UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée

*Spécialité : Mathématiques*

par

**Nathalie LAGIER**

sous la direction du Pr. Patrick DELORME

*Titre :*

# TERME CONSTANT DE FONCTIONS SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE RÉDUCTIF P-ADIQUE

soutenue publiquement le 13 juin 2007

## JURY

| | | |
|---|---|---|
| M. Joseph BERNSTEIN | Tel Aviv University | *Rapporteur* |
| M. Jacques CARMONA | Université de la Méditerranée | *Examinateur* |
| M. Patrick DELORME | Université de la Méditerranée | *Directeur* |
| M. Guy HENNIART | Université Paris-Sud | *Rapporteur* |
| M. Jean-Pierre LABESSE | Université de la Méditerranée | *Examinateur* |
| M. David RENARD | École Polytechnique | *Examinateur* |

**UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE**
**FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY**
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée

*Spécialité : Mathématiques*

par

**Nathalie LAGIER**

sous la direction du Pr. Patrick DELORME

*Titre :*

# TERME CONSTANT DE FONCTIONS SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE RÉDUCTIF P-ADIQUE

soutenue publiquement le 13 juin 2007

## JURY

| | | |
|---|---|---|
| M. Joseph BERNSTEIN | Tel Aviv University | *Rapporteur* |
| M. Jacques CARMONA | Université de la Méditerranée | *Examinateur* |
| M. Patrick DELORME | Université de la Méditerranée | *Directeur* |
| M. Guy HENNIART | Université Paris-Sud | *Rapporteur* |
| M. Jean-Pierre LABESSE | Université de la Méditerranée | *Examinateur* |
| M. David RENARD | École Polytechnique | *Examinateur* |

## Remerciements.

Je voudrais tout d'abord remercier Patrick DELORME pour son implication, sa disponibilité et ses compétences qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens également à remercier Joseph BERNSTEIN pour la démonstration du lemme 1 et son intérêt pour ce travail, Vincent SÉCHERRE pour ses corrections et sa patience, Jean-Pierre LABESSE pour ses "débloquages" informatiques ainsi que Jacques CARMONA pour son attention, son sourire timide et encourageant, depuis le DEA.

Je remercie Guy HENNIART d'avoir rapporté cette thèse dans les meilleurs délais et d'en avoir fait une lecture approfondie. Je remercie David RENARD d'avoir accepté d'être membre de mon jury.

Enfin, je remercie le personnel de la scolarité qui m'a aidée dans mes démarches, notamment Madame TASTAYRE et Madame TINEL ainsi que Madame LOZINGOT de l'IML.


Je dédie cette thèse à mes parents qui m'ont transmis suffisamment d'assurance et de liberté pour aimer le sport autant que les heures à mon bureau, U2 autant que Pierre Bachelet, J.M.G Le Clézio autant que Pythagore...

# Table des matières.


0 Introduction .................................................. 4
1 Notations et rappels.................................................. 9
2 Modules de Jacquet et vecteurs-distributions.................................................. 15
3 Majorations.................................................. 28
4 Un analogue d'un lemme de Langlands.................................................. 40
5 Une propriété de la décomposition de Cartan.................................................. 52
6 Appendice.................................................. 55

**Abstract** : We generalize Casselman's pairing to $p$-adic reductive symmetric spaces and study the asymptotic behaviour of certain generalized coefficients. We also prove an analogue of a lemma due to Langlands which allows us to prove a disjunction result for the Cartan decomposition of the $p$-adic reductive symmetric spaces.

**Résumé** : Nous établissons une généralisation de la dualité de Casselman aux espaces symétriques réductifs $p$-adiques et nous étudions le comportement asymptotique de certains coefficients généralisés. Nous prouvons aussi un analogue d'un lemme de Langlands grâce auquel nous obtenons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan des espaces symétriques réductifs $p$-adiques.

# 0 Introduction

## 0.1

Nous présentons ici des résultats d'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs $p$-adiques. Soit $F$ un corps local non archimédien de caractéristique 0 (l'hypothèse de caractéristique 0 étant faite en particulier pour utiliser les résultats de [BD]). Soit $G$ le groupe des points sur $F$ d'un groupe réductif connexe défini sur $F$ et soit $\sigma$ une involution rationnelle définie sur $F$ de ce groupe algébrique. Le quotient du groupe $G$ par le groupe $H$ des points sur $F$ d'un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de $\sigma$ est appelé espace symétrique réductif $p$-adique. Un groupe réductif $G$ peut être vu comme un espace symétrique en considérant l'involution de $G \times G$ donnée par l'inversion des facteurs.

