Majeure de Mathématiques. Systèmes Dynamiques.
Contrôle Classant du 7 Janvier 97.
Corrigé

Exercice

1) Un intervalle de $\mathbb{R}$ est unicohérent. En effet, tout sous-ensemble connexe d'un intervalle est un intervalle, et l'intersection de deux intervalles est un intervalle, donc connexe.

2) $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas unicohérent: il suffit de prendre les projections des deux intervalles $[0, 3/4]$ et $[1/2, 5/4]$, et de vérifier que leur intersection a deux composantes connexes.

3) Supposons que A et B sont des connexes, tels que $X = A \cup B$ et $A \cap B = F_0 \cup F_1$ avec F_0, F_1 fermés, disjoints et non vides. Par le lemme d'Urysohn, puisque le complémentaire de F_0 dans A est un ouvert qui contient F_1, on peut construire une fonction $\phi_A : A \to [0, 1]$ qui vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1. De même, on peut construire une fonction $\phi_B : B \to [0, 1]$ qui vaut 1 sur F_0 et 0 sur F_1. Les fonctions $\pi \circ \phi_A$ et $\pi \circ \phi_B$ (où $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ est la projection canonique) coïncident sur $A \cap B$, et se recollent donc en une fonction continue $\Phi : X \to \mathbb{T}$.

Supposons que cette fonction soit homotope à une constante; alors, elle admet un relèvement $\psi : X \to \mathbb{R}$. Soient x_0 un point de F_0, et x_1 un point de F_1. Par unicité du relèvement sur un espace connexe, on voit que la restriction de ψ à A coïncide, à une constante près, avec ϕ_A, donc $\psi(x_1) = \psi(x_0) + 1$. Mais on montre de la même façon, en considérant ϕ_B, que $\psi(x_1) = \psi(x_0) - 1$, ce qui est absurde. On a bien montré qu'un espace où toute fonction est homotope à une constante est unicohérent.

Problème

Dans toute la suite, on appellera "suite admissible" une suite ϵ qui vérifie, pour tout n, $\epsilon_n \cdot \epsilon_{n+1} = 0$, c'est-à-dire dans laquelle le mot 11 n'apparaît pas. On appellera "mot admissible" une suite admissible finie.

I. Dynamique topologique.

I.1) Supposons que Ω^+ ne soit pas un fermé de Σ_2^+. Alors, on peut trouver un point ϵ, adhérent à Ω^+, qui n'est pas dans Ω_+. Puisque ϵ n'est pas dans Ω^+, on peut trouver k tel que $\epsilon_k \cdot \epsilon_{k+1} = 1$; mais si ϵ est adhérent à Ω^+, on peut trouver η dans Ω^+ qui a les mêmes $k + 1$ premières coordonnées que ϵ, ce qui est contradictoire. On raisonne de même pour Ω.

Il est d'autre part clair que, si le mot 11 n'apparaît pas dans une suite, il n'apparaît pas dans la suite décalée, et que tout élément de Ω^+ peut se prolonger à gauche en un élément de Ω^+, en ajoutant un 0 en première position, ce qui montre que les ensembles considérés vérifient $\Omega^+ = \sigma_2^+(\Omega^+)$ (resp. $\Omega = \sigma_2(\Omega)$).

I.2) Si l'on considère la suite obtenue en mettant bout à bout tous les mots de longueur n, commençant par 0, et ne contenant pas le mot 11, pour $n = 1, 2, \dots$, on obtient une suite admissible (dans chaque mot, 11 n'apparaît pas, et comme on s'est restreint aux mots commençant par 0, 11 ne peut apparaître à la coupure entre deux mots); il est facile de vérifier que cette suite passe arbitrairement près de toute suite donnée, puisque tout mot initial de la suite donnée apparaîtra dans la suite qu'on a fabriquée (si la suite commence par 1, le mot initial précédé d'un zéro est admissible, et apparaît dans la suite, donc aussi le mot lui-même).

