ACTA ARITHMETICA
LII (1989)

Sur la moyenne des exposants dans la décomposition en facteurs premiers

par

MICHEL BALAZARD (Limoges)

I. Introduction.

1. Si l'entier n, $n \geqslant 2$, s'écrit $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i des entiers > 0, la moyenne des exposants dans la décomposition de n en facteurs premiers est

$$f(n) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)/k;$$

$\omega(n)$ et $\Omega(n)$ désignant le nombre de facteurs premiers de n, comptés respectivement sans et avec multiplicité, cette moyenne s'écrit

$$f(n) = \Omega(n)/\omega(n).$$

J.M. De Koninck et A. Ivić ont étudié l'ordre moyen de $f(n)$ et obtenu la relation suivante, valable pour $x \geqslant 3$:

$$(1) \qquad \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n) = x\left(a_1 + b_1 L_1(x) + \frac{a_2 + b_2 L_2(x)}{\log x} + \ldots + \frac{a_N + b_N L_N(x)}{(\log x)^{N-1}} + O_N\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)\right)$$

pour tout entier $N \geqslant 1$, où $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sont des constantes calculables et $L_1(x), \ldots, L_N(x)$ des fonctions à oscillation lente asymptotiques à $1/\log\log x$ et admettant des développements asymptotiques suivant les puissances de $1/\log\log x$ (cf. [2], chapitre 5, corollaire 5.6).

En particulier l'ordre moyen de f est 1. Compte tenu de (1) et de l'inégalité $f \geqslant 1$, on a aussi:

$$(2) \qquad N(x, \alpha) := \operatorname{card}\{n \in N \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) \geqslant \alpha\} \ll x/((\alpha - 1)\log\log x)$$

pour tout $x \geqslant 3$ et tout $\alpha > 1$.

Dans cet article nous donnons de la fonction de répartition $N(x, \alpha)$ un développement asymptotique quand α est fixé et x tend vers $+\infty$, et une

2. Afin d'énoncer nos résultats, indiquons quelques notations.

Si α est rationnel et s'écrit $\alpha = p/q$ $(p, q \in \boldsymbol{N}^*, (p, q) = 1, p > q)$ nous posons

$$g(\alpha) = 1/\big(2q(1-2^{-1/q})\big).$$

Si α est irrationnel nous posons

$$g(\alpha) = 1/(2\log 2) = \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \in \boldsymbol{Q}}} g(\beta).$$

Pour tout $\alpha > 1$ nous posons

$$h(\alpha) = g(\alpha)\frac{2^{1-\alpha}}{2^{2^{1-\alpha}}\Gamma(2^{1-\alpha})}\prod\left(1-\frac{1}{l}\right)^{2^{1-\alpha}}\left(1+\frac{2^{1-\alpha}}{l-2}\right)$$

où le produit porte sur les nombres premiers $\geqslant 3$.

Nous utiliserons les notations $[\ ]$, $\{\ \}$, $\lceil\ \rceil$, $\|\ \|$ pour désigner respectivement la partie entière, la partie fractionnaire, le plafond $(\lceil y \rceil = \inf_{\substack{n \in \boldsymbol{Z} \\ n \geqslant y}} n = -[-y])$ et la distance à $\boldsymbol{Z}$.

Pour tout irrationnel λ et tout $t \geqslant 1$, soit $D_\lambda(t)$ la discrépance à l'ordre t de la suite $\{n\lambda\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Ainsi:

$$D_\lambda(t) = \sup_{0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1}\left|\frac{1}{t}\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant t \\ \alpha \leqslant \{n\lambda\} < \beta}} 1-(\beta-\alpha)\right|.$$

Nous posons également

$$D_\lambda^*(t) = D_\lambda(t)+\frac{1}{t^2}\int_1^t \theta D_\lambda(\theta)\,d\theta.$$

Notons que

$$D_\lambda^*(t) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

Si λ est de type fini $\eta \geqslant 1$, on a

$$D_\lambda^*(t) = O_{\lambda,\varepsilon}(t^{-1/\eta+\varepsilon}) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