Harish-Chandra a démontré la formule de Plancherel pour les groupes réductifs réels [H-C] et les groupes réductifs $p$-adiques (cf. [Wald]). La formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs réels a été établie par deux méthodes différentes par E.P. van den Ban et H. Schlichtkrull d'une part et P. Delorme d'autre part (cf. [BSD] pour une présentation des deux méthodes).

Les fonctions sphériques sur certains espaces symétriques réductifs ont été étudiées (cf. [Hi], [HiSat], [O]). L'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs $p$-adiques généraux en est à ses débuts. On dispose de résultats de structure (cf. [HWan], [HH]). On note $G/H$ un espace symétrique réductif $p$-adique. P. Blanc et P. Delorme ont construit des familles rationnelles de formes linéaires $H$-invariantes sur les représentations paraboliquement induites (cf. [BD], voir aussi paragraphe 0.3). Enfin on dispose d'une décomposition de type Cartan des espaces symétriques réductifs $p$-adiques (cf. [BeO], [DS], voir aussi (0.4)).

Nos résultats portent d'abord sur l'analogue pour les espaces symétriques réductifs de la dualité de Casselman (cf. [C]).

On dit que $P$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ tel que $P$ et $\bar{P} := \sigma(P)$ soient opposés. Le groupe $M = P \cap \sigma(P)$ est le sous-groupe de Levi $\sigma$-stable de $P$. Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse admissible de $G$. A toute forme linéaire $H$-invariante $\xi$ sur $(\pi, V)$, on associe une forme linéaire $M \cap H$-invariante, $j_P^*(\xi)$, sur le module de Jacquet le long de $P$ de $(\pi, V)$ (cf. théorème 1). Ceci permet de définir le terme constant le long de $P$ des coefficients généralisés (cf. proposition 2):

$$gH \mapsto c_{\xi,v}(gH) := \langle \pi^*(g)\xi, v\rangle,\ g \in G,\ v \in V, \tag{0.1}$$

où $(\pi^*, V^*)$ est la représentation $g \mapsto^t \pi(g^{-1})$ sur le dual algébrique $V^*$ de $V$. Il est bon de noter qu'en général, la forme linéaire $\xi$ n'est pas lisse, c'est-à-dire fixé par un sous-groupe compact ouvert.

On précise au théorème 2 des propriétés de $j_P^*(\xi)$. Ces résultats, joints à la décomposition de Cartan, nous permettent notamment de démontrer que si $\pi$ est bornée, i.e telle que tous ses coefficients sont bornés, les coefficients généralisés $c_{\xi,v}$ sont bornés (cf. théorème 4 (ii)), ce qui est l'analogue d'un résultat de M. Flensted-Jensen, T. Oshima, H. Schlichtkrull pour les espaces symétriques réductifs réels (cf. [F-JOsS]).

Ce théorème, joint à la comparaison de fonctions $\|.\|$ et $\|.\|_{BD}$ sur $G/H$ définies à partir de représentation rationnelle de $G$ (cf. (0.2) et (3.16) pour leur définition), montre aussi que la condition restrictive du théorème 3 de [BD] est toujours satisfaite.

Soit $\pi_\chi$ une représentation induite à partir d'un $\sigma$-sous-groupe parabolique d'une représentation lisse bornée irréductible de $M$ tordue par un caractère non ramifié $\chi$ de $M$ qui est $\sigma$-invariant. Soit $\xi$ l'une des formes linéaires $H$-invariantes construites dans [BD], lorsqu'elles sont définies. On établit (cf. théorème 5) l'analogue d'un lemme de Langlands (cf. [Bo Wall], ch. IV, lemme 4.4) pour les coefficients généralisés $c_{\xi,v}$ sous une condition de dominance de $\chi$.

Grâce à ce théorème, nous montrons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan (cf. théorème 7). Il s'agit d'un premier pas vers l'obtention d'une partition de $G/H$ en vue de son utilisation pour la troncature. Nous espérons que nos méthodes conduiront à une telle partition.