I.3) La restriction $\sigma_2^+|_{\Omega^+} : \Omega^+ \to \Omega^+$ n'est bien sûr pas minimale, puisqu'elle admet un point fixe $000\dots$, ainsi que beaucoup de points périodiques.

I.4) L'ensemble des points de Ω^+ périodiques pour σ_2^+ est dense, puisque, si y est un élément de Ω^+, on peut prendre les n premières lettres de y, rajouter au besoin un zéro à la fin, et compléter en une suite périodique admissible.

I.5) Notons A_n le nombre de mots admissibles de longueur n, B_n le nombre de ces mots qui terminent par 0, et C_n le nombre de ceux qui terminent par 1. On a évidemment $A_n = B_n + C_n$. De plus, comme un mot de longueur n qui finit par 1 est obtenu en ajoutant 1 à un mot de longeur $n-1$ finissant par 0, on a $C_n = B_{n-1}$. Par contre, un mot qui finit par 0 peut venir de n'importe quoi, donc $B_n = A_{n-1}$. On en tire l'égalité $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$, pour $n \geq 2$. Comme $A_0 = 1$ (il y a exactement un mot vide) et $A_1 = 2$, on a $A_n = F_{n+1}$, où F_n est la suite de Fibonacci définie dans le texte.

I.6) Comme la partition par les cylindres est génératrice, l'entropie est donnée par $\lim_{n\to\infty} \log(A_n)/n = \log(\varphi)$.

II. Une mesure invariante.

II.1) On a vu en cours que la mesure $\mu_{\underline{q}}$ est ergodique pour le décalage; comme Ω^+ est invariant, on en déduit qu'il est de mesure 0 ou 1. Mais son complémentaire est un ouvert non vide, donc de mesure non nulle; l'ensemble Ω^+ est donc de $\mu_{\underline{q}}$-mesure nulle.

II.2) On a vu en cours que, pour définir une mesure sur un sous-ensemble de $A^{\mathbb{N}}$, il suffit de la définir explicitement sur les cylindres. Il suffit donc de vérifier que la formule donnée est cohérente, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble tout entier est 1, et que si un cylindre C_n de longueur n s'écrit comme réunion $\bigcup_j C_{n+1,j}$ d'un nombre fini de cylindres de longueur $n+1$, alors $\nu(C_n) = \sum_j \nu(C_{n+1,j})$. On vérifie que $\nu([0]) = \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1}$, et $\nu([1]) = \frac{1}{\varphi^2+1}$, donc la mesure totale est bien 1. Si l'on considére un cylindre $[c_0, \dots, c_{k-1}, 1]$, il ne peut se prolonger qu'en $[c_0, \dots, c_{k-1}, 1, 0]$, et on voit que la mesure est la même, le passage de k à $k+1$ étant compensé, dans la formule, par le fait que la dernière lettre c_k passe de 1 à 0. Un cylindre $[c_0, \dots, c_{k-1}, 0]$ se prolonge en deux cylindres, $[c_0, \dots, c_{k-1}, 0, 0]$ et $[c_0, \dots, c_{k-1}, 0, 1]$; l'égalité cherchée est la conséquence du fait que $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$.

II.3) Pour montrer que ν est invariante par $\sigma_2^+|_{\Omega^+}$, il suffit de le faire sur les cylindres, qui engendrent la tribu des boréliens. On obtient un calcul analogue à celui de la question précédente: Prenons d'abord le cylindre $[1, c_1, \ldots, c_k]$. Son image réciproque est le cylindre $[0, 1, c_1, \ldots, c_k]$, dont on vérifie facilement qu'il est de même mesure. L'image réciproque de $[0, c_1, \ldots, c_k]$ se compose des deux cylindres disjoints $[0, 0, c_1, \ldots, c_k]$ et $[1, 0, c_1, \ldots, c_k]$; l'égalité des mesures entre le cylindre et sa pré-image résulte de la propriété de $\frac{1}{\varphi}$ qu'on a utilisée à la question précédente.

