Colloque de théorie des nombres, Alger (1989), 5-16.

A6. *Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres*, Sémin. Th. Nombres Bordeaux **2** (1990), 13-30.

A7. avec A. Smati, *Travaux de Pomerance sur la fonction φ d'Euler*, Groupe de travail en théorie analytique et élémentaire des nombres (1989-1990), Pub. Mat. Orsay 92-01, 5-36.

A8. *Le problème de Fermat et la théorie des nombres premiers. Le théorème d'Adleman, Fouvry et Heath-Brown*, Gazette des mathématiciens **67** (1996), 11-19, et Quadrature **22** (1995), 30-36.

A9. *Le centenaire du théorème des nombres premiers*, Pour la science, **233** (1997), 93-95.

A10. *Compte rendu de livre : Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres, de Gérald Tenenbaum et Jie Wu*, Gazette des mathématiciens **74** (1997), 110-112.

A11. *Math en jeans : une passion partagée*, Bordeaux 1 Recherche **3** (2003), 13.

A12. avec N. Jousse, *A continuity property connected with Nyman's criterion for the Riemann hypothesis*, Oberwolfach Reports **1** (2004), 2426-2428.

A13. *Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann*, Gazette des mathématiciens **126** (2010), 7-24.

6 Énoncés de problèmes

P1. *Advanced problem 6593*, Am. Math. Monthly **96** (1989), 165.

P2. *Elementary problem 3329*, Am. Math. Monthly **96** (1989), 446.

P3. *Problem 10243*, Am. Math. Monthly **99** (1992), 675.

7 Traductions

T1. (de l'anglais) P. Vitányi, *Le chaos algorithmique et la méthode d'incompressibilité*, dans : L'héritage de Kolmogorov en mathématiques, É. Charpentier, A. Lesne et N. Nikolski, éditeurs, Belin, Paris, 2004.

Références

- [1] Luis Báez-Duarte, *A strengthening for the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Rend. Lincei **14** (2003), 5-11.
- [2] R. de la Bretèche, *Sur l'ordre de grandeur des polynômes de Dirichlet*, Acta. Arith. **134** (2008), 141-148.
- [3] J.-F. Burnol, *A lower bound in an approximation problem involving the zeros of the Riemann zeta function*, Adv. Math. **170** (2002), 56-70.
- [4] R. Crandall et C. Pomerance, *Prime numbers, a computational perspective*, Springer, New-York (2005).
- [5] H. Delange, *On the integers n for which $\Omega(n) = k$* , Analytic Number Theory (Allerton Park, 1989), Progress in Math. **85** (1990), 119-132.
- [6] H. Delange, *On the integers n for which $\Omega(n) = k$, II*, Monatsh. Math. **116** (1993), 175-196.
- [7] M. Deléglise et J.-L. Nicolas, *Sur les entiers inférieurs à x ayant plus de $\log x$ diviseurs*, J. Théor. Nombres Bordeaux. **6** (1994), 327-357.
- [8] H.-K. Hwang, *Asymptotic estimates of elementary probability distributions*, Stud. Appl. Math. **99** (1997), 393-417.
- [9] H.-K. Hwang, *A Poisson * geometric convolution law for the number of components in unlabelled combinatorial structures*, Combin. Probab. Comput. **7** (1998), 89-110.
- [10] H.-K. Hwang, *Sur la répartition des valeurs des fonctions arithmétiques. Le nombre de facteurs premiers d'un entier*, J. Number Theory. **69** (1998), 135-152.
- [11] H.-K. Hwang, *A Poisson * negative binomial convolution law for random polynomials over finite fields*, Random Structures Algorithms **13** (1998), 17-47.
- [12] H.-K. Hwang, *Asymptotic of Poisson approximations to random discrete distributions : an analytic approach*, Adv. in Appl. Probab.. **31** (1999), 448-491.
- [13] H.-K. Hwang, *Distribution of the number of factors in random ordered factorisations of integers*, J. Number Theory. **81** (2000), 61-92.
- [14] F. Marie-Jeanne et G. Tenenbaum, *Une propriété de concentration relative à la fonction d'Euler*, Indag. Math. **9** (1998), 383-403.
- [15] E. Saias, *Sur l'utilisation de l'identité de Buchstab*, Séminaire de Théorie des Nombres (Paris, 1991-92), Progress in Math. **116** (1993), 217-245.
- [16] G. Tenenbaum, *Sur la distribution conjointe des deux fonctions « nombre de facteurs premiers »*, Aequationes Math. **35** (1988), 55-68.
- [17] G. Tenenbaum, *A rate estimate in Billingsley's theorem for the size distribution of large prime factors*, Q. J. Math. **51** (2000), 385-403.