(cf. [4], théorème 3.2); si, de plus, il existe une constante positive minorant $n^\eta \|n\lambda\|$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}^*$, on a

$$D_\lambda^*(t) = O_\lambda(t^{-1/\eta}), \qquad \text{pourvu que } \eta > 1 \text{ (cf. [3], p. 103).}$$

Remarquons également que, pour $t \geqslant 1$,

$$D_\lambda^*(t) \geqslant D_\lambda(t) \geqslant 1/t$$

3. Nous obtenons les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Soient* α_1 *et* $\alpha_2 \in]1, +\infty[$. *On a*:

$$N(x, \alpha) = h(\alpha)\, x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \left(1 + O_{\alpha_1,\alpha_2}\left(D_\alpha^* \left(\sqrt{2^{1-\alpha} \log \log x}\right)\right)\right)$$

uniformément pour $x \geqslant 3$ *et* α *irrationnel* $\in [\alpha_1, \alpha_2]$.

COROLLAIRE. *Si* α *est irrationnel de type* $\tau \geqslant 1$, *le terme d'erreur du théorème* 1 *est*

$$O_{\alpha,\varepsilon}\left((\log \log x)^{-1/2\tau+\varepsilon}\right) \qquad \textit{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Si $\tau > 1$ *et si* $n^\tau \|n\alpha\|$ *est minorée par une constante positive pour tout* $n \in N^*$, *on peut prendre* $\varepsilon = 0$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\alpha_2 \in]1, +\infty[$. *On a*:

$$N(x, \alpha) = h(\alpha)\, x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \Big(1 + O\left((q-1)(\log x)^{-2^{1-\alpha} 2 \sin^2 \pi/q}\right) + O_{\alpha_2}\left((\log \log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha}-2^{1-\alpha}}\right)\Big)$$

uniformément pour $x \geqslant 3$ *et* α *rationnel* $\in]1, \alpha_2]$, q *désignant le dénominateur de* α *écrit sous forme irréductible.*

THÉORÈME 3. *On a*

$$N(x, \alpha) \ll \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \qquad \textit{pour tout } x \geqslant 3 \textit{ et tout } \alpha > 1.$$

Faisons ici quelques remarques. La fonction $h(\alpha)$ est continue aux points irrationnels, et discontinue aux points rationnels, où elle vérifie

$$h(\alpha) > \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \neq \alpha}} h(\beta).$$

Si $\alpha = p/q$ $(p, q \in N^*, (p, q) = 1, p > q)$ on peut s'interesser à

$$N'(x, \alpha) = \operatorname{card} \{ n \in N \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) = \alpha \}.$$

Une démonstration semblable à celle du théorème 2 permet de voir que $N'(x, \alpha)$ fournit une contribution non négligeable à $N(x, \alpha)$:

$$N'(x, \alpha) \sim (1 - 2^{-1/q})\, N(x, \alpha), \qquad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

Pour la quantité

$$N(x, \alpha) - N'(x, \alpha) = \operatorname{card} \{ n \in N \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) > \alpha \},$$

on obtient des résultats similaires aux théorèmes 1 et 2 mais la fonction $h_1(\alpha)$ remplaçant $h(\alpha)$ vérifie cette fois:

Dans le même ordre d'idées, nous posons la question suivante: $\alpha > 1$ étant un irrationnel fixé, la quantité $\operatorname{card}\{n \in N \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n)$ est une réduite $> \alpha$ dans le développement de α en fraction continue$\}$ fournit-elle une contribution non négligeable à $N(x, \alpha)$?

Cette question apparaît de façon naturelle dans notre démonstration (voir n° 4).