II.4) a) Si $c_k = c_p = 0$, on peut compléter le mot $c_0, \ldots, c_k; \cdots; c_p, \ldots, c_{p+l}$ en rajoutant entre c_p et c_l n'importe quel mot admissible de longueur $p-k-1$: il y a donc F_{p-k} possibilités, comme on l'a vu à la question I.5. Si $c_k = 1$, le terme suivant doit être 0, et si $c_p = 1$, le terme précédent doit être 0: une étude de cas élémentaire donne la formule cherchée (remarquer que si $p = k+1$ et $c_p = c_k = 1$, on trouve $F_{-1} = 0$; la formule est encore correcte dans ce cas, puisque le mot obtenu n'est jamais admissible).

b) La mesure de $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^+ \mid x_i = c_i, i = 0, \ldots, k, p, \ldots, p+l\}$ est celle d'une réunion finie de $F_{p-k-c_p-c_k}$ cylindres disjoints, de même longueurs et extrémités; elle vaut donc:

$$F_{p-k-c_p-c_k} \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{p+l+c_0+c_{p+l}}$$

c) Si l'on remplace, dans la formule précédente, la suite de Fibonacci par sa valeur calculée, on obtient:

$$\frac{\varphi^{p-k-c_p-c_k+2} + \alpha^{p-k-c_p-c_k}}{\varphi^2+1} \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{p+l+c_0+c_{p+l}}$$

Quand on fait tendre p vers l'infini, en fixant toutes les autres valeurs, on voit que le terme en α tend vers 0, et que la suite tend vers:

$$\frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k+c_0+c_k} \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{l+c_p+c_{p+l}}$$

Mais le calcul fait à la question II.4.a) est celui de la mesure de l'intersection $[c_0, \ldots, c_k] \cap \left(\sigma_2^+|_{\Omega^+}\right)^{-p}[c_p, \ldots, c_{p+l}]$, et la limite que nous venons de calculer est égale à $m([c_0, \ldots, c_k]).m([c_p, \ldots, c_{p+l}])$, ce qui montre que le système dynamique $(\Omega^+, \mathcal{B}(\Omega^+), \nu, \sigma_2^+|_{\Omega^+})$ est fortement mélangeant.

II.5) Puisque le système est fortement mélangeant, il est ergodique, et donc, pour ν-presque toute suite $\epsilon \in \Omega^+$, on a $\lim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i = \frac{1}{\varphi^2+1}$; en effet, on reconnaît là une somme de Birkhoff pour la fonction qui, à la suite ϵ, associe ϵ_0, c'est-à-dire la fonction caractéristique du cylindre 1, dont l'intégrale, qui est la mesure $\nu([1])$, a été calculée ci-dessus.

III. Une semi-conjugaison avec une application de $[0, 1[$.

On considère l'application $h : \Omega^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}.$$

