

Le centenaire du théorème des nombres premiers

MICHEL BALAZARD

En 1896, Jacques Hadamard, à Bordeaux, et Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain, démontrent indépendamment le théorème des nombres premiers. C'est l'événement principal d'une aventure scientifique commencée il y a plus de deux millénaires.

Les nombres premiers sont les nombres entiers naturels supérieurs à 1 et divisibles seulement par eux-mêmes et par 1. Leur importance se manifeste par le théorème fondamental de l'arithmétique : tout nombre entier s'écrit de manière unique, à l'ordre près des facteurs, comme produit de nombres premiers ; ainsi 126 est égal au produit $2 \times 3 \times 3 \times 7$. Euclide démontre au livre IX des *Éléments* que les nombres premiers sont en nombre infini : si a, b, c, \dots sont des nombres premiers, alors $a \times b \times c \dots + 1$ est premier ou admet un diviseur premier différent de a, b, c, \dots . On pressent ainsi, dans ce théorème antique, la théorie analytique des nombres : l'étude de l'interaction des deux opérations fondamentales, addition et multiplication, ainsi que le conflit entre les structures qu'elles définissent.

Comment identifier les nombres premiers ? Ératosthène, bibliothécaire à Alexandrie, découvrit le crible qui porte son nom et qui permet de faire la liste des nombres premiers inférieurs à une borne définie. On commence par écrire à la suite tous les nombres entiers inférieurs à la borne fixée, et on balaie la liste de la façon suivante : on garde 2 et on barre tous ses multiples ; on garde 3 et on barre tous ses multiples ; etc. Les nombres qui ne sont pas barrés sont les nombres premiers, dont la contemplation n'a cessé de provoquer perplexité et inspiration. Comment distinguer une structure, une loi sous-jacente à l'apparent désordre des nombres premiers ?

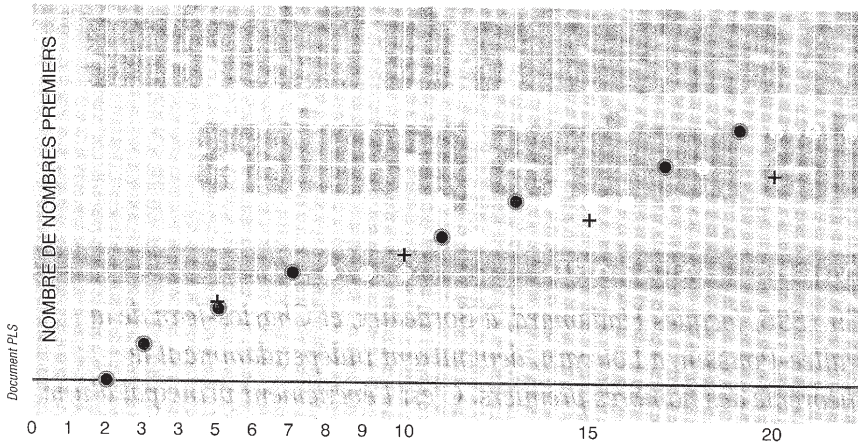
Après Euclide, la première avancée fut celle de Leonhard Euler, le « Prince des mathématiciens », qui démontra en 1737 que la somme des inverses des nombres entiers n est égale au produit de termes de la forme $1/(1 - 1/p)$, où les nombres p sont les nombres pre-

miers ; comme on sait, par ailleurs, que la somme des inverses des nombres entiers est infinie, le produit des termes $1/(1 - 1/p)$ l'est aussi, ce qui revient à dire que la somme des inverses des nombres premiers est infinie.

Le théorème fondamental de l'arithmétique est condensé dans l'égalité d'Euler. Comme l'a écrit André Weil, cette formule marque la naissance de la théorie analytique des nombres. On nomme aujourd'hui produit eulérien toute égalité de ce type entre une somme où interviennent les nombres entiers et un produit où figurent les nombres premiers.

Le résultat d'Euler ouvre la voie pour les généralisations suivantes. La première publication où figure une conjecture précise concernant la répartition des nombres premiers semble être *l'Essai sur la théorie des nombres*, d'Adrien-Marie Legendre : en 1798, ce dernier annonce que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n , quantité qu'il note $\pi(n)$, doit être de la forme $An/(B \log(n) + C)$. Il affina cette conjecture en 1808 en écrivant $\pi(n) = n/(\log(n) - 1,08366)$.

