**Majeure de Mathématiques. Systèmes Dynamiques.**
**Contrôle Classant du 7 Janvier 97.**

## Exercice

On dit qu'un espace métrique $X$ est unicohérent, si à chaque fois que l'on écrit $X = A \cup B$, avec $A$ et $B$ connexes et fermés, alors, l'intersection $A \cap B$ est connexe.

1) Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est unicohérent.

2) Montrer que $\mathbb{T}$ n'est pas unicohérent.

3) Montrer que, si $X$, métrique, connexe, est tel que toute application $X \to \mathbb{T}$ est homotope à une constante, alors $X$ est unicohérent. [INDICATION: On raisonnera par l'absurde. Si $A$ et $B$ sont des connexes, tels que $X = A \cup B$ et $A \cap B = F_0 \cup F_1$ avec $F_0, F_1$ fermés, disjoints et non vides, on cherchera à construire, en s'aidant du lemme d'Urysohn, une fonction $X \to \mathbb{T}$, constante sur $F_0$ et sur $F_1$, qui ne se relève pas.]

## Problème

Afin de simplifier les notations, au lieu de travailler avec $\Sigma_2^+ = \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ et $\Sigma_2 = \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$, on considérera plutôt les suites à valeurs dans $\{0,1\}$, c'est-à-dire que l'on considérera les deux espaces $\tilde{\Sigma}_2^+ = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\tilde{\Sigma}_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. On notera toujours par $\sigma_2^+ : \tilde{\Sigma}_2^+ \to \tilde{\Sigma}_2^+$ et $\sigma_2 : \tilde{\Sigma}_2 \to \tilde{\Sigma}_2$ les décalages définis par $\sigma_2^+((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sigma_2((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $\eta_n = \epsilon_{n+1}$.

Si $c_0, \ldots, c_k$ est une suite finie dans $\{0,1\}$, on note par $[c_0, \ldots, c_k]$ le cylindre de $\tilde{\Sigma}_2^+$ (ou de $\tilde{\Sigma}_2$) défini par :

$$[c_0, \ldots, c_k] = \{(\epsilon_n) \mid \epsilon_i = c_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Si $\underline{q} = (q_0, q_1) \in [0,1]^2$ vérifie $q_0 + q_1 = 1$, on note $\mu_{\underline{q}}$ l'unique mesure de probabilité sur $\tilde{\Sigma}_2^+$ qui vérifie $\mu_{\underline{q}}([c_0, \ldots, c_k]) = \prod_{i=0}^k q_{c_i}$ (avec une définition analogue dans le cas de $\tilde{\Sigma}_2$).

On définit un sous-ensemble $\Omega^+$ de $\tilde{\Sigma}_2^+$ et un sous-ensemble $\Omega$ de $\tilde{\Sigma}_2$ par :

$$\Omega^+ = \{(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \epsilon_n \cdot \epsilon_{n+1} = 0\}$$
$$\Omega = \{(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, \epsilon_n \cdot \epsilon_{n+1} = 0\},$$

où $x \cdot y$ désigne le produit des deux réels $x$ et $y$.

**I. Dynamique topologique.**

I.1) Montrer que $\Omega^+$ (resp. $\Omega$) est un fermé de $\Sigma_2^+$ (resp. $\Sigma_2$) qui vérifie $\Omega^+ = \sigma_2^+(\Omega^+)$ (resp. $\Omega = \sigma_2(\Omega)$).

I.2) Trouver un point de $\Omega^+$ dont l'orbite par $\sigma_2^+$ est dense dans $\Omega^+$.

I.3) La restriction $\sigma_2^+|_{\Omega^+} : \Omega^+ \to \Omega^+$ est-elle minimale?

I.4) Que peut-on dire de l'ensemble des points de $\Omega^+$ périodiques pour $\sigma_2^+$?

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, vérifie :

$$F_n = \frac{\varphi^{n+2} + \alpha^n}{\varphi^2 + 1},$$

où $\varphi$ et $\alpha$ sont les racines du polynome $X^2 - X - 1 = 0$, et donc :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$
$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

I.5) Calculer, pour $n$ fixé, le nombre de suites $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n$ dans $\{0,1\}^{n+1}$ qui vérifient $\epsilon_i \cdot \epsilon_{i+1} = 0$ pour $i = 0 \ldots n-1$. I.6) Calculer l'entropie de l'application $\sigma_2^+|_{\Omega^+}$.

**II. Une mesure invariante.**

II.1) Considérons $\underline{q} = (q_0, q_1) \in [0,1]^2$, vérifiant $q_0 + q_1 = 1$ et $q_0 \cdot q_1 \neq 0$. Montrer que $\mu_{\underline{q}}(\Omega_+) = 0$.

II.2) Si $c_0, \ldots, c_k$ est une suite finie dans $\{0,1\}$, avec $c_i \cdot c_{i+1} = 0, i = 0, \ldots, k-1$, on pose :

$$\nu([c_0, \ldots, c_k]) = \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k+c_0+c_k}.$$

Montrer que cette formule définit une mesure de probabilité $\nu$ sur $\mathcal{B}(\Omega^+)$ la tribu des boréliens de $\Omega^+$.