Remarquons d'abord, car nous nous en servirons régulièrement, que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty}(1/\varphi)^{n+1} = \varphi$, et $\sum_{n=0}^{\infty}(1/\varphi)^{2n+1} = 1$ III.1) La fonction h est continue sur Ω^+; en effet, si ϵ et ϵ' coïncident jusqu'à l'ordre N, la différence entre $h(\epsilon)$ et $h(\epsilon')$ est majorée par $\sum_{n=N+1}^{\infty}(1/\varphi)^{n+1} = (1/\varphi)^N$, ce qui prouve la continuité. III.2) Il est clair, par construction, que $h(\epsilon) \geq 0$. Si $\epsilon(0) = 0$, $h(\epsilon)$ est majoré par $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\varphi)^{n+1} = 1$. Si $\epsilon(0) = 1$, $h(\epsilon)$ est majoré, par le même raisonnement, par $\varphi = 1 + (1/\varphi)$. On va montrer par récurrence que l'on a, pour tout n, $h(\epsilon) \leq 1 + (1/\varphi)^{2n+1}$. C'est vrai pour $n = 0$, comme on vient de le voir. Supposons la propriété vraie à l'ordre n. Si $\epsilon(0) = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $\epsilon(0) = 1$, on a $\epsilon(1) = 0$, et on peut écrire: $h(\epsilon) = (1/\varphi) + (1/\varphi^2)h(\sigma_2^{+2}\epsilon)$, en détachant les deux premiers termes de la somme; on a donc, en majorant $h(\sigma_2^{+2}\epsilon)$, $h(\epsilon) \leq (1/\varphi) + (1/\varphi^2)\left(1 + (1/\varphi)^{2n+1}\right) = 1 + (1/\varphi)^{2n+3}$. Ceci prouve la récurrence, et en passant à la limite, on voit que h est à valeurs dans $[0, 1]$. Si ϵ est la suite périodique admissible définie par $\epsilon(2n) = 1$ et $\epsilon(2n+1) = 0$, on a $h(\epsilon) = 1$; pour toute autre suite dans Ω, on a $h(\epsilon) < 1$; en effet, une telle suite, soit commence par 0, et la valeur de h est alors majorée par $1/\varphi$, soit comprend le mot 00; si la première apparition de 00 est à l'ordre $2n+1$, h est majorée par $1/\varphi + 1/\varphi^3 + \ldots + 1/\varphi^{2n+3} < 1$. III.3) Si $\epsilon < \epsilon'$, soit n le premier rang auquel ces suites diffèrent; on a $\epsilon(n) = 0$, et $\epsilon'(n) = 1$. Donc, si $U = \epsilon_0 \ldots \epsilon_{n-1}$ est le préfixe commun, on peut écrire $h(\epsilon') \geq h(U00\ldots) + (1/\varphi)^{n+1}$, et $h(\epsilon) \leq h(U00\ldots) + (1/\varphi)^{n+1}h(\sigma_2^{+n+1}\epsilon) = h(U00\ldots) + (1/\varphi)^{n+1}$, ce qui montre que h est croissante pour l'ordre lexicographique. De plus, pour avoir $h(\epsilon) = h(\epsilon')$, il faut que les inégalités ci-dessus soient des égalités, ce qui n'est possible que si ϵ est périodique à partir du rang n, telle que $\epsilon(n+2k) = 0$ et $\epsilon(n+2k+1) = 1$, et ϵ' est nulle à partir du rang $n+1$; autrement dit, ϵ est l'élément maximal du cylindre $[U0]$, et ϵ' est l'élément minimal du cylindre adjacent $[U1]$. Il est clair qu'il y a autant de suites de ce type que de mots admissibles finis se terminant par 0, c'est-à-dire un nombre dénombrable. III.4) Du fait que h est continue, croissante, et que l'élément maximal d'un cylindre a même image que l'élément minimal d'un autre cylindre, on