Université de Toulon

Master de Mathématiques - M1 MEEF

Algèbre Linéaire

Exercices

2017-2018

Yves Aubry

30 août 2017

Exercice 1. *Considérons les éléments* $z_1 = 2 + 3i$ *et* $z_2 = 1 - i$ *de* $\mathbb{C}$.

1. *Dans le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$, *la famille* $\{z_1, z_2\}$ *est-elle libre ? I.e. les vecteurs* z_1 *et* z_2 *sont-ils* $\mathbb{C}$*-linéairement indépendants ?*

2. *Dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$, *la famille* $\{z_1, z_2\}$ *est-elle libre ? I.e. les vecteurs* z_1 *et* z_2 *sont-ils* $\mathbb{R}$*-linéairement indépendants ?*

Exercice 2. *Considérons les éléments* $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ *et* $w = (1, -2, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

1. *La famille* $\{u, v, w\}$ *du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *est-elle libre ? I.e. les vecteurs* u, v *et* w *sont-ils* $\mathbb{R}$*-linérairement indépendants ? Quel est le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par ces trois vecteurs ?*

2. *Considérons le vecteur* $w' = (5, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$. *La famille* $\{u, v, w'\}$ *est-elle libre ?*

Exercice 3. *Dans* $\mathbb{R}$ *considéré comme espace vectoriel sur* $\mathbb{Q}$, *on considère la famille* $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. *Montrer qu'elle est libre.*

Exercice 4. *La partie*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$$

de $\mathbb{R}^2$ *est-elle un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 5. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* K*-espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

2. *Montrer que* $F \cup G$ *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$.

3. *Montrer que* $F + G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* $F \cup G$.

Exercice 6. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *un homomorphisme d'espaces vectoriels. Montrer que* f *est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Exercice 7. *Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est encore une famille libre.*

Montrer que l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est encore une famille génératrice.

Exercice 8. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que* E *et* F *sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Exercice 9. *Soit* f *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel* E *tel que tout vecteur non nul de* E *est vecteur propre de* f*. On veut montrer qu'alors* f *est une homothétie (i.e.* $\exists \lambda \in K, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$*).*

Soient x *et* x' *deux vecteurs non nuls de* E*. Il existe donc* λ *et* λ' *dans* K *tels que* $f(x) = \lambda x$ *et* $f(x') = \lambda' x'$.

a) *On suppose que* x *et* x' *sont colinéaires. Montrer que* $\lambda = \lambda'$.

b) *On suppose maintenant que* x *et* x' *sont linéairement indépendants. En considérant le vecteur* $x - x'$*, montrer que* $\lambda = \lambda'$.

c) *Conclure.*

Exercice 10. *(Théorème du rang)*

Soit $f : E \longrightarrow F$ *un morphisme de* K*-espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer que*

$$rg(f) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Exercice 11. *(Espace vectoriel quotient)*

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F.$$

Exercice 12. *Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de K-espaces vectoriels de dimensions finies et égales. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective. Donner des contre-exemples en dimension infinie.*

Exercice 13. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E tels que :*

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. *Montrer que pour tout $v \in E$, on a : $v - (g \circ f)(v) \in \operatorname{Ker} f$. En déduire que*

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g.$$

2. *Comparer le rang de f et le rang de g.*

Exercice 14. *Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.*

1. *Montrer que*

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f.$$

2. *Montrer que, si de plus E est de dimension finie, on a :*

2.1.

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

2.2.

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f.$$

3. *Si E est de dimension infinie, donner un exemple pour lequel 2.1 et 2.2 sont faux.*

Exercice 15. *Soient $E_0, E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, et (f_i) $(0 \leq i \leq n-1)$ des applications linéaires définies sur E_i à valeurs dans E_{i+1}. On dit que*

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

est une suite exacte si pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$. On note 0 l'espace vectoriel $\{0\}$.

1. *Quelles sont les applications linéaires possibles*

$$0 \xrightarrow{f} E_0 \qquad \text{et} \qquad E_1 \xrightarrow{g} 0 \quad ?$$

2. *Que signifie pour f_0 le fait que*

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1$$

soit une suite exacte ?

3. *Que signifie pour f_0 le fait que*

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte ?

