Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1988/04/07.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF.Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer ici pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 511-514, 1988 **511**

Théorie des nombres/*Number Theory*

Sur le nombre de facteurs premiers des entiers

Michel BALAZARD, Hubert DELANGE et Jean-Louis NICOLAS

Résumé — En désignant par $\Omega(n)$ le nombre total de facteurs dans la décomposition de n en produit de nombres premiers, nous obtenons une formule asymptotique uniforme pour le nombre des entiers $n \leqq x$ tels que $\Omega(n) = k$.

On the number of prime factors of integers

Abstract — *Denoting by $\Omega(n)$ the total number of factors in the standard factorization of n into primes, we obtain a uniform asymptotic formula for the number of integers $n \leqq x$ such that $\Omega(n) = k$.*

1. Soit $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers, comptés avec leurs multiplicités, de l'entier positif n. Si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers positifs, on a :

$$\Omega(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k.$$

L'étude locale de la fonction Ω consiste en la détermination du comportement de la quantité

$$\mathrm{N}(x, k) = \mathrm{card}\{n \mid n \leqq x \text{ et } \Omega(n) = k\},$$

x étant un réel $\geqq 2$ et k un entier positif. Comme $2^{\Omega(n)} \leqq n$, il suffit de considérer les entiers $k \leqq \log x / \log 2$.

On dispose principalement de deux estimations asymptotiques concernant $\mathrm{N}(x, k)$. D'une part, si ε est positif et fixé, on a :

$$\mathrm{N}(x, k) = \mathrm{F}\left(\frac{k-1}{\log \log x}\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{k}{(\log \log x)^2}\right)\right) \tag{1}$$

uniformément pour $x \geqq 3$ et $k \leqq (2-\varepsilon) \log \log x$ où

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}$$

[le produit infini porte sur tous les nombres premiers; $\mathrm{F}(z)$ est holomorphe pour $|z| < 2$]. Ce résultat, qui contient le théorème des nombres premiers, est dû à L. G. Sathe (*cf.* [7]) et fut redémontré de façon simple par A. Selberg (*cf.* [8]). D'autre part, si ε est positif et fixé, on a

$$\mathrm{N}(x, k) = \mathrm{C} \frac{x}{2^k} \log \frac{x}{2^k} + O_\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\left(\log 3 \frac{x}{2^k}\right)^{1-c(\varepsilon)}\right) \tag{2}$$

uniformément pour $x \geqq 3$ et $(2+\varepsilon) \log \log x \leqq k \leqq \log x / \log 2$, où

$$\mathrm{C} = -\mathrm{Res}(\mathrm{F}, 2) = \frac{1}{4} \prod_p (1 + 1/(p(p-2))) = 0{,}378\,694\ldots$$

et $c(\varepsilon)$ est une constante positive ne dépendant que de ε : si $\varepsilon < 1$, on peut prendre

$$c(\varepsilon) = 2\mathrm{Q}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{où} \quad \mathrm{Q}(\lambda) = \lambda \log \lambda - \lambda + 1.$$

Ce résultat est dû à J.-L. Nicolas (*cf.* [5]).

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/88/03060511 $ 2.00 © Académie des Sciences

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

On dispose aussi de la majoration suivante, due à G. H. Hardy et S. Ramanujan (*cf.* [3]) :

$$N(x, k) \leqq A \frac{x}{r^k \log x} P_{k-1}(r(\log \log x + B)) \tag{3}$$

uniformément pour $x \geqq 3$ et k entier positif, où A et B sont des constantes positives absolues, $r = 10/9$ et

$$P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!} \quad (n\text{-ième somme partielle de la série exponentielle}).$$

Il nous a semblé intéressant, à la lumière de la majoration (3), de donner une formule asymptotique pour $N(x, k)$, valable uniformément pour $1 \leqq k \leqq \log x / \log 2$ et $x \geqq 3$, permettant de comprendre la transition entre les résultats apparemment disparates (1) et (2).

Avant d'énoncer cette formule, introduisons quelques notations. Pour x réel $\geqq 3$ et k entier $\geqq 1$, nous posons :

$y = x/2^k$;

$r = 0$ si $k = 1$;

$r = 2(P_{k-2}(2 \log \log y)/P_{k-1}(2 \log \log y))$ si $k \geqq 2$ et $y \geqq 3$ (on a toujours $r < 2$).

Nous posons également :

$$f(z) = \frac{1}{2^{z-1}\Gamma(z+1)} \prod_{p \geqq 3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}$$

[c'est une fonction holomorphe de z pour $|z| < 3$. On a $f(2) = C$].

$$R_\lambda(y) = \inf((\log \log y)^{-1}, (\log \log y)^{-1/2} (\log y)^{-2Q(\lambda)}) \quad \text{pour } \lambda \geqq 1 \text{ et } y \geqq 3.$$

Observons que $R_\lambda(y)$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à λ.

THÉORÈME. — *Soit* B *un réel* $< 3/2$. *On a uniformément pour* $y \geqq 3$,

$$N(x, k) = f(r) \frac{y}{\log y} P_{k-1}(2 \log \log y)(1 + O_B(R_\lambda(y)))$$

où $\lambda = \sup(1, \inf(B, (k-1)/2 \log \log y))$.

Pour voir que le théorème permet de retrouver les formules (1) et (2), il faut connaître le comportement asymptotique des sommes partielles de la série exponentielle. Retenons les faits classiques suivants (pour une étude approfondie, *cf.* [6]).