II.3) Montrer que $\nu$ est invariante par $\sigma_2^+|_{\Omega^+}$. [INDICATION : Calculer $\nu((\sigma_2^+|_{\Omega^+})^{-1}[c_0, \ldots, c_k])$, en séparant les cas $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$.]

II.4) On suppose $p > k$ et on se donne 2 suites finies $c_0, \ldots, c_k$ et $c_p, \ldots, c_{p+l}$, avec $c_i \in \{0,1\}$ et $c_i \cdot c_{i+1} = 0$, pour $i = 0, \ldots, k-1, p, \ldots, p+l-1$.

a) Montrer que le nombre de suites $x_0, \ldots, \ldots, x_{p+l} \in \{0,1\}^{p+l+1}$ qui vérifient $x_i = c_i$ pour $i = 0, \ldots, k, p, \ldots, p+l$, et $x_i \cdot x_{i+1} = 0$, pour $i = 0, \ldots, p+l-1$ est $F_{p-k-c_k-c_p}$.

b) Calculer la mesure de $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^+ \mid x_i = c_i, i = 0, \ldots, k, p, \ldots, p+l\}$.

c) Montrer que le système dynamique $(\Omega^+, \mathcal{B}(\Omega^+), \nu, \sigma_2^+|_{\Omega^+})$ est fortement mélangeant.

II.5) Que peut-on dire de $\lim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i$, où $(\epsilon_n) \in \Omega^+$?

**III. Une semi-conjugaison avec une application de $[0,1[$.**

On considère l'application $h : \Omega^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_n \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}.$$

III.1) Montrer que $h$ est une application continue de $\Omega^+$ dans $\mathbb{R}$.

III.2) Montrer que l'image de $h$ est contenue dans $[0,1]$ [INDICATION: on pourra prouver par récurrence que $h(\epsilon) \leq 1 + (1/\phi)^{2n+1}$, pour tout entier $n$.]

Montrer qu'il existe dans $\Omega^+$ une unique suite $\epsilon$, que l'on décrira, telle que $h(\epsilon) = 1$.

III.3) On munit $\Omega^+$ de l'ordre lexicographique. Montrer que $h$ est croissante. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites distinctes aient même image; en déduire que $h$ est injective sauf sur un ensemble dénombrable. [INDICATION : Montrer que l'élément maximal du cylindre $[c_0, \ldots, c_k] \cap \Omega^+$ est $(c_0, \ldots, c_k, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ ou $(c_0, \ldots, c_k, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ suivant la valeur de $c_k$.]

III.4) On note $[x]$ la partie entière du réel $x$. Si $x \in [0,1]$, on définit par récurrence $x_{n+1} = \varphi \cdot x_n - [\varphi \cdot x_n]$ et $\epsilon_n = [\varphi \cdot x_n]$, avec $x_0 = x$. Montrer que $\epsilon_n \cdot \epsilon_{n+1} = 0$ et que $x = \sum_{n\geq 0} \epsilon_n \varphi^{-n-1}$. Que peut-on en déduire sur $h$?

III.5) Montrer que $h$ donne une semi-conjugaison avec l'application $\Phi : [0,1[ \to [0,1[, x \mapsto \varphi \cdot x - [\varphi \cdot x]$, où $[\varphi \cdot x]$ est la partie entière de $\varphi \cdot x$ . III.6) Montrer que $h_*\nu$ est la mesure $\mu$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, dont la densité est $\frac{\varphi^3}{\varphi^2+1}$ sur $[0, 1/\varphi]$ et $\frac{\varphi^2}{\varphi^2+1}$ sur $[1/\varphi, 1]$. Montrer que $\mu$ est invariante par $\Phi$.

**IV. Une semi-conjugaison avec une application de $\mathbb{T}^2$.**

On considère l'application $\tilde{\psi} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\tilde{\psi}((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\sum_{n\geq 0} \epsilon_n \alpha^n, \sum_{n<0} \epsilon_n \varphi^n).$$

IV.1) Montrer que l'image de $\tilde{\psi}$ est $[-1, \varphi^{-1}] \times [0,1] \cup [\varphi^{-1}, \varphi] \times [0, \varphi^{-1}]$.

IV.2) Montrer que c'est un domaine fondamental pour le réseau $\Gamma$ engendré par $(\varphi, \varphi^{-1})$ et $(-1,1)$. [INDICATION : Faire une figure.]

IV.3) On pose $\psi = \pi\tilde{\psi}$, où $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ est la projection canonique. Montrer que $\psi$ est une semi-conjuguaison $\sigma_2$ sur l'automorphisme linéaire $\bar{A}$ de $\mathbb{R}^2/\Gamma$ qui provient de l'automorphisme linéaire $A$ de $\mathbb{R}^2$, dont la matrice dans la base $(\varphi, \varphi^{-1})$ et $(-1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.4) En déduire l'entropie de $\sigma_2$.