4. *Montrer que si la suite*

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

est exacte, alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0.$$

5. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Déterminer des applications linéaires f et g pour que la suite*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} E \times F \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

soit exacte. En déduire que

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Déterminer de même des applications linéaires ϕ et ψ pour que la suite

$$0 \longrightarrow E \cap F \xrightarrow{\phi} E \times F \xrightarrow{\psi} E + F \longrightarrow 0$$

soit exacte. En déduire que

$$\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim E + \dim F.$$

Exercice 16. *Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2. *Donner une base de $S_2(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$?*

3. *Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA.$$

4. *En déduire que, pour toutes matrices A et B de $S_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$AB \in S_n(\mathbb{R}) \iff AB = BA.$$

5. *Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.*
On note $A_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Donner une base de $A_3(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A_n(\mathbb{R})$?

6. *Montrer que les sous-espaces vectoriels $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 17. *Soit* $\mathbb{R}[X]_2$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des polynômes à une indéterminée à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré au plus 2, muni de la base canonique constituée des polynômes* $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X^2$.
Considérons l'application Φ *suivante :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}[X]_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]_2 \\ & P & \longmapsto & XP'' + (1-X)P' \end{array}$$

où P' *(respectivement* P''*) est le polynôme dérivé du polynôme* P *(respectivement* P'*).*

1. *Montrer que* Φ *est un morphisme de* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et déterminer sa matrice dans la base canonique.*

2. *Déterminer le noyau et le rang de* Φ.

3. *Montrer que les polynômes* $Q_0(X) = \sqrt{2}$, $Q_1(X) = -X + 1$ *et* $Q_2(X) = X^2 - 4X + 2$ *forment une base de* $\mathbb{R}[X]_2$. *Déterminer la matrice de l'endomorphisme* Φ *dans cette base.*

Exercice 18. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et l'application* $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par* $f(M) = AM - MA$ *pour toute* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. *Déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. *Déterminer les matrices* M *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *qui commutent avec* A.

4. *Quel est le rang de* f *?*

Exercice 19. *(Projecteurs)*
Soit E *un* K*-espace vectoriel.*

1. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *supplémentaires dans* E *(i.e.* $E = F \oplus G$*) et* p *le projecteur sur* F *parallèlement à* G *(i.e.* p *est* *l'application linéaire de E dans E définie par : pour $x \in E$, $x = x' + x''$ avec $x' \in F$ et $x'' \in G$, alors $p(x) = x'$).*

a) *Montrer que $p \circ p = p$.*

b) *Montrer que $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = G$.*

2. *Réciproquement, soit p un K-endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$ (p est un idempotent de l'anneau $\mathcal{L}_K(E)$ des K-endomorphismes de E).*

a) *Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.*

b) *Montrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

3. *Si E est de dimension finie, et si p est un projecteur de E, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de p soit*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de p et I_r la matrice identité de taille r.

Exercice 20. *(Symétries)*

Soient E un K-espace vectoriel et s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}$ (l'application s est une involution).

On note

$$E_1 = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$$

et

$$E_2 = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}).$$

1. *Montrer que*

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

2. *Montrer que $\mathrm{Ker}\, s = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, s = E$.*

L'endomorphisme s est appelé symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 21. *On considère la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante :* $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice J de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = I + 4J$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer A^{100}.

Exercice 22. *Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant, où m est un paramètre réel :*

$$\begin{cases} (5-m)x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & (2-m)y & - & 2z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & (5-m)z & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 23. *Calculer le déterminant de l'endomorphisme "transposition" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tM$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

(Indication : on pourra utiliser le fait que les sous-espaces vectoriels constitués respectivement des matrices symétriques et des matrices anti-symétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir Exercice 16)).

Exercice 24. *Montrer que tout endomorphisme nilpotent (i.e. dont une puissance est nulle) et diagonalisable (i.e. tel qu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale) d'un espace vectoriel de dimension finie est nul.*

Exercice 25. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

a) *Déterminer le rang et la trace de f.*

b) *En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de f.*

c) *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

d) *Déterminer le polynôme minimal de f.*

Exercice 26. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :*

$$AB - BA = A.$$

a) *Montrer que, pour tout entier naturel k, on a : $A^k B - BA^k = kA^k$.*

b) *On considère l'application f, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, définie par $f(M) = MB - BM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

c) *En déduire que A est nilpotente.* Indication : Raisonner par l'absurde et considérer les vecteurs propres de f.