Il est interessant de donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha = \alpha(x)$ pour que $N(x, \alpha) = o(x)$ quand x tend vers l'infini. La relation (2) montre qu'il suffit que $(\alpha-1)\log\log x$ tende vers l'infini avec x. C'est aussi nécessaire, comme le montre la minoration suivante, dûe à G. Tenenbaum (lettre du 11 juin 1986):

$$(2') \qquad 1 + N(x, \alpha) \gg x/(\log x)^{(\alpha-1)\log 2}, \qquad \text{valable pour } x \geqslant 3 \text{ et } \alpha > 1.$$

Pour démontrer (2′) on observe que les entiers n tels que: $n \leqslant x$, $n = 2^k m$ où m est pair sans facteur carré et vérifie $\omega(m) \leqslant \log\log x$, sont comptés dans $N(x, \alpha)$ si $k = \lceil (\alpha-1)\log\log x \rceil$. En effet:

$$\Omega(n) = k + \omega(m) \quad \text{et} \quad \omega(n) = \omega(m) \quad \text{donc } f(n) \geqslant 1 + \frac{k}{\log\log x} \geqslant \alpha.$$

Ainsi

$$N(x, \alpha) \geqslant \sum_{\substack{m \leqslant x/2^k \\ \omega(m) \leqslant \log\log x}} \varkappa(m) \geqslant \sum_{\substack{m \leqslant x/2^k \\ \omega(m) \leqslant \log\log(x/2^k)}} \varkappa(m),$$

où $\varkappa$ est la fonction caractéristique des entiers pairs sans facteur carré. Le théorème d'Erdős–Kac pour ces entiers donne alors

$$N(x, \alpha) \gg x/2^k \gg x/(\log x)^{(\alpha-1)\log 2} \quad \text{si } x/2^k \geqslant 16, \quad \text{d'où (2')}.$$

Notons que pour $\alpha = 1 + c/\log\log x$, où c est une constante positive, (2) et (2′) donnent l'encadrement: $x/2^c \ll N(x, \alpha) \ll x/c$, qu'il serait interessant de préciser.

On peut d'autre part montrer que les exposants de $\log x$ intervenant dans les termes restes du théorème 2 sont les meilleurs possibles. En particulier, si $\alpha > 1$ est un entier fixé, on a un développement asymptotique pour $x \geqslant 3$, k entier $\geqslant 1$:

$$N(x, \alpha) = \frac{x}{\log x}\Big(\sum_{j=1}^{k} h_j(\alpha)(\log x)^{l_j^{1-\alpha}} + O_{k,\alpha}\big((\log x)^{l_{k+1}^{1-\alpha}}\big)\Big)$$

où $h_1(\alpha) = h(\alpha)$, les $h_j(\alpha)$ étant des réels positifs, et $2 = l_1 < l_2 < \ldots$ la suite des nombres premiers.

Au paragraphe II nous donnons la démonstration des théorèmes 1, 2, 3.

au sens de Borel si

$$e^{-X}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X^n}{n!}$$

tend vers a quand X tend vers l'infini). La résolution de ce problème est l'objet du lemme suivant, démontré dans le paragraphe III:

LEMME. *Soit* u: $[0, 1] \to [0, 1]$ *lipschitzienne de rapport* 1; β *et* y *deux réels.*

(i) *Si* β *est irrationnel, on a uniformément pour* $X \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u(\{k\beta+y\})\frac{X^k}{k!} = e^X\Big(\int_0^1 u(t)\,dt + O\big(D^*(\sqrt{X})\big)\Big).$$

(ii) *Si* β *est rationnel* ($\beta = p/q$ *où* $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}^*$ *et* $(p, q) = 1$) *et si* y *appartient à* $1/q\boldsymbol{Z}$ ($y = a/q$, $a \in \boldsymbol{Z}$) *on a uniformément pour* $X \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u(\{k\beta+y\})\frac{X^k}{k!} = e^X\left(\frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) + O\big((q-1)\,e^{-2X\sin^2\pi/q}\big)\right).$$

La question de l'estimation de $N(x, \alpha)$ a été posée par A. Ivić. La réponse que nous donnons dans cet article a été obtenue indépendamment par G. Tenenbaum (cf. [9]). Il utilise une méthode différente de la nôtre et obtient dans certains cas des résultats meilleurs (par exemple quand α est un irrationnel quadratique).