PROGRAMME DE RECHERCHE

1 Application des méthodes de l'analyse réelle à l'étude de la répartition des nombres premiers

Longtemps appelées « élémentaires », les méthodes d'étude de la fonction de comptage des nombres premiers

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad (x > 0)$$

(où p désigne un nombre premier) issues de la théorie des fonctions de variables réelles, ont une histoire à la fois ancienne et très particulière.

Après les résultats d'Euclide

$$\pi(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty),$$

d'Euler

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty),$$

et de Tchebycheff (1850)

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x} \quad (x \geq 2),$$

Riemann (1859) détournait la plupart des chercheurs de ces méthodes en révélant la pertinence et la portée de la théorie des fonctions d'une variable complexe pour l'étude de $\pi(x)$.

Cela fut amplement confirmé en 1896 quand Hadamard et la Vallée Poussin démontrèrent le théorème des nombres premiers

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\psi(x) \sim x \quad (x \rightarrow \infty), \tag{6}$$

où

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\alpha, \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

en justifiant les indications et les intuitions de Riemann sur la fonction $\zeta(s)$.

Pendant un siècle, hors quelques contributions notables de Mertens, Axer et Landau, les méthodes réelles progressèrent peu. Il fallut attendre 1948 pour que Selberg découvrit que la relation

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi(x/n) \sim 2x \log x \quad (x \rightarrow \infty), \tag{7}$$

conséquence immédiate de la forme (6) du théorème des nombres premiers, pouvait en fait être démontrée élémentairement *sans supposer connu le théorème des nombres premiers*. Quand Erdős prit connaissance

de (7), un dialogue (qui se termina d'ailleurs en conflit) entre ces deux géants des mathématiques du XX^e siècle aboutit aux premières démonstrations de (6) par les méthodes de l'analyse réelle.

Mon principal programme de travail est d'assimiler, analyser, revisiter, et si possible développer l'ensemble des idées et techniques apparues depuis cet événement majeur.** Il ne s'agit évidemment pas d'ignorer l'apport fondamental des idées de Riemann, mais plutôt de faire connaître et de perfectionner la « voie réelle », peut-être jusqu'au point où les deux approches pourraient se combiner.

Les principaux contributeurs à la théorie ont été : Bombieri, Wirsing, Diamond, Steinig, Wen-Chao Lu. Ce dernier a démontré en 1999 l'estimation

$$\psi(x) - x = O_\varepsilon(xe^{-(\log x)^{1/2-\varepsilon}})$$

pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire (à ε près) l'estimation obtenue par la Vallée Poussin un siècle plus tôt par l'analyse de la fonction de variable complexe $\zeta(s)$. Améliorer cet exposant $\frac{1}{2}$ constituerait une avancée considérable dans la théorie.

Jusqu'à présent, mes contributions sont :

- l'article **R18**, où je montre comment généraliser (7) en utilisant la fonction *de variable réelle* $\zeta(s)$ et la théorie des polynômes d'Appell ;

- une brochure en langue russe, *Асимптотический закон распределения простых чисел*, à paraître en 2011 aux éditions МИИМО, issue d'un cours donné lors de l'école d'été « Современная Математика » de juillet 2009 à Dubna ; j'y expose une variante de la démonstration d'Erdős et Selberg, due à Postnikov et Romanov.

Mon document de travail actuel (d'une centaine de pages) est destiné à devenir un article, ou une série d'articles, ou un livre.

