

Notes sur la fonction ζ de Riemann, 2

Michel Balazard

*Laboratoire d'Algorithmique Arithmétique, C.N.R.S., Mathématiques, Université de Bordeaux I,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France*

et

Eric Saias et Marc Yor

*Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France*

Received July 10, 1998; accepted September 9, 1998

Désignons par $\sum_{\Re \rho > 1/2}$ une somme portant sur les éventuels zéros de $\zeta(s)$ de partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$, où les zéros de multiplicité m sont comptés m fois. L'objet de cette note est la démonstration du résultat suivant.

THÉORÈME. *On a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Re(s)=1/2} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^2} |ds| = \sum_{\Re \rho > 1/2} \log \left| \frac{\rho}{1-\rho} \right|. \quad (1)$$

En particulier, l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si

$$\int_{\Re(s)=1/2} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^2} |ds| = 0.$$

Démonstration. Cette preuve comporte deux étapes.

Première étape. Nous commençons par l'énoncé de quelques propriétés satisfaites par une fonction générique f de l'espace de Hardy $H^p(\mathbf{D})$, où $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et p est un nombre réel positif. On désigne par f^* la fonction définie presque partout sur le cercle trigonométrique $\partial \mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ par $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$. Utilisons la lettre z pour désigner un élément du disque trigonométrique \mathbf{D} et notons

$$s = s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1}{1-z}.$$

Cette formule définit une représentation conforme du disque \mathbf{D} dans le demi-plan $\Re(s) > 1/2$.

D'après la formule de Jensen (voir par exemple [4, Theorem 3.61]), on a pour $f(0) \neq 0$ et $r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{\substack{|\alpha| < r \\ f(\alpha) = 0}} \log \frac{r}{|\alpha|} \quad (2)$$

où dans la somme les zéros de multiplicité m sont comptés m fois. Désignons par

$$\exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right\}$$

le facteur intérieur singulier de f . Quand r tend vers 1, la formule (2) devient (cf. [2, p. 68])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{\substack{|\alpha| < 1 \\ f(\alpha) = 0}} \log \frac{1}{|\alpha|} + \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta). \quad (3)$$

Cette formule est une conséquence du théorème de factorisation des fonctions de H^p ; elle est énoncée dans [2] pour $p=1$ mais est également valable pour tout p positif.

Deuxième étape. Nous considérons maintenant la fonction

$$f(z) = (s-1) \zeta(s)$$

(avec $s = 1/(1-z)$). Les propriétés élémentaires de la fonction ζ de Riemann (voir par exemple [5]) permettent de vérifier d'une part que f appartient à l'espace de Hardy $H^{1/3}(\mathbf{D})$ et d'autre part que la mesure μ associée au facteur intérieur singulier de f est nulle (pour ce dernier point, il suffit de reprendre l'argumentation développée par Bercovici et Foias pour le facteur intérieur des fonctions $(\theta - \theta^s) \zeta(s)(s+1/2)/s$, au cours de la preuve de la proposition 2.1 de [1]). On vérifie également que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta = \int_{\Re(s)=1/2} \frac{\log |\zeta(s)|}{|s|^2} |ds|,$$

$$\log |f(0)| = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{|\alpha| < 1 \\ f(\alpha) = 0}} \log \frac{1}{|\alpha|} = \sum_{\Re \rho > 1/2} \log \left| \frac{\rho}{1-\rho} \right|.$$

Avec l'ensemble de ces informations, notre résultat découle de la formule (3).

Terminons par quelques remarques. On trouve des énoncés voisins du nôtre dans les travaux [7, 6] de Wang et Volchkov. Il est même possible que Jensen lui-même ait eu conscience de la formule (1) (le lecteur consultera avec intérêt l'article [3] où Jensen fait part à Mittag-Leffler de sa découverte de la formule (2)). Il nous paraît cependant intéressant de présenter les choses comme nous le faisons ici, et cela pour les trois raisons suivantes:

(a) la formule (1) est plus simple que celles qui apparaissent dans [7, 6];

(b) on montre ici que pour établir la formule (1), il est naturel de se placer dans le cadre des espaces de Hardy;

(c) la forme de l'intégrale dans la formule (1) permet d'interpréter ce résultat à l'aide du mouvement brownien, comme nous le montrons ci-dessous.

Notons $Z = X + iY$ le mouvement brownien plan issu de 0 (ou de 1) et $Z_{T_{1/2}} = \frac{1}{2} + iY_{T_{1/2}}$ son premier point d'impact sur la droite critique $\Re s = 1/2$ où $T_{1/2} := \inf\{t: X_t = 1/2\}$. On sait que $Y_{T_{1/2}}$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1/2. Autrement dit, la loi de $Y_{T_{1/2}}$ a pour densité $1/2\pi(1/4 + t^2)$. Ainsi la deuxième partie du théorème peut s'énoncer de la manière suivante: l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si

$$\mathbb{E}[\log |\zeta(Z_{T_{1/2}})|] = 0.$$

REMERCIEMENTS

Nous remercions Luis Báez-Duarte, Michel Delasnerie, Catherine Donati, Laurent Habsieger, Aleksandar Ivić et Alain Plagne pour d'utiles conversations.

RÉFÉRENCES

1. H. Bercovici et C. Foias, A real variable restatement of Riemann's hypothesis, *Israel J. Math.* **48** (1984), 57–68.
2. K. Hoffman, "Banach Spaces of Analytic Functions," Dover, New York, 1988.
3. J. L. W. V. Jensen, Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions, *Acta Math.* **22** (1898–1899), 359–364.
4. E. C. Titchmarsh, "The Theory of Functions," 2nd ed., Oxford Science Publications, 1939.

5. E. C. Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta-Function" (revised by D. R. Heath-Brown), Clarendon, Oxford, 1986.
6. V. V. Volchkov, On an equality equivalent to the Riemann hypothesis, *Ukrainian Math. J.* **47** (1995), 491–493.
7. F. T. Wang, A note on the Riemann zeta-function, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 319–321.