Je tiens à remercier ici les mathématiciens qui m'ont aidé à préparer cet article: J.M. De Koninck, A. Ivić, J.L. Nicolas, C. Pomerance et G. Tenenbaum.

II. Démonstration des théorèmes.

4. A une unité près $N(x, \alpha)$ est égal à $\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Omega(n) \geqslant \alpha\omega(n)}} 1$. On se ramène ainsi à un problème concernant la distribution conjointe de Ω et ω: dire que $\Omega(n) \geqslant \alpha\omega(n)$, c'est dire que $\big(\Omega(n), \omega(n)\big)$ appartient à $E_\alpha := \{(h, k) \in \boldsymbol{N}^2 \mid h \geqslant \alpha k\}$. Graphiquement, E_α est la partie du réseau des points à coordonnées entières $\geqslant 0$ située au dessus de la droite passant par $(0, 0)$ et de pente α. Quand cette pente est irrationnelle, les sommets de l'enveloppe convexe de $E_\alpha \setminus \{(0, 0)\}$ sont les couples (h, k) tels que h/k soit une réduite $> \alpha$ dans le développement de α en fraction continue (cf. [1], p. 111).

L'outil naturel est la formule de Cauchy:

$$(3) \qquad 1 + N(x, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|z_1| = r_1} \sum_{n \leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)} \sum_{(h,k) \in \boldsymbol{N}^2} z_1^{-h-1} z_2^{-k-1}\, dz_1\, dz_2.$$

Posons

$$M(z_1, z_2) = \sum_{\substack{(h,k)\in N^2 \\ h\geqslant \alpha k}} z_1^{-h-1} z_2^{-k-1}.$$

Pour que (3) soit vraie il suffit que la série $M(r_1, r_2)$ soit convergente.

Or

$$M(r_1, r_2) = \sum_{k\geqslant 0} r_2^{-k-1} \frac{r_1^{-\lceil \alpha k \rceil - 1}}{1-1/r_1} \qquad \text{si } r_1 > 1.$$

On a donc

$$M(r_1, r_2) \leqslant \frac{1}{r_2(r_1-1)} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(r_2 r_1^\alpha)^k} < +\infty \qquad \text{si } r_2 r_1^\alpha > 1.$$

Ainsi $M(z_1, z_2)$ est holomorphe pour $|z_1| > 1$ et $|z_2|\,|z_1|^\alpha > 1$ et (3) est valable si $r_1 > 1$ et $r_2 r_1^\alpha > 1$.

5. Nous allons maintenant évaluer

$$\sum_{n\leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}$$

grâce au théorème suivant dû à Atle Selberg (voir [6], théorème 2 et [7], p. 79):

Soit E un ensemble et $\varphi\colon E \to C$ une application. Soit

$$F(s, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_z(n)/n^s$$

une série de Dirichlet convergente pour $\operatorname{Re} s > 1$, $z \in E$.

On pose

$$G(s, z) = \zeta(s)^{-\varphi(z)} F(s, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_z(n)/n^s$$

et l'on suppose l'existence de deux constantes positives B et H telles que l'on ait pour $z\in E$ et $|\varphi(z)| \leqslant B$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_z(n)|}{n} \log^{B+2}(3n) \leqslant H.$$

Alors on a, uniformément pour $z\in E$, $|\varphi(z)| \leqslant B$ et $x \geqslant 2$

$$\sum_{n\leqslant x} a_z(n) = \frac{G(1, z)}{\Gamma(\varphi(z))} x(\log x)^{\varphi(z)-1} + O_B\big(Hx(\log x)^{\varphi(z)-2}\big).$$

Ici nous prenons $E = \{(z_1, z_2) \in C^2 \mid |z_1| \leqslant 2(1-\eta)\}$ où $\eta \in]0, 1/3[$, $\varphi\colon E \to C$ définie par