2 Propriétés fines de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »

En collaboration avec Bruno Martin, nous avons entrepris de répondre à des questions posées dans l'article **R16** sur la fonction d'autocorrélation $A(\lambda)$: quels sont ses points de dérivabilité ? quels sont ses extrema locaux ?

Nous avons d'abord observé une proximité entre $A(\lambda)$ et l'intégrale de la fonction de Brjuno, connue pour son rôle dans la théorie des systèmes dynamiques. Nous avons soumis pour publication un article, *Comportement local moyen de la fonction de Brjuno*, et sommes actuellement en train d'adapter les résultats obtenus à l'étude de $A(\lambda)$.

**Quelques mathématiciens, parfois reconnus, estiment sincèrement que ces méthodes sont dépourvues d'intérêt. Ainsi P. Cartier qualifie la démonstration d'Erdős et Selberg de « *tricky and uninformative extension of Chebyshev's reasoning* » et H. Cohen écrit à propos du traité classique de Hardy et Wright : « *Avoid reading parts like the "elementary" proof of the prime number theorem. Proofs based on complex function theory, while based on deeper concepts, are much more enlightening.* ». Une étude humble et approfondie des travaux d'Erdős, Selberg et leurs continuateurs révèle vite la vanité de telles appréciations.

ENSEIGNEMENT ET ENCADREMENT DOCTORAL

1 Principales activités d'enseignement hors 3^e cycle

1979-1981 : Interrogations orales en classe de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand (Paris).

1983-1984 : Soldat-professeur en classe de Mathématiques Spéciales au Collège Militaire du Mans.

1984-1990 : Assistant, puis maître de conférences à l'Université de Limoges. Travaux dirigés et cours divers, notamment en analyse numérique. Également cours d'analyse numérique au CNAM (Limoges).

Depuis 1990 : Interrogations en classe de Mathématiques Spéciales au lycée Camille Jullian (Bordeaux) ; travaux dirigés de probabilités et statistiques à l'ENSAM (Bordeaux) ; cours et travaux dirigés d'analyse, probabilités et statistiques en licence *Sciences de l'ingénieur* à l'Université Aix-Marseille 3.

2 Enseignement de troisième cycle

1989-90 : Théorie analytique des nombres et méthodes de factorisation
(cours de 25h, D. E. A. de Cryptographie et Optimisation, Limoges)

1991-92 : Théorie analytique des nombres
(cours de 25h, D. E. A. de Mathématiques pures, Bordeaux)

1996-97 : Répartition des nombres premiers
(cours de 25h, D. E. A. de Mathématiques pures, Bordeaux)

1997-98 : Méthode du cercle, fonctions thêta et presque-périodicité
(10h d'un cours de 25h commun avec Ahmed Sebbar, D. E. A. de Mathématiques pures, Bordeaux)

1999-2000 : L'hypothèse de Riemann
(cours de 25h, D. E. A. de Mathématiques pures, Bordeaux)

2001-2002 : The distribution of prime numbers in arithmetic progressions
(cours de 30h, Université d'Heraklion, Grèce)

2003-2004 : Introduction à l'hypothèse de Riemann
(cours de 10h, École Doctorale de Mathématiques, Marseille ; Post-graduation en analyse complexe, U.S.T.H.B., Alger, Algérie) ;

Le critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann
(4h d'un cours de 8h commun avec Eric Saias, Semestre « Explicit Methods in Number Theory », I.H.P., Paris)

2004-2005 : An introduction to the zeta function and the Riemann hypothesis
(cours de 18h, Université Indépendante de Moscou, Russie)

2009-2010 : Преобразование Меллина и дзета-функция Римана
(cours de 18h, Université Indépendante de Moscou, Russie)

3 Encadrement doctoral

3.1 Directions de thèses de doctorat de l'université Bordeaux 1

- C. Tudesq, *Sur la distribution de certaines fonctions arithmétiques*, thèse soutenue en 1994.