Exercice 27. *On note E l'ensemble des suites (u_n) de nombres réels vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5u_{n+3} = 2u_{n+2} + 15u_{n+1} - 6u_n.$$

1) *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de toutes les suites de nombres réels.*

2) *Montrer que l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (u_n) associe (u_2, u_1, u_0) est un isomorphisme. Quelle est la dimension de E ?*

L'application $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (u_n) associe (u_3, u_2, u_1) est-elle aussi un isomorphisme ?

3) *On note f l'application $\Phi^{-1} \circ \psi : E \longrightarrow E$. Montrer que si $u = (u_n) \in E$ et si on pose $(v_n) = f(u)$ et $(t_n) = f^5(u)$ alors $v_3 = u_4$ et $t_2 = u_7$.*

4) *On considère les suites $(U_n) = U = \Phi^{-1}(1, 0, 0)$, $(V_n) = V = f(U)$ et $(W_n) = W = f(V)$. Montrer que (U, V, W) est une base de E et que la matrice de f dans cette base est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6/5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

5) *Calculer le polynôme caractéristique de A. Trouver les valeurs propres de f sachant que l'une d'elles est rationnelle.*

6) *Montrer que si $u = (u_n) \in E$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^n u_0$.*

7) *Montrer que pour toute suite $(u_n) \in E$, il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a(2/5)^n + (b + (-1)^n c)3^{n/2}.$$

Exercice 28. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit f l'endomorphisme de E admettant la matrice A suivante dans la base $\mathcal{E}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de f.*

2. *Déterminer les sous-espaces propres de f.*

3. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

4. *Déterminer le polynôme minimal de f.*

5. *Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f.*

6. *Donner une base $\mathcal{F}$ de E dans laquelle la matrice de f soit la forme réduite de Jordan suivante :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.

7. *Soit B la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. On rappelle que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors*

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

7.1 *Calculer* $\exp(B)$.

7.2 *Sans calculs, donner l'expression de* $\exp(A)$ *en fonction de* $\exp(B)$ *et de la matrice P.*

Exercice 29. *(Nous nous intéressons aux liens de structure entre un espace vectoriel et son dual.)*

1. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et E^* son espace dual. Montrer que E et E^* sont isomorphes (en tant que K-espaces vectoriels).*

On s'intéresse à présent à ce qu'il en est si E est de dimension infinie.

2. *Soit $E = K[X]$ l'espace vectoriel sur K des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans K.*
Si f^* est une forme linéaire sur E (i.e. $f^* \in E^*$), on pose : $u_n = f^*(X^n)$. Considérons l'application φ de E^* dans l'espace vectoriel $K^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans K qui à tout f^* de E^* fait correspondre

$$\varphi(f^*) = (u_0, \dots, u_n, \dots).$$

2.1. *Montrer que φ est un isomorphisme.*

2.2. *On souhaite montrer ici, par un argument détourné, que la question précédente suffit à exhiber un exemple d'espace vectoriel non isomorphe à son dual, en l'occurence l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$.*

a) *En considérant l'application $j : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à tout rationnel p/q, avec p et q premiers entre eux et $q > 0$, fait correspondre $2^p 3^q$ si $p \geq 0$ et $5^{-p} 3^q$ si $p < 0$, montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ est également dénombrable.*

b) *Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties $\mathbb{N}$ est non dénombrable (on raisonnera par l'absurde : si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une bijection, considérer la partie A de $\mathbb{N}$ suivante : $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin g(n)\}$).*

En considérant l'application $\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui à toute partie F de $\mathbb{N}$ fait correspondre la suite $(\Gamma_F(n))_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ définie par : $\Gamma_F(n)$ égal 1 si $n \in F$ et 0 sinon, montrer que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

c) *Conclure.*

2.3. *On souhaite montrer ici que $E := K[X]$ est isomorphe à un sous-espace strict de son dual. On considère les polynômes*

$$e_0(X) = 1, e_1(X) = X, \dots, e_n(X) = X^n, \dots$$

et pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, *on pose* $e_i^*(P) = a_i$.

a) *Montrer qu'une famille* $(e_{i_1}^*, \ldots, e_{i_p}^*)$ *d'un nombre fini de* e_i^* *est une famille libre d'éléments de* E^*.

b) *Soit* V^* *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nombre fini de formes* e_i^*. *Montrer que* V^* *est un sous-espace vectoriel de* E^* *et que l'application linéaire* ψ *de* E *dans* E^* *définie par* $\psi(e_i) = e_i^*$ *est un isomorphisme de* E *sur* V^*.