Si $(z_1, z_2) \in E$ et $\operatorname{Re} s > 1$ le produit infini suivant (portant sur les nombres premiers) converge:

$$\prod_l \left\{1 + \left|\frac{z_1 z_2}{l^s}\right| + \left|\frac{z_1^2 z_2}{l^{2s}}\right| + \ldots\right\} = \prod_l \left\{1 + \frac{z_1 z_2}{|l^s| - |z_1|}\right\}.$$

D'après le théorème du produit eulerien, la série

$$F(s, z_1, z_2) = \sum_{n \geq 1} \frac{z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}}{n^s}$$

converge absolument pour $(z_1, z_2) \in E$, $\operatorname{Re} s > 1$.

Pour([1]) $(z_1, z_2) \in E$, b_{z_1, z_2} est alors la fonction multiplicative dont les valeurs sur les puissances de nombres premiers sont définies par l'identité

$$(4) \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} b_{z_1, z_2}(l^\nu) \xi^\nu = (1-\xi)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{\xi z_1 z_2}{1 - \xi z_1}\right).$$

Comme le membre de droite de (4) est une fonction analytique de ξ pour $|\xi| < 1/2(1-\eta)$ on obtient par la formule de Cauchy

$$|b_{z_1, z_2}(2^\nu)| \ll_B \eta^{-1} (2-\eta)^\nu, \qquad |b_{z_1, z_2}(l^\nu)| \ll_B (5/2)^\nu \qquad (l \geq 3).$$

De plus, (4) implique que $b_{z_1, z_2}(l) = 0$ pour tout premier l. La série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| n^{-s}$ est donc absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 1 - \eta/4 \log 2$ et est $\ll_B \eta^{-2}$ dans ce demi plan.

Dans la suite nous utiliserons seulement $B = 2$. La formule de Cauchy à l'ordre 4 appliquée à $s \to \sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| n^{-s}$ donne la majoration:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| (\log 3n)^4 n^{-1} \ll \eta^{-6} \qquad \text{pour tout } (z_1, z_2) \in E.$$

Le théorème de Selberg donne donc:

(5) pour $x \geq 3$, $|z_1| < 2$, $z_2 \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{n \leq x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)} = F(z_1, z_2)\, x (\log x)^{z_1 z_2 - 1} + Q(x, z_1, z_2)$$

où

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{\Gamma(z_1 z_2)} \prod_l \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{z_1 z_2}{l - z_1}\right)$$

(fonction holomorphe pour $|z_1| < 2$ et $z_2 \in \boldsymbol{C}$) et

$$Q(x, z_1, z_2) = O(\eta^{-6} x (\log x)^{z_1 z_2 - 2})$$

uniformément pour $|z_1| \leqslant 2(1-\eta)$, $|z_1 z_2| \leqslant 2$, $x \geqslant 3$.

Observons que

$$F(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2}$$

où

$$B(z_1, z_2) = \frac{2^{-z_1 z_2}}{\Gamma(z_1 z_2)}(z_1 - 2 - z_1 z_2) \prod_{l \geqslant 3} \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{z_1 z_2}{l - z_1}\right)$$

est fonction holomorphe de (z_1, z_2) pour $|z_1| < 3$, $z_2 \in \boldsymbol{C}$.

6. Les formules (3) et (5) montrent que

$$1 + N(x, \alpha) = S_1 + S_2,$$

où

$$S_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} F(z_1, z_2) x (\log x)^{z_1 z_2 - 1} M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

et

$$S_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} Q(x, z_1, z_2) M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

avec $1 < r_1 < 2$ et $r_2 > r_1^{-\alpha}$.