Christian Tudesq a étudié la fonction sommatoire de la fonction totient de Jordan et la distribution des valeurs de la fonction $\omega_E(n) = \sum_{p \in E, p|n} 1$. Ses résultats ont donné lieu à trois publications (C.R.A.S. Paris, Acta Arith., Archiv der Math.). Il a depuis publié un article au Ramanujan Journal, apportant une réponse partielle à une question que je lui avais posée sur la distribution des valeurs de $\omega(n)$ dans les petits intervalles.

- B. Deloménie, *Résultats effectifs pour l'unimodalité de $N(x, k)$* , thèse soutenue en 1995.

Bertrand Deloménie a montré pour $\log \log x \geq 349$ l'unimodalité de la distribution de $\Omega(n)$ pour $n \leq x$.

- M. Souaf, *Majorations explicites de fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives*, thèse soutenue en 1996.

Malika Souaf a donné des formes numériquement explicites de plusieurs inégalités classiques de la théorie des fonctions multiplicatives.

- A. de Roton, *Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg*, thèse soutenue en 2003.

Anne de Roton a généralisé à la classe de séries de Dirichlet introduite par Selberg en 1989 le critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann, ainsi que des résultats récents de Báez-Duarte et Burnol. Ses résultats ont donné lieu à cinq publications (C.R.A.S. Paris, Transactions A.M.S., Bulletin S.M.F., Acta Arithmetica, Journal of Number Theory)

- N. Jousse, *Étude d'un problème d'approximation lié à l'hypothèse de Riemann*, thèse soutenue en 2004.

Nicolas Jousse a démontré la décroissance stricte de la suite

$$\delta_n = \inf \text{dist}_{L^2(0, \infty)}(\chi, \text{Vect}(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n})),$$

où l'infimum porte sur tous les n -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [1, \infty]^n$. Pour cela, il a étudié un problème général de continuité d'une projection sur un sous-espace variable d'un espace de Hilbert. Ses résultats ont donné lieu à une publication (Annales de l'Institut Fourier).

- A. Chadozeau, *Sur la distribution des entiers sans petit facteur premier*, thèse soutenue en 2006.

Arnaud Chadozeau a étudié les moments centrés du nombre d'entiers premiers à q dans un intervalle de longueur h ; il a amélioré des résultats de Montgomery et Vaughan, dans la direction d'une conjecture d'Erdős sur le plus grand écart entre nombres premiers à q consécutifs. Il a également étudié la fonction sommatoire de la somme de Ramanujan d'indice q et obtenu une version effective d'un théorème de Mazet sur le graphe divisoriel. Ses résultats ont donné lieu à trois publications (C. R. A. S. Paris, Journal of Number Theory, Periodica Math. Hungarica).

- O. Velasquez Castañon, *Sur la répartition des zéros de certaines fonctions méromorphes liées à la fonction zêta de Riemann*, thèse soutenue en 2008.

Oswaldo Velasquez Castañon a étudié notamment la répartition des zéros des sommes partielles de la série de Dirichlet de la fonction zêta. Il a également obtenu une généralisation du théorème d'Hermite-Biehler, résultat publié au Journal d'Analyse Mathématique.

La liste ci-dessous contient les références des articles de mes étudiants issus de leur thèse, ou sur lesquels j'ai encore eu une influence.

Références

- [1] A. CHADOZEAU – « Une remarque sur les sommes de Ramanujan », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 7, p. 399–404.
- [2] — , « Sur la répartition des entiers premiers à un entier sans petit facteur premier », *J. Number Theory* **128** (2008), no. 8, p. 2282–2317.
- [3] — , « Sur les partitions en chaînes du graphe divisoriel », *Period. Math. Hungar.* **56** (2008), no. 2, p. 227–239.
- [4] N. JOUSSE – « Étude d'un problème de continuité lié à l'hypothèse de Riemann », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 4, p. 1373–1410.
- [5] A. DE ROTON – « Généralisation du critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), no. 3, p. 191–194.
- [6] — , « Une approche hilbertienne de l'hypothèse de Riemann généralisée », *Bull. Soc. Math. France* **134** (2006), no. 3, p. 417–445.
- [7] — , « Généralisation du critère de Beurling-Nyman pour l'hypothèse de Riemann », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 12, p. 6111–6126 (electronic).
- [8] — , « On the mean square of the error term for an extended Selberg class », *Acta Arith.* **126** (2007), no. 1, p. 27–55.
- [9] — , « Une approche séquentielle de l'hypothèse de Riemann généralisée », *J. Number Theory* **129** (2009), no. 11, p. 2647–2658.
- [10] C. TUDESQ – « Minoration de la loi locale de certaines fonctions additives », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), no. 1, p. 1–4.
- [11] — , « Majoration de la loi locale de certaines fonctions additives », *Arch. Math. (Basel)* **67** (1996), no. 6, p. 465–472.
- [12] — , « Étude d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan », *Acta Arith.* **80** (1997), no. 1, p. 61–75.
- [13] — , « Étude de la loi locale de $\omega(n)$ dans de petits intervalles », *Ramanujan J.* **4** (2000), no. 3, p. 277–290.