peut déduire directement que h est surjective. En effet, son image est compacte; si elle n'est pas tout, elle évite un ouvert; soit $]a, b[$ une composante connexe de cet ouvert. Il existe ϵ tel que $h(\epsilon) = a$, et on peut supposer que ϵ n'est pas l'élément maximal d'un cylindre, sinon on pourrait le remplacer par l'élément minimal d'un autre cylindre. Alors, en prenant un cylindre de petit diamètre contenant ϵ, on peut trouver ϵ' tel que $0 < h(\epsilon') - h(\epsilon) < b - a$, ce qui est une contradiction. L'énoncé propose une autre méthode: on construit la suite x_n par $x_{n+1} = \varphi \cdot x_n - [\varphi \cdot x_n]$, et $\epsilon_n = [\varphi \cdot x_n]$. Remarquons que, si $\epsilon_n = 1$, on a, puisque $x_n \leq 1$, $x_{n+1} \leq \varphi - 1 = 1/\varphi$, donc $\epsilon_{n+1} = 0$: la suite ϵ est admissible. On montre par récurrence que $x = \sum_{n=0}^{k}\epsilon_n(1/\varphi)^{n+1} + (1/\varphi)^{k+1}x_{k+1}$; on en déduit à la limite: $x = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n(1/\varphi)^{n+1}$, ce qui donne une preuve constructive de la surjectivité de h. III.5) Il est évident que l'on a: $h(\sigma(\epsilon)) = \varphi h(\epsilon)$ si $\epsilon(0) = 0$, et $h(\sigma(\epsilon)) = \varphi h(\epsilon) - 1$ si $\epsilon(0) = 1$. Mais un calcul simple montre que $h([0]) = [0, 1/\varphi]$ et $h([1]) = [1/\varphi, 1]$, d'où le résultat. III.6) Pour trouver l'image de la mesure, il suffit d'étudier les images des cylindres. Soit U un mot admissible $U = u_0 \dots u_n$. Si $u_n = 0$, on vérifie sans difficulté, en considérant les éléments extrémaux du cylindre $[U]$, que son image est un intervalle de longueur (pour Lebesgue) $1/\varphi^{n+1}$. Si U finit par 1, l'image est un intervalle de longueur $1/\varphi^{n+2}$. Cas 1: U commence par 0; sa mesure pour ν est $\frac{\varphi^2}{\varphi^2+1}(1/\varphi)^{n+u_n}$, donc un multiple constant de la mesure de Lebesgue par $K_0 = \frac{\varphi^3}{\varphi^2+1}$. Cas 2: U commence par 1; un calcul analogue montre que la mesure image est multiple de la mesure de Lebesgue sur $[1/\varphi, 1]$ par $K_1 = \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1}$. On vérifie facilement que c'est une mesure de probabilité, car la fonction qui vaut K_0 sur $I_0 = [0, 1/\varphi]$ et K_1 sur $I_1 = [1/\varphi, 1]$ est d'intégrale 1, et un peu moins facilement qu'elle est invariante par $x \mapsto \varphi \cdot x - [\varphi \cdot x]$: il faut prendre un intervalle, et calculer son image réciproque. Si l'intervalle est dans I_1, son image réciproque est un unique intervalle dans I_0; s'il est dans I_0, son image est constituée de 2 intervalles, l'un dans I_0, l'autre dans I_1, et un calcul simple montre l'invariance de la mesure. De toute façon, ces calculs sont inutiles: l'image d'une mesure de probabilité est par construction une mesure de probabilité, et h est un isomorphime mesurable qui conjugue Φ et $\sigma_2^+|_{\Omega^+}$, donc μ est par construction invariante par Φ.