Estimation de S_1: Soit $r_1' \in]2, 3[$, $r_1 \in]1, 2[$ et $r_2 > 1$. La fonction

$$z_1 \to \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - 2} \int_{|z_2| = r_2} B(z_1, z_2) (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2) \, dz_2$$

est méromorphe pour $1 < |z_1| < 3$ avec au plus un pôle, simple, en $z_1 = 2$. Le théorème des résidus donne donc:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1' \\ |z_2| = r_2}} \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2} (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

$$= \frac{\log x}{x} S_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_2| = r_2} B(2, z_2) (\log x)^{2 z_2} M(2, z_2) \, dz_2 .$$

Cette dernière intégrale va fournir la contribution principale à $N(x, \alpha)$. C'est le coefficient de $1/z$ dans le développement en série de Laurent pour $|z| > 2^{-\alpha}$ de:

où la première série représente le développement en série entière sur $\boldsymbol{C}$ de $B(2, z)$ (remarquons ici que $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 = -4$, d'après l'expression de B donnée au numéro 5.). Le coefficient cherché vaut:

$$(6) \qquad \sum_{a,b \geqslant 0} \beta_a \frac{(2 \log\log x)^b}{b!} \sum_{h \geqslant \alpha(a+b)} 2^{-h-1} \quad \text{(on doit avoir } k = a+b\text{)}$$

$$= \sum_{a,b \geqslant 0} \beta_a \frac{(2 \log\log x)^b}{b!} 2^{[-\alpha(a+b)]}$$

$$= \sum_{a \geqslant 0} \beta_a (2^{-\alpha})^a \sum_{b \geqslant 0} \frac{(2^{1-\alpha} \log\log x)^b}{b!} 2^{-\{-\alpha(a+b)\}}.$$

Pour le théorème 3, on remarque que cette somme est $\ll 4^{-\alpha} (\log x)^{2^{1-\alpha}}$.

Pour le théorème 2, on utilise le (ii) du lemme démontré au paragraphe III, avec $u(t) = 2^{-t}$, $\beta = -\alpha$, $y = -\alpha a \in (1/q)\boldsymbol{Z}$ et $X = 2^{1-\alpha} \log\log x$. On a ici

$$\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{1}{2q(1-2^{-1/q})} = g(\alpha),$$

donc

$$\sum_{b \geqslant 0} \frac{(2^{1-\alpha} \log\log x)^b}{b!} 2^{-\{-\alpha(a+b)\}} = g(\alpha)(\log x)^{2^{1-\alpha}} + O\left((q-1)(\log x)^{2^{1-\alpha}\cos 2\pi/q}\right)$$

uniformément par rapport à $a \in \boldsymbol{N}$. En reportant dans (6) on obtient

$$g(\alpha) B(2, 2^{-\alpha})(\log x)^{2^{1-\alpha}} + O\left(4^{-\alpha}(q-1)(\log x)^{2^{1-\alpha}\cos 2\pi/q}\right).$$

En revenant à l'expression de F sous forme de produit infini et en remarquant que

$$|B(2, 2^{-\alpha})| \underset{\frown}{\smile} 4^{-\alpha}$$

on obtient bien:

$$-h(\alpha)(\log x)^{2^{1-\alpha}}\left(1 + O\left((q-1)(\log x)^{-2^{1-\alpha} 2 \sin^2 \pi/q}\right)\right).$$

Pour le théorème 1 le calcul est similaire, en utilisant le (i) du lemme.

Majorons maintenant l'intégrale:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r'_1 \\ |z_2| = r_2}} \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2} (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2.$$

Sa valeur est en fait indépendante de r'_1 et r_2 pourvu que $r'_1 \in]2, 3[$ et $r_2 r_1'^{\alpha} > 1$. Supposons r_2 borné par une constante absolue. Vues l'expression de B (n° 5) et la majoration de M (n° 4), cette intégrale est majorée en module par:

à une constante absolue multiplicative près. La dernière intégrale est

$$\ll \frac{(\log x)^{r_1' r_2}}{1+\sqrt{r_2 \log\log x}},$$

par la méthode de Laplace.