3.2 Mémoires de D. E. A. et master recherche

- M. Souaf, *Théorie des formes quadratiques binaires à coefficients entiers*, Limoges, 1990.
- A.-C. Barry, *Sur des articles de J. Kaczorowski : les fonctions k de la théorie multiplicative des nombres. Application au problème de Shanks-Renyi*, Bordeaux, 1997.
- H. Kadiri, *Distribution des entiers premiers à n* , Bordeaux, 1998.
- N. Jousse, *Distribution des nombres premiers et fonctions à oscillation moyenne bornée*, Bordeaux, 2000.

- A. de Roton, *Majoration de la somme $\sum_{p \leq x} \chi(p)$ à l'aide d'un théorème de densité des zéros de $L(s, \chi)$* , Bordeaux, 2000.
- A. Chadozeau, *Sur la distribution des entiers premiers à q* , Paris et Bordeaux, 2002.
- E. Montaut, *Estimations de sommes multiples de fonctions arithmétiques*, Bordeaux, 2004.
- A. Gryson, *Fonction ζ de Riemann et transformation de Fourier*, Bordeaux, 2005.

3.3 Participation à d'autres jurys doctoraux ou d'habilitation

J'ai participé à 24 autres jurys de soutenance de thèse ou d'habilitation, dans 12 universités, en étant 16 fois rapporteur.

- A. Smati, thèse, Limoges, 1990.
- F. Hennecart, thèse, Bordeaux, 1991 (rapporteur).
- A. Raouj, thèse, Nancy, 1992 (rapporteur).
- Y-F.S. Pétermann, habilitation, Lyon, 1993.
- L. Habsieger, habilitation, Bordeaux, 1993 (rapporteur).
- J.-L. Duras, thèse, Limoges, 1993 (rapporteur).
- G. Juin, thèse, Limoges, 1996.
- F. Marie-Jeanne, thèse, Nancy, 1998 (rapporteur).
- A. Smati, habilitation, Limoges, 1998.
- F. Hennecart, habilitation, Bordeaux, 2001.
- J.-F. Burnol, habilitation, Nice, 2001 (rapporteur).
- F. Bayart, thèse, Lille, 2002.
- S. Kerner, thèse, Nancy, 2002 (rapporteur).
- H. Kadiri, thèse, Lille, 2002 (rapporteur).
- J. Wu, habilitation, Nancy, 2003 (rapporteur).
- O. Ramaré, habilitation, Lille, 2003 (rapporteur).
- M. Naimi, thèse d'état tunisienne, Tunis, 2003 (rapporteur).
- V. Toulmonde, thèse, Évrý, 2004 (rapporteur).
- M. Hernane, thèse, Alger, 2005 (rapporteur).
- B. Calado, thèse, Orsay, 2006 (rapporteur).
- H. Guediry, thèse, Amiens, 2007 (rapporteur).
- P. Lebacque, thèse, Marseille, 2007.
- A. Zykin, thèse, Marseille, 2009.

- A. Saldana, thèse, Lille, 2009 (rapporteur).

4 Participation, en tant que conférencier invité, à des conférences internationales à l'étranger

J'ai répondu positivement à 20 invitations, venant de 9 pays, à participer à des conférences internationales.