IV. Une semi-conjugaison avec une application de $\mathbb{T}^2$.

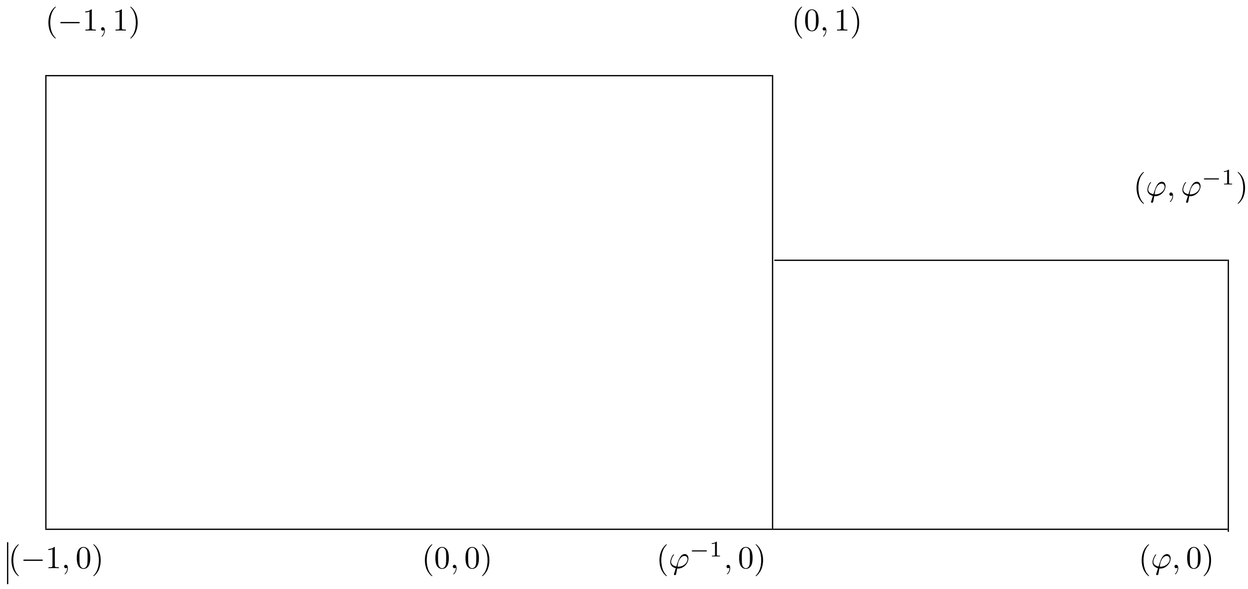
On considère l'application $\tilde{\psi} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\tilde{\psi}((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\sum_{n\geq 0} \epsilon_n \alpha^n, \sum_{n<0} \epsilon_n \varphi^n).$$

IV.1) La difficulté ici est que $\alpha < 0$. Il n'est pas difficile de montrer que l'on a $-1 \leq \sum_{n\geq 0} \epsilon_n \alpha^n \leq \varphi$, en considérant la suite $(1, 0, 1, 0 \dots)$, où tous les termes sont positifs, et la suite décalée d'un cran, où tous les termes sont négatifs. Une étude plus précise montre que, si $\epsilon(0) = 0$, la somme est encadrée entre -1 et $1/\varphi$, et que si $\epsilon(0) = 1$, la somme est encadrée entre $1/\varphi$ et φ. Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que l'application est surjective sur ces intervalles. Pour la coordonnée verticale, il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus, en remarquant que, pour le cylindre [0], il n'y a pas de restriction, mais pour le cylindre [1], on doit avoir $\epsilon(-1) = 0$, ce qui explique pourquoi l'intervalle des ordonnées est plus petit au-dessus de $[0, \varphi^{-1}]$.

IV.2) C'est un domaine fondamental pour le réseau Γ engendré par (φ, φ^{-1}) et $(-1, 1)$. Il suffit pour cela de remarquer que le volume du domaine fondamental du réseau se calcule facilement: c'est le déterminant de la matrice des vecteurs de base, soit $\varphi + 1/\varphi$, qui est aussi le volume du domaine trouvé à la question précédente. Il suffit donc de vérifier que l'intersection de ce domaine avec l'un de ses translatés par le réseau est de mesure nulle, ce qui se fait par étude de cas; le dessin ci-joint est probablement plus explicite qu'une preuve calculatoire.

Voila à quoi ressemble le domaine fondamental:



IV.3) La formule qui définit $\tilde{\psi}$ montre que cette application conjugue localement σ à une application qui multiplie les abscisses par α et les ordonnées par φ. En particulier, elle envoie (φ,φ^{-1}) sur $(-1,1)$, et $(-1,1)$ sur $(-\alpha,\varphi)=(-1,1)+(\varphi,\varphi^{-1})$.

IV.4) L'entropie de σ_2 est donc égale à celle de A, c'est-à-dire le logarithme de l'unique valeur propre supérieure à 1, soit $\log\varphi$. On retrouve le résultat de I.6, cette fois pour le décalage bilatéral (on le montre sans problème directement). Il est intéressant de remarquer que la restriction de A^{-1} à la seconde coordonnée (dans le système de coordonnées donné par le domaine de la question IV.1) n'est autre que l'application Φ étudiée dans la partie III.