1° $$P_k(u) = \frac{1}{1-\rho} \frac{u^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{\rho}{u(1-\rho)^2}\right)\right) \quad \text{si} \quad \rho = \frac{k}{u} < 1.$$

2° $P_k(u) = e^u (G(t) + O(u^{-1/2}))$ pour tout $u \geqq 1$ et tout entier $k \geqq 0$, où

$$t = \frac{k-u}{\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(v^2/2)} dv.$$

3° $$P_k(u) = e^u \left(1 + O\left(\frac{u^{-1/2}}{(\rho-1)\sqrt{\rho}\, e^{uQ(\rho)}}\right)\right) \quad \text{si} \quad \rho = \frac{k}{u} > 1.$$

On peut alors préciser (1) et (2).

(4) On a uniformément pour $A \geqq 1$, $x \geqq 3$, k entier $\geqq 1$ tels que

$$k \leqq 2 \log \log x - A\sqrt{\log \log x},$$

$$N(x, k) = F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + O\left(\frac{k}{A^2 \log\log x}\right)\right).$$

(5) On a uniformément pour $\varepsilon \in]0, 1/2]$, $x \geqq 3$, k entier $\geqq 2$ tels que $k-1 \geqq (2+\varepsilon)\log\log x$ et $k \leqq \log x/\log 2$:

$$N(x, k) = C\frac{x}{2^k}\log\frac{x}{2^k}\left(1 + O\left(\varepsilon^{-1}\left(\log\log\left(3\frac{x}{2^k}\right)\right)^{-1/2}\left(\log\frac{3x}{2^k}\right)^{-2Q(1+(\varepsilon/2))}\right)\right).$$

Nous obtenons également le comportement de $N(x, k)$ dans la « zone critique » $k \sim 2\log\log x$:

(6) On a uniformément pour $x \geqq 3$ et k entier $\geqq 2$ tels que $x/2^k \geqq 3$:

$$N(x, k) = C\frac{x}{2^k}\log\frac{x}{2^k}\left(G(t) + O\left(\frac{1+|t|}{\sqrt{\log\log x}}\right)\right)$$

où $t = (k - 2\log\log x)/\sqrt{2\log\log x}$.

2. La démonstration du théorème s'appuie sur la formule suivante, due à G. Halász (*cf.* [5]) :

(7)
$$N(x, k) = \sum_{\substack{\psi(m) \leqq y \\ \Omega(m) \leqq k}}{}' 1$$

où l'apostrophe indique une sommation ne portant que sur les entiers impairs et $\psi(m) = m/2^{\Omega(m)}$ [on déduit facilement de (7) les valeurs de $N(x, k)$ pour $y < 3$, ce qui complète le théorème].

La formule de Cauchy donne alors :

$$N(x, k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \sum_{\psi(m) \leqq y}{}' z^{\Omega(m)} \frac{z^{-k-1}}{1-z}dz \qquad \text{où} \quad R < 1,$$

la circonférence $|z| = R$ étant parcourue une fois dans le sens positif.

On peut trouver, par la méthode de Selberg (*cf.* [8] et [2]), une formule asymptotique pour la somme $\sum_{\psi(m) \leqq y}{}' z^{\Omega(m)}$:

(8) Il existe une suite de fonctions $Q_k(z, X)$, polynômes de degré k en X, à coefficients fonctions holomorphes de z pour $|z| < 3/2$, telle que

$$\sum_{\psi(m) \leqq y}{}' z^{\Omega(m)} = y(\log y)^{2z}\left(\sum_{l \leqq k}(\log y)^{-l-1} Q_l(z, \log\log y) + O_{R,k}\left(\frac{(\log\log y)^{k+1}}{(\log y)^{k+2}}\right)\right)$$

uniformément pour $|z| \leqq R < 3/2$, $y \geqq 3$, $k \in \mathbb{N}$. On a $Q_0(z, X) = zf(2z)$.

L'utilisation de cette formule et un choix judicieux de R ($R = r/2$) permettent alors de démontrer le théorème (la méthode utilisée, classique depuis l'article [8], est une variante simple de la méthode du col). Le lecteur intéressé trouvera les détails de la démonstration dans [1].

Signalons que l'étude locale de la fonction $\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1$ est un problème plus difficile car aucun nombre premier n'y joue de rôle particulier comme ici le nombre 2. Sa solution est l'objet d'un travail récent de A. Hildebrand et G. Tenenbaum (*cf.* [4]).

En conclusion les auteurs tiennent à remercier G. Halász et G. Tenenbaum pour leurs commentaires et suggestions concernant le sujet abordé dans cette Note.

Note reçue et acceptée le 15 février 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. BALAZARD, Sur la répartition des valeurs de certaines fonctions arithmétiques additives, *Thèse*, Université de Limoges, 1987.

[2] H. DELANGE, Sur des formules de Atle Selberg, *Acta Arith.*, 19, 1971, p. 105-146.

[3] G. H. HARDY et S. RAMANUJAN, The normal order of prime factors of a number n, in: S. RAMANUJAN, *Collected papers*, p. 262-275, Chelsea Publishing Company, 1962.

[4] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, *On the number of prime factors of an integer*, Prépublication, 1987.

[5] J.-L. NICOLAS, Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, *Acta Arith.*, 44, 1984, p. 191-200.

[6] K. K. NORTON, Estimates for partial sums of the exponential series, *J. Math. An.*, 63, 1978, p. 265-296.

[7] L. G. SATHE, On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, *J. Indian Math. Soc.*, 17, 1953, p. 63-141; 18, 1954, p. 27-81.

[8] A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.*, 18, 1954, p. 83-87.

M. B. et J.-L. N. : *Département de Mathématiques,*
Faculté des Sciences, 123, *avenue A.-Thomas*, 87060 *Limoges Cedex*;
H. D. : 22, *allée des Troènes*, 91440 *Bures-sur-Yvette.*