1986

- Workshop on analytic and elementary number theory, MFO, Oberwolfach (Allemagne). Exposé : *On the average exponent in the factorisation of an integer*.

1987

- Colloque de théorie des nombres, Québec (Canada). Exposé : *Grandes déviations pour certaines fonctions arithmétiques*.
- Elementary and analytic number theory, Budapest (Hongrie). Exposé : *Unimodality of the distribution of the distribution of Ω* .

1989

- Colloque de théorie des nombres, Alger (Algérie). Exposé : *Formules sommatoires de Selberg et applications*.
- Analytic Number Theory, Urbana (États-Unis d'Amérique). Exposé : *Elementary proof of a theorem of Bateman*.
- Conference on Analytic Number Theory, Amalfi (Italie). Exposé : *Unimodality of the distribution of ω* .
- Theory of probability and mathematical statistics, Vilnius (Lituanie, à l'époque : U.R.S.S.). Exposé : *Unimodality of the distribution of ω* .

1991

- Analytic and probabilistic methods in number theory, Palanga (Lituanie). Exposé : *On the Euler function*.

2000

- Millenium Conference on Number Theory, Urbana (États-Unis d'Amérique). Exposé : *Nyman's criterion for the Riemann hypothesis*.

2001

- Theory of the Riemann zeta and allied functions, MFO, Oberwolfach (Allemagne). Exposé : *On some determinants connected with the Riemann hypothesis.*

2002

- Analytic number theory and diophantine equations, Max Planck Institut, Bonn (Allemagne). Exposé : *An approximation problem connected with the Riemann hypothesis*

2003

- Elementare und analytische Zahlentheorie, MFO, Oberwolfach (Allemagne). Exposé : *The fractional part function and the Riemann hypothesis.*

2004

- 2^e colloque algéro-français de théorie des nombres, Alger (Algérie). Exposé : *Parties fractionnaires dans un espace de Hilbert.*
- Theory of the Riemann zeta and allied functions, MFO, Oberwolfach (Allemagne). Exposé : *A continuity property connected with Nyman's criterion for the Riemann hypothesis.*

2005

- Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics, Saint-Petersbourg (Russie). Exposé : *A problem with fractional parts in a Hilbert space.*

2006

- Elementare und analytische Zahlentheorie ELAZ 06, Blaubeuren (Allemagne). Exposé : *On the elementary proof of the prime number theorem.*
- Workshop on analytic number theory, Kyoto (Japon). Exposé : *Some remarks on elementary prime number theory.*

2007

- Global Fields, Moscou (Russie). Exposé : *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers.*
- Летняя школа “Современная математика”, Dubna (Russie). Exposé : *Арифметические прогрессии простых чисел.*

2009

- Летняя школа “Современная математика”, Dubna (Russie). Exposé : *Элементарное доказательство теоремы о простых числах.*

5 Principaux séjours de recherche à l'étranger

1987

- Séjour d'un mois à Vilnius (Lituanie, U. R. S. S.) dans l'équipe de théorie probabiliste des nombres de J. Kubilius.
- Séjour d'une semaine à Alger (Algérie) à l'Institut de Mathématiques de l'U. S. T. H. B. (collaboration avec A. Smati et F. Khellaf).

1989

- Séjour de deux semaines à Budapest (Hongrie) à l'institut de mathématiques de l'académie des sciences (collaboration avec G. Halász, I. Ruzsa et A. Sárközy).

1990

- Conférence au Colloquium de la section de mathématiques de l'université de Genève (Suisse) : *Facteurs premiers et loi de Poisson*.

1998

- Séjour de dix jours à Caracas (Vénézuéla) à l'invitation de l'Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC). Collaboration avec Luis Báez-Duarte et Eric Saias, et conférence au Colloquium du département de mathématiques de l'IVIC : *Some aspects of the Riemann hypothesis*.
- Séjour de deux semaines à Vienne (Autriche), à l'Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics (ESI), à l'invitation d'Alain Connes et Ivan Todorov. Participation au colloque sur la fonction ζ (conférence d'Eric Saias sur nos travaux communs : *The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis*, cf. **E10**).