Pour les théorèmes 1 et 2, choisissons

$$r_1' = 3^{1-\frac{1}{20\log\log x}} \quad \text{et} \quad r_2 = 3^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{20\log\log x}},$$

d'où

$$r_2 r_1'^{\alpha} = 3^{\frac{1}{20\log\log x}} \quad \text{et} \quad r_2 r_1' = 3^{1-\alpha+\frac{\alpha}{20\log\log x}}.$$

L'intégrale considérée est donc $\ll_{\alpha_2} (\log\log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha}}$.

Cela donne le deuxième terme reste du théorème 2; pour le théorème 1 on remarque que:

$$(\log\log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha}} \ll_{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{2^{1-\alpha}\log\log x}} (\log x)^{2^{1-\alpha}}$$

$$\ll (\log x)^{2^{1-\alpha}} D_\alpha^* (\sqrt{2^{1-\alpha}\log\log x}).$$

Pour le théorème 3, choisissons $r_1' = 2^{1,1}$ et $r_2 = 2^{-\alpha-0,1}$, d'où $r_2 r_1'^{\alpha} = 2^{0,1(\alpha-1)}$ et $r_2 r_1' = 2^{1-\alpha}$. L'intégrale considérée est donc

$$\ll \frac{2^{-\alpha}}{\alpha-1} (\log x)^{2^{1-\alpha}}.$$

Majoration de S_2: Rappelons que

$$S_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1|=r_1 \\ |z_2|=r_2}} Q(x, z_1, z_2)\, M(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2$$

avec $1 < r_1 < 2$ et $r_2 > r_1^{-\alpha}$.

Pour les théorèmes 1 et 2, choisissons $r_1 = 1{,}5$, $r_2 = (1+3^{1-\alpha})/1{,}5$ et $\eta = 1/4$. On a $r_1 r_2 = 1+3^{1-\alpha} \leqslant 2$ et $r_1^{\alpha} r_2 = (1{,}5)^{\alpha-1}(1+3^{1-\alpha})$ si bien que:

$$S_2 \ll x(\log x)^{r_1 r_2 - 2} \frac{r_1 r_2}{r_2\left(1-(r_1^{\alpha} r_2)^{-1}\right)} \ll \frac{x}{(\log x)^{1-3^{1-\alpha}}}$$

ce qui est absorbé par le terme reste venant de S_1 étudié précédemment.

Le même choix de r_1 et r_2 est suffisant pour achever la démonstration du théorème 3.

III. Procédé de sommation de Borel et approximation diophantienne. Soit u: $[0, 1] \to [0, 1]$, lipschitzienne de rapport 1; β et y deux réels, X un réel $\geqslant 2$. Nous posons

Il est clair que $0 \leqslant S(u, \beta, y, X) \leqslant e^X$. D'autre part si l'on pose

$$A(v) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant v} u(\{k\beta + y\})$$

et si l'on suppose β irrationnel:

$$|A(v_2) - A(v_1) - (v_2 - v_1) \int_0^1 u(t)\, dt| \ll (v_2 - v_1) D_\beta (v_2 - v_1) \tag{7}$$

pour $1 \leqslant v_1 \leqslant v_2 - 1$, d'après l'inégalité de Koksma (cf. [5], théorème 5.1) et le fait que la discrépance de la suite finie $\{k\beta + y\}$; $v_1 < k \leqslant v_2$ est $\ll D_\beta(v_2 - v_1)$. Un théorème abélien de G. Tenenbaum (cf. [8], théorème 3) montre alors que

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 u(t)\, dt.$$

En d'autres termes, la suite $u(\{k\beta + y\})$ converge au sens de Borel vers $\int_0^1 u(t)\, dt$. Nous allons suivre la démonstration de G. Tenenbaum pour estimer