c) *Montrer que la forme linéaire* $f^* \in E^*$ *telle que* $f^*(P) = P(1)$ *n'appartient pas à* V^*. *Conclure.*

Exercice 30. *Triangulariser l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Exercice 31. *Triangulariser l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -5 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Exercice 32. *Considérons l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^{10}$ *qui admet pour matrice dans la base canonique la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) *Déterminer le polynôme caractéristique P_f ainsi que le polynôme minimal m_f de f.*

2) *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})^i$ *pour* $\lambda \in \{2, 3, 4\}$ *et* $i \in \{1, \ldots, 10\}$.

3) *Quelles sont, à similitude près, les matrices qui admettent à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal que f.*

Exercice 33. Commutant d'une matrice. *(Extrait de l'épreuve 2 de Mathématiques de la session 2011 des concours communs polytechniques - Filière MP.)*- **Examen M1-MEEF Toulon-Nice Avril 2013**

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 3. Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ le commutant de la matrice A.

1. *Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

2. *Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.*

3. *Déterminer par le calcul, le commutant $C(T)$ de la matrice T puis donner sa dimension.*

4. *Soit l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P^{-1}MP$.*

a. *Montrer que f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

b. *Montrer que $M \in C(A)$ si et seulement si $f(M) \in C(T)$.*
Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?

5. *Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?*

5. *Démontrer que $C(A) = vect\{I_3, A, A^2\}$. En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A. Ce dernier résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathcal{R})$? Justifiez votre réponse.*

Exercice 34. *(Variante du troisième exercice du concours PLP interne de 2000)*- **Examen M1-MEEF Toulon-Nice Avril 2013**

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On considère dans E l'ensemble F des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n.$$

1. a) *Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.*

b) *Déterminer toutes les suites géométriques qui appartiennent à F.*

c) *On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel par :*

$$v_n = 3^n \quad \text{et} \quad w_n = 7^n.$$

Vérifier que, pour tous nombres réels a et b, la suite (u_n), définie pour tout entier naturel par $u_n = av_n + bw_n$ appartient à F. Démontrer que la famille $((v_n), (w_n))$ est une base de F.

Indication : on pourra d'abord montrer que cette famille est libre puis s'appuyer sur une récurrence pour prouver qu'elle est génératrice.

2. *Soient (x_n) et (y_n) les suites définies pour tout entier naturel n par*

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \quad x_{n+1} = -21y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n + 10y_n.$$

a) *Vérifier que les suites (x_n) et (y_n) appartiennent à F.*

b) *Déterminer les coordonnées respectives de (x_n) et (y_n) dans la base $((v_n), (w_n))$ de F.*

3. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -7 & 10 & 3 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

a) *Calculer le polynôme caractéristique de A.*

b) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

c) *Calculer A^2.*

d) *Déterminer des nombres réels α et β tels que $A^3 = \alpha A + \beta A^2$.*

e) *Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,*

$$A^n = x_{n-1}A + y_{n-1}A^2,$$

où x_{n-1} et y_{n-1} sont les nombres définis à la question 2.

Exercice 35. Matrices d'ordre fini (sujet du CAPES 2014 - Epreuve 2) - Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2014

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).
La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** *s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.*
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** *de A et noté $o(A)$.*

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours. 1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.

i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.

Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intdŕesse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.

2.1. Démontrer que B est inversible.

2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.

2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.

2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.

3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.

3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.

2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.

2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.

Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

4.3. Donner une expression de γ_k *pour tout* $k \geq 0$.

4.4. En déduire que $c = 0$.

4.5. En déduire que C *et* A *sont diagonalisables dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 *est valeur propre double de* A *et 1 est valeur propre simple de* A.

6. On suppose que A *admet dans* $\mathbb{C}$ *au moins une valeur propre non réelle.*

6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, *tel que* $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ *ou* $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

6.2. Démontrer que A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Démontrer que* A *est d'ordre fini si, et seulement si,* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *et qu'il existe* $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ *tel que* $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ *ou* $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, *d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans* $\mathbb{C}$ *est de la forme* $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ *ou* $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ *où* $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.

On pourra considérer la trace de A.