Auparavant, vers 1792, Carl Friedrich Gauss avait été conduit à une conjecture similaire en comptant les nombres premiers dans les tranches successives de 1 000 nombres entiers, ainsi qu'il l'écrivit dans une lettre à l'astronome allemand Johann Encke, en 1848 : Gauss conjecturait que la densité de nombres premiers proches de n est approximativement $1/\log(n)$, de sorte qu'une bonne approximation de $\pi(n)$ doit être donnée par l'intégrale de $1/\log(x)$, quand x est compris entre 0 et n (c'est ce que l'on nomme le logarithme intégral). Qu'on suive Gauss ou Legendre, on arrive à la conclusion que



Le nombre de nombres premiers entre 1 et un nombre quelconque n est approximativement égal à $n/\log(n)$ (croix vertes) ; le quotient de ces deux nombres tend vers un (droite bleue). Cette loi constitue le théorème des nombres premiers. Il fut démontré par Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée-Poussin, en 1896.

le rapport de $\pi(n)$ et de $n/\log(n)$ doit tendre vers 1, quand n tend vers l'infini. C'est cet énoncé que l'on nomme le théorème des nombres premiers.

Un siècle après Euler, en 1837, Peter-Gustav Lejeune-Dirichlet réussit à généraliser en profondeur le raisonnement du mathématicien suisse pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $a.n + b$, où a et b n'ont pas de facteur commun : par exemple, il existe une infinité de nombres premiers dans la suite 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37... parce qu'elle s'écrit $5n + 7$, 5 et 7 étant premiers entre eux.

Si ce résultat n'apporte rien en ce qui concerne le théorème des nombres premiers, le mémoire de Dirichlet représente un progrès méthodologique considérable, notamment parce qu'il inaugure l'utilisation en arithmétique des séries dont le terme général est la somme, pour n compris entre 1 et l'infini, de termes a_n/n^2 (z est un nombre complexe) et qui sont aujourd'hui nommées séries de Dirichlet.

Le pas suivant est fait par Pafnouti Lvovitch Tchébychef, dans deux mémoires parus en 1852. Il montre que la formule de Legendre ne peut pas être asymptotiquement vérifiée quand n tend vers l'infini : la constante 1,08366 doit être remplacée par 1 et, en un certain sens, seul le logarithme intégral permet d'approcher correctement $\pi(n)$. Pour compter le nombre de nombres premiers, il définit la fonction $\theta(n)$ égale à la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à n . Puis il donne des encadrements numériquement explicites de $\theta(n)$, dont une conséquence frappante est le postulat de Bertrand :

pour n supérieur à 3, il existe toujours un nombre premier supérieur à n et inférieur à $2n - 2$ (par exemple, entre 6 et 10, on trouve le nombre premier 7).

En 1859 paraît l'article de Bernhard Riemann *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* («Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné») : en quelques pages, Riemann établit un programme de travail pour les décennies à venir ; il montre l'importance fondamentale de la série de Dirichlet dont les coefficients sont tous égaux à $1 : 1 + 1/2^z + 1/3^z + 1/4^z \dots$. L'idée nouvelle est d'étudier cette fonction (aujourd'hui nommée fonction *dzêta*, ζ) dans le plan des nombres complexes : Riemann montre qu'elle a alors de remarquables propriétés de symétrie, et il étudie les nombres complexes z qui vérifient $\zeta(z) = 0$ (ce sont les «zéros» de la fonction *dzêta*), en écrivant une formule qui relie la fonction π et ces zéros.

Les démonstrations sont seulement esquissées, mais Riemann établit une nette différence entre les assertions pour lesquelles il a réuni un faisceau d'arguments qui lui semblent suffisants, et qui seront effectivement démontrés avant la fin du XIX^e siècle, et une conjecture selon laquelle les zéros de partie réelle positive ont tous une partie réelle égale à $1/2$: «Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude». C'est l'hypothèse de Riemann, qui est aujourd'hui le problème ouvert le plus célèbre des mathématiques.