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) - \int_0^1 u(t)\, dt.$$

Commençons par choisir un réel Z positif tel que

$$e^{-X} \sum_{|k - X| \geqslant Z} X^k / k! \ll 1/\sqrt{X}.$$

On peut par exemple prendre $Z = (X \log X)^{1/2}$ comme le montre la formule:

$$\sum_{k \leqslant X + s\sqrt{X}} \frac{X^k e^{-X}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-t^2/2}\, dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right),$$

valable uniformément pour $X \geqslant 1$, s réel (cf. [5]). Nous avons:

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) - \int_0^1 u(t)\, dt = \int_{X-Z}^{X+Z} \varphi(X, t)\, dA^*(t) + O(1/\sqrt{X})$$

où

$$A^*(t) = A(t) - t \int_0^1 u(\theta)\, d\theta \quad \text{et} \quad \varphi(X, t) = e^{-X} X^t / \Gamma(t+1).$$

Nous posons $Z = K\sqrt{X}$ et, quitte à modifier légèrement Z, nous supposons que K est un entier. On a alors:

Pour tout $j = -K, \ldots, K-1$, nous intégrons par parties:

$$\int_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}} \varphi(X, t)\, dA^*(t) = \left[\varphi(X, t)\left(A^*(t) - A^*(X+j\sqrt{X})\right)\right]_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}}$$

$$- \int_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}} \left(A^*(t) - A^*(X+j\sqrt{X})\right) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X, t)\, dt$$

$$\ll e^{-(j+1)^2/2} D_\beta(\sqrt{X}) + \int_1^{\sqrt{X}} t D_\beta(t) \frac{(1+|j|)\sqrt{X}}{X^{3/2}} e^{(-j^2+2|j|)/2}\, dt$$

d'après (7) et le lemme 1 de [8]. En sommant sur tous les j, on obtient le (i) du lemme.

Pour démontrer le (ii) on observe que $\{k\beta + y\}$ est une fonction périodique de k, de période q, et prend les valeurs $0, 1/q, 2/q, \ldots, (q-1)/q$. Si $k = bq + r$ où $b \in \boldsymbol{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, on a $\{k\beta + y\} = \{r\beta + y\}$, donc

$$\begin{aligned} S(u, \beta, y, X) &= \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta + y\}) \sum_{b \geqslant 0} \frac{X^{bq+r}}{(bq+r)!} \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta + y\}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} e^{zX} \sum_{b \geqslant 0} z^{-bq-r-1}\, dz \qquad \text{si } \varrho > 1 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} e^{zX} \frac{P(z)}{z^q - 1}\, dz \end{aligned}$$

où

$$P(z) = \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta + y\}) z^{q-1-r}$$

(c'est un polynôme). Le théorème des résidus nous donne:

$$S(u, \beta, y, X) = \sum_{z^q = 1} e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}} = e^X \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) + \sum_{\substack{z^q = 1 \\ z \neq 1}} e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}}.$$

Or si $z^q = 1$ et $z \neq 1$,

$$\left| e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}} \right| \leqslant e^{X \cos 2\pi/q} \cdot \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) \leqslant e^{X \cos 2\pi/q}$$

d'où le résultat.

Bibliographie

[1] H. Davenport, *The higher arithmetic*, Cambridge University Press, 1968.

[3] J.F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Springer-Verlag, 1936.
[4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.
[5] K.K. Norton, *Estimates for partial sums of the exponential series*, Journ. Math. Analysis 63 (1976), 265–296.
[6] A. Selberg, *Note on a paper by L.G. Sathe*, Journ. Indian Math. Soc. 18 (1954), 83–87.
[7] G. Tenenbaum, *Cours de théorie analytique des nombres*, Université de Bordeaux, 1979.
[8] — *Sur le procédé de sommation de Borel et la répartition du nombre de facteurs premiers des entiers*, L'Ens. Math. II^ème série, tome 26, fascicule 3–4, pp. 225–245.
[9] — *Sur la distribution conjointe des deux fonctions "nombre de facteurs premiers"*, Prépublication.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UFR DES SCIENCES DE LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex
France

Reçu le 30.12.1986
et dans la forme modifiée le 14.5.1987 (1695)