2. Donner les valeurs possibles pour θ.

3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ *possibles pour* A *puis démontrer que* $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ *de chaque ordre.*

4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ *d'ordre 1 et 2.*

4.2. i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. *Calculer le polynôme caractéristique de :* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ *dont les valeurs propres sont* $1, e^{2i\pi/3}$ *et* $e^{-2i\pi/3}$. *Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.*

iii. Construire des matrices de $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ *d'ordre 4 et d'ordre 6.*

Exercice 36. (Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2015) : racine carrée d'un endomorphisme

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f de E, l'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k,$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E (où $q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. *On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1. *Montrer que f est diagonalisable.*

1.2. *Déterminer une base* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* f *et donner la matrice* D *de* f *dans cette nouvelle base.*

1.3. *Soit* P *la matrice de passage de la base canonique à la base* (v_1, v_2, v_3)*. Soit un entier* $m \geq 1$*. Sans calculer l'inverse de* P*, exprimer* A^m *en fonction de* D*,* P *et* P^{-1}*.*

1.4. *Calculer* P^{-1}*, puis déterminer la matrice de* f^m *dans la base canonique.*

1.5. *Déterminer toutes les matrices de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *qui commutent avec la matrice* D *trouvée à la question 2.2.*

1.6. *Montrer que si* $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *vérifie* $H^2 = D$*, alors* H *et* D *commutent.*

1.7. *Déduire de ce qui précède toutes les matrices* H *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *vérifiant* $H^2 = D$*, puis déterminer tous les endomorphismes* h *de* $\mathbb{R}^3$ *vérifiant* $h^2 = f$ *en donnant leur matrice dans la base canonique.*

2. *Soient* f *et* j *les endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$ *dont les matrices respectives* A *et* J *dans la base canonique sont données par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. *Calculer* J^m *pour tout entier* $m \geq 1$*.*

2.2. *En déduire que pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$*,* $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$*. Cette relation est-elle encore valable pour* $m = 0$ *?*

2.3. *Montrer que* f *admet deux valeurs propres distinctes* λ *et* μ *telles que* $\lambda < \mu$*.*

2.4. *Montrer qu'il existe un unique couple* (p, q) *d'endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$ *tel que pour tout entier* $m \geq 0$*,* $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ *et montrer que ces endomorphismes* p *et* q *sont linéairement indépendants.*

2.5. *Après avoir calculé* $p^2, q^2, p \circ q$ *et* $q \circ p$*, trouver tous les endomorphismes* h*, combinaisons linéaires de* p *et* q*, qui vérifient* $h^2 = f$*.*

2.6. *Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q, dans cette nouvelle base.*

2.7. *Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.*

2.8. *En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.*

2.9. *Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.*

Exercice 37. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2016 (extrait du concours Centrale-Supélec 2011)

Notations et rappels

• *Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On notera $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ formé des automorphismes de E.*

• *À tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on associe sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.*

On rappelle que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel , noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

De la même façon, $\mathrm{GL}(E)$ (respectivement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), muni de la composition des applications (respectivement muni du produit des matrices), possède une structure de groupe.

• *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On sera amené à utiliser la propriété (T) suivante :

(T) : il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$

• *On rappelle que, par convention : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^0 = I$ (matrice identité).*

• *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* f *admet* n *valeurs propres en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.*

• *On rappelle enfin que l'exponentielle d'un nombre complexe* z *peut être notée* e^z *ou* $\exp z$ *et que, pour tout nombre complexe* z, *on a* $\exp z \neq 0$.

I Préliminaires : endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I.A – *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. **I.A.1)** *Montrer que* f *est injectif si et seulement si* 0 *n'est pas valeur propre de* f.

I.A.2) *Montrer que* $f \in \mathrm{GL}(E)$ *si et seulement si* 0 *n'est pas valeur propre de* f.

I.A.3) *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* M *est inversible si et seulement si* 0 *n'est pas valeur propre de* M.

I.B – *Une matrice* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sera dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif* k *tel que :* $N^k = 0$ *(matrice nulle).*
On note $k(N)$ *le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété et on l'appelle "indice de nilpotence de* N*".*
On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ *l'ensemble des matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.B.1) *Soit* N *la matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *définie par :*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$ *puis déterminer* $k(N)$.

I.B.2) *Soient* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* M *une matrice semblable à* N. *a) Montrer que, pour tout entier naturel* p, *les matrices* M^p *et* N^p *sont semblables. b) En déduire que, si* N *est nilpotente,* M *l'est aussi et* $k(M) = k(N)$.