2001

- Séjour d'une semaine à Tunis (Tunisie), à l'Institut de Mathématiques de la Faculté des Sciences. Collaboration avec Mongi Naimi, et conférence au séminaire de théorie des nombres : *Le critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann*.

2002

- « Visiting Professor » pendant quatre mois au département de Mathématiques de l'Université d'Heraklion (Grèce).
- Participation à l'animation du débat « Functional analytic approaches » lors du colloque « Zeta Functions and Associated Riemann Hypotheses » au Courant Institute, New York (États-Unis).

2004

- Séjour de dix jours à Alger (Algérie) à l'Institut de Mathématiques de l'U. S. T. H. B. Cours sur l'hypothèse de Riemann dans le cadre de la post-graduation d'analyse complexe; exposés au séminaire d'analyse complexe, au séminaire de probabilités et statistiques, et au colloquium de mathématiques.

2005

- Affectation pour un an au laboratoire franco-russe Poncelet (CNRS-Université Indépendante de Moscou).

2009

- Affectation pour un an au laboratoire franco-russe Poncelet (CNRS-Université Indépendante de Moscou).

ANIMATION DE LA RECHERCHE

1 Organisation de colloques

J'ai participé à l'organisation :

- du colloque de théorie analytique des nombres d'octobre 1992 au CIRM,
- du colloque « Centenaire du théorème des nombres premiers » de janvier 1996 à Bordeaux.
- des journées S.M.F. « État de la recherche en théorie analytique des nombres » en décembre 2000 à Bordeaux.
- du colloque « Zeta Functions » (ZF1) de septembre 2006 à Moscou.
- du colloque « Zeta Functions » (ZF2) de décembre 2008 à Moscou.
- du colloque « Zeta Functions » (ZF3) de juin 2010 à Moscou.

2 Organisation de semestre thématique

J'ai été co-organisateur d'un semestre thématique de théorie des nombres au laboratoire Poncelet (CNRS-Université Indépendante de Moscou) de janvier à juin 2010 dans le cadre de l'année croisée France-Russie.

3 Organisation de séminaires

- J'ai été de septembre 1998 à juin 2001 responsable du Colloquium du département de mathématiques de l'université Bordeaux 1.
- J'ai été co-organisateur du séminaire de théorie des nombres au laboratoire Poncelet (CNRS-Université Indépendante de Moscou) pendant l'année universitaire 2009-2010.

4 Activité éditoriale

J'ai été en 1994-1995 directeur adjoint de la publication du Journal de théorie des nombres de Bordeaux, notamment en charge de la publication des actes des 18^{es} Journées arithmétiques.

5 Expertise

- Rédaction de nombreux rapports d'arbitrage, notamment pour les revues : Acta Arithmetica ; Bulletin de la Société Mathématique de France ; Bulletin of the London Mathematical Society ; Compositio Mathematica ; Journal d'Analyse Mathématique ; Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux ; Journal für die reine und angewandte Mathematik ; Journal of Number Theory ; JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications ; Monatshefte für mathematik ; Moscow mathematical Journal.
- J'ai été plusieurs fois sollicité pour rédiger des rapports sur des candidats aux concours Möbius et Deligne (accordant des bourses à de jeunes mathématiciens de Russie).

6 Initiation à la recherche

- Rencontre avec les élèves du lycée français d'Athènes (Grèce) en mai 2002 : *Le métier de chercheur*.
- Participation en 2002-2003 et 2003-2004 à l'opération « Maths en jeans » (collèges de Cestas et Mérignac, Gironde).
- Participation en 2008 et 2009 à l'animation de stages « Hippocampe » (initiation à la recherche pour des classes de lycée) à l'IREM de Marseille, sur les thèmes « Arithmétique », « Théorie des graphes », « Nombres rationnels et irrationnels ».

7 Participation à des commissions de spécialistes et comités de sélection

J'ai été membre de commissions de spécialistes et de comités de sélection dans les universités d'Aix-Marseille 2, Bordeaux 1, Lille 1 et Limoges.