L'article de Riemann a eu une profonde influence sur le développement des mathématiques. Pour démontrer les affirmations qu'il contient, il a fallu mettre au point des pans entiers d'analyse mathématique. Ainsi, la théorie des fonctions entières, c'est-à-dire des séries qui convergent dans tout le plan complexe, s'édifie à partir de 1876 avec les travaux de Carl Weierstrass (1815-1897), d'Edmond Laguerre (1834-1886), de Henri Poincaré (1854-1912), et de Jacques Hadamard, qui obtient le Grand Prix des sciences mathématiques avec son mémoire *Étude sur les propriétés des fonctions entières, et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, paru en 1893.

Dans son mémoire de 1893, Hadamard démontre la décomposition de la fonction *dzêta* en produit de facteurs qui dépendent de ses zéros, ce qui, au vu de l'écriture de *dzêta* comme produit eulérien, établit une correspondance remarquable entre les nombres premiers et les zéros de la fonction *dzêta*.

En 1895, H. von Mangoldt en déduit une formule explicite pour la fonction de Tchébychef $\theta(n)$. Malheureusement, sans information suffisante sur la répartition des zéros de la fonction *dzêta*, on ne peut en déduire la relation asymptotique qui constituerait le théorème des nombres premiers.

Il appartient à Hadamard et à la Vallée-Poussin de conclure. Chez l'un comme chez l'autre, la démonstration comporte deux parties : d'abord prouver que la fonction *dzêta* n'a pas de zéro dont la partie réelle serait égale à 1 ; puis en déduire le théorème des nombres premiers. En revanche, les deux mathématiciens parviennent à ces fins par des raisonnements très différents. L'assertion concernant les zéros de la fonction *dzêta* est l'objet d'une démonstration courte et élégante, par Hadamard.

Un siècle après, où en est la théorie des nombres premiers ? Tout d'abord, il a fallu exposer les résultats de 100 années de recherche et les ordonner en une théorie cohérente. En 1909, Edmund Landau développe en un millier de pages les conquêtes du XIX^e siècle, en y incorporant de nombreux résultats et simplifications. En 1932, A. Ingham fait preuve de plus de concision et insiste sur les avancées importantes du premier tiers du XX^e siècle.

Ensuite a lieu une importante réflexion critique sur les démonstrations originales de 1896 : les seuls élé-

tions originales de 1896 : les seuls éléments nécessaires à l'énoncé du théorème des nombres premiers sont l'arithmétique élémentaire et la notion de limite de l'analyse réelle. Il était donc naturel de chercher une démonstration élémentaire de ce théorème ; après une contribution importante de Norbert Wiener en 1932, comme corollaire de sa théorie générale, c'est en 1949 qu'on eut la réponse, positive, par Paul Erdős et Atle Selberg.

Une deuxième question fondamentale est de discerner parmi les propriétés des nombres entiers celles qui sont essentielles pour obtenir la loi de répartition des nombres premiers. Arne Beurling a ainsi fondé en 1938 la théorie des nombres premiers généralisés et des nombres entiers généralisés : les nombres premiers généralisés sont les suites de nombres réels tendant vers l'infini, et les nombres entiers généralisés sont les nombres réels que l'on forme en multipliant entre eux les nombres premiers généralisés. A. Beurling a établi que les nombres premiers généralisés vérifient le théorème des nombres premiers quand les nombres entiers généralisés ont une répartition suffisamment régulière.

Après Hadamard et la Vallée-Poussin, de nombreux mathématiciens ont tenté de dessiner les limites de la régularité de la répartition des nombres premiers. Le premier théorème d'oscillation fut l'œuvre de John Littlewood qui, en 1914, infirma une conjecture de Gauss en démontrant que $\pi(n) - \text{li}(n)$ change de signe une infinité de fois quand n tend vers l'infini. Plus récemment, dans les années 1980, Helmut Maier a montré que la densité des nombres premiers entre n et $n + \log(n)^s$ n'est pas équivalente à $1/\log(n)$ quand n tend vers l'infini, cela pour tout nombre s fixé.

Notre siècle a surtout revisité le crible d'Ératosthène et précisé considérablement le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique. Toutefois, 138 ans après sa formulation, l'hypothèse de Riemann, indémontrée, reste un obstacle au développement de la théorie des nombres premiers.

Michel BALAZARD est mathématicien à l'Université de Bordeaux.

Gérald TENENBAUM et Michel MENDÈS-FRANCE, *Les nombres premiers*. Que sais-je?, P.U.F. (à paraître)