I.B.3) *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose qu'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que, pour toute base* $\mathcal{B}'$ *de* E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ *est également nilpotente et de même indice de nilpotence que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On dira alors que f *est nilpotent et on notera* $k(f)$ *l'indice de nilpotence de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *qui sera appelé aussi indice de nilpotence de* f.

I.B.4) *Soient* $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ *et* n_{ij} *son terme général.*
On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!], n_{ii} = 0$.

On note $n_{ij}^{(k)}$ *le terme général de la matrice* N^k *avec* $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ *et que* $n_{ij}^{(2)} = 0$ *si* $j \leq i+1$.

b) Montrer, plus généralement, que $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ *et que* $n_{ij}^{(k)} = 0$ *si* $j \leq i+k-1$.

c) En déduire que $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

I.B.5) *Soient* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ *la matrice de* f *dans une base appropriée* $\mathcal{B}$ *de* E *donnée par la propriété* (T) *rappelée en préliminaire.*

a) En explicitant le polynôme caractéristique de N, *déterminer les valeurs propres de* f *en fonction des termes diagonaux de* N.

b) Montrer que f *est nilpotent si et seulement si* 0 *est sa seule valeur propre.*

I.B.6) *Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si tous ses termes diagonaux sont nuls.*

I.C – *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On rappelle que le trace de A *est le nombre complexe* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

I.C.1) *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que le nombre complexe $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ *ne dépend pas du choix de la base* $\mathcal{B}$ *de* E.
On appelle "trace de l'endomorphisme f*" ce nombre complexe, noté* $\mathrm{Tr}(f)$.
Ainsi on a, pour toute base $\mathcal{B}$ *de* E, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

I.C.2) *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On désigne par* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *les valeurs propres (éventuellement égales) de* f.
Montrer, à l'aide de la question I.B.5.a), que :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

I.C.3) *On considère le cas* $n = 2$. *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
Montrer que A *est soit diagonalisable, soit nilpotente.*

I.C.4) *A-t-on le même résultat lorsque* $n = 3$ *?*

II Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

II.A – *On suppose, tout d'abord,* f *diagonalisable, et on note* $\mathcal{B}_p = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base de vecteurs propres de* f *associés respectivement aux valeurs propres*

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *On définit alors l'endomorphisme* $\exp f$ *par l'image des vecteurs de la base* $\mathcal{B}_p$ *en posant :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (\exp f)(e_i) = (\exp \lambda_i) e_i.$$

II.A.1)

a) Représenter la matrice de $\exp f$ *sur la base* $\mathcal{B}_p$.

b) Montrer que $\exp f$ *appartient à* $\mathrm{GL}(E)$.

Cet endomorphisme est appelé "exponentielle de l'endomorphisme f*". On admet qu'il ne dépend que de* f *et pas de la base de vecteurs propres de* f *utilisée pour le définir.*

Si D *est une matrice diagonale de termes diagonaux* $\mu_1, \ldots, \mu_n$, *on note* $\exp D$ *la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont* $\exp \mu_1, \ldots, \exp \mu_n$.

II.A.2) *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* M *est diagonalisable.*

Soient P_1, P_2 *deux matrices inversibles et* D_1, D_2 *deux matrices diagonales telles que :*

$$M = P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

Montrer que $P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2(\exp D_2)P_2^{-1}$.

On appellera exponentielle de la matrice M, *la matrice notée* $\exp M$ *égale à* $P(\exp D)P^{-1}$ *où* (P, D) *est un couple de matrices utilisé pour diagonaliser* M.

II.B – *On suppose maintenant que* f *est nilpotent, d'indice de nilpotence* $k(f)$. *On considère une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, *selon la propriété (T).*

On pose alors :

$$\exp f = \sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{f^p}{p!} \qquad \text{et} \qquad \exp M = \sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!}$$

où $f^0 =$ *identité de* E.

II.B.1) *Déterminer les termes diagonaux de la matrice* $\exp M$.

II.B.2) *En déduire l'ensemble des valeurs propres de* $\exp f$ *puis montrer que* $\exp f \in \mathrm{GL}(E)$.

L'endomorphisme $\exp f$ *est encore appelé l'exponentielle de* f *et la matrice* $\exp M$ *l'exponentielle de* M.

II.C – *On suppose enfin que* f *satisfait à la propriété (P) suivante :*

$$\text{(P) : il existe } (d,g) \in (\mathcal{L}(E))^2,$$
$$d \text{ diagonalisable, } g \text{ nilpotent tels que } d \circ g = g \circ d \text{ et } f = d + g$$

On admettra que, si f satisfait à (P), alors le couple (d,g) donné par (P) est unique.

II.C.1)

a) Montrer que : $\exp d \circ \exp g = \exp g \circ \exp d$.

On pose alors : $\exp f = \exp d \circ \exp g$ *et on l'appelle encore l'exponentielle de f.*

On désigne par $\Gamma_n(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes f satisfaisant à (P).

De même, on désigne par $\Gamma_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices M qui peuvent s'écrire $M = D+N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

b) Montrer que, pour toute matrice M de $\Gamma_n(\mathbb{C})$, le couple (D,N) associé est unique.

On pose $\exp M = \exp D \exp N$ *et on l'appelle l'exponentielle de M.*

II.C.2) *Soient $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démontrer que $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et que $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$.

Exercice 38. Exercice de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2017

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère l'application f définie pour tout $(x,y,z) \in E$ par :

$$f((x,y,z)) = (-y,x,z).$$

1) *Montrer que f est un endomorphisme de E.*

2) *Montrer que f vérifie l'égalité :*

$$f^3 - f^2 + f - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

3) *Déterminer* $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ *et* $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E)$.

4) *On considère les endomorphismes p et q de E définis par :*

$$p = \frac{1}{2}(Id_E + f^2) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(Id_E - f^2).$$

Donner, pour tout (x, y, z) *de* E*, une expression de* $p((x, y, z))$ *et* $q((x, y, z))$.

5) *Montrer que :*

$$\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q = E.$$

Exercice 39. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2017 (extrait du concours Centrale-Supélec 2008)

Notations • *Dans ce problème,* $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ *désigne l'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *des suites de complexes* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• *Pour* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ *représente l'espace vectoriel des suites* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formées de vecteurs de* $\mathbb{C}^k$.

• *On note* $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des matrices carrées à k lignes à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

• *Enfin, si* M *est une matrice,* ${}^tM$ *désigne sa transposée.*

Question préliminaire

Soit une matrice M *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On note $e = \det(M)$. *On suppose* $e \neq 0$.

• *Calculer le produit matriciel*

$$M \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

• *En déduire l'expression de la matrice* M^{-1} *en fonction de* a, b, c, d, e.

A. Récurrences linéaires d'ordre 2

On considère ici les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe des complexes a_1 et a_0 vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

A.1) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout entier positif n, on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

A.2) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

A.3) On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AQ = QD$.

b) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, des complexes λ_1, λ_2 et de l'entier n.

A.4) On suppose maintenant que A admet une seule valeur propre λ et on note

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer a_1 et a_0 en fonction de λ.

b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T et déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, du complexe λ et de l'entier n.

A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

- *soit A admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;*
- *soit A admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.*

A.6) **Deux exemples numériques**
Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :
- *expliciter la matrice A,*
- *donner une matrice de passage Q telle que $T = Q^{-1}AQ$ soit d'une forme simple comme ci-dessus,*
- *en déduire X_n puis x_n en fonction de x_0, x_1 et n*

(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).

a) **Exemple 1**
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la propriété suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

b) **Exemple 2**
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la propriété suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

B. Vers un ordre supérieur, à petits pas

On note Φ l'application qui à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ associe la suite des vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ définie par $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, les trois premiers termes de la suite $\Phi((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sont $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

À tout polynôme unitaire de degré 3 de $\mathbb{C}[X]$,

$$P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on associe le sous-espace $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$.

B.1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

B.2) Vérifier que $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ *est linéaire et injective. Est-elle surjective ?*

B.3) a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$. *Montrer que son image* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* Φ *vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0.$$

b) Montrer que, réciproquement, toute suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ *pour laquelle on a* $X_n = A^n X_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *est élément de* $\Phi(\mathcal{R}_P)$.

B.4) Montrer que $\Phi(\mathcal{R}_P)$ *est le sous-espace de* $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ *engendré par les suites de vecteurs* $(A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}}$, *où* (e_1, e_2, e_3) *désigne la base canonique de* $\mathbb{C}^3$.
En déduire la dimension de $\mathcal{R}_P$.

$\int \int \int$