## 0.2

On considère divers groupes algébriques définis sur $F$, et on utilisera des abus de terminologie du type suivant : "soit $A$ un tore déployé" signifiera "soit $A$ le groupe des points sur $F$ d'un tore défini et déployé sur $F$". Avec ces conventions, soit $G$ un groupe linéaire algébrique réductif et connexe défini sur $F$. Soit $A_0$ un tore déployé maximal de $G$ ; on note $M_0$ son centralisateur. Si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_0$, il possède un unique sous-groupe de Levi contenant $A_0$, noté $M$. Son radical unipotent sera noté $U$. On note $A_G$ le plus grand tore déployé dans le centre de $G$.

On note $X(G)$ le groupe des caractères non ramifiés de $G$ et $X_*(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de $A_G$, qui est un groupe abélien libre de type fini. On fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi$ de $F$. On note alors $\Lambda(G)$ l'image de $X_*(G)$ dans $G$ par le morphisme de groupes $\underline{\lambda} \mapsto \underline{\lambda}(\varpi)$, qui est isomorphe à $X_*(G)$ par ce morphisme. On adopte des notations similaires pour les sous-groupes de Levi de $G$.

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $G$ et $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $P$ et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$.

On reprend les notations et hypothèses du paragraphe 0.1 notamment pour $\sigma$ et $H$.

Un tore déployé de $G$ contenu dans $\{g \in G | \sigma(g) = g^{-1}\}$ sera dit $\sigma$-déployé, (*$(\sigma, F)$-split torus* dans [HWan]).

On fixe désormais un tore $\sigma$-déployé maximal, $A_\emptyset$, et on suppose $A_0$ choisi de telle sorte que $A_0$ soit un tore déployé $\sigma$-stable maximal contenant $A_\emptyset$ (cf. [HW] lemme 4.5 (i) pour l'existence). On note $(A_i)_{i \in I}$, un ensemble de représentants des classes de $H$-conjugaison de tores $\sigma$-déployés maximaux de $G$, qui est fini (cf. [HWan], 6.10 et 6.16). On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les $A_i$ sont tous conjugués sous $G$ (cf. [HH], proposition 1.16). On choisit, pour tout $i$ dans $I$, un élément $x_i$ de $G$, avec $x_i A_\emptyset x_i^{-1} = A_i$ en prenant $x_\emptyset = e$, où $e$ est l'élément neutre de $G$.

On fixe $P_\emptyset$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal de $G$ contenant $A_\emptyset$. Soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$. On note $\overline{W(A_\emptyset)}$ un ensemble de représentants du quotient $W(A_\emptyset)$ du normalisateur dans $G$ de $A_\emptyset$ par son centralisateur dans $G$, noté $M_\emptyset$. On extrait de l'ensemble $\{x_i w | w \in \overline{W(A_\emptyset)}\}$ un ensemble de représentants $\overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G$ (resp. $\overline{\mathcal{W}}_M^G$) de $(H, P_\emptyset)$-doubles classes ouvertes de $G$ (resp.$(H, P)$-doubles classes ouvertes de $G$) avec $\overline{\mathcal{W}}_M^G \subset \overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G$. Ces ensembles sont finis (cf. [HWan], proposition 6.10 et corollaire 6.16).

On note $X(M)_\sigma$ la composante neutre de l'ensemble des caractères de $X(M)$ anti-invariants par $\sigma$. On note $\delta_P$ le module de $P$, qui est un élément de $X(M)_\sigma$.

## 0.3

On considère $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$, de sous-groupe de Levi $\sigma$-stable $M$ et de radical unipotent $U$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on note :

$$A_M^-(\varepsilon) := \{a \in A_M;\ |\alpha(a)|_F \leq \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P)\},$$

où $|.|_F$ est la valeur absolue normalisée de $F$. On pose $A_M^- := A_M^-(1)$.

Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse admissible de $G$, notons $V_P$ le module de Jacquet de $V$ relativement à $P$ et $j_P : V \to V_P$ la projection naturelle. On munit $V_P$ de la représentation lisse admissible $\pi_P$ de $M$ définie par $\pi_P(m) j_P(v) := \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v)$ pour tout $m \in M$, $v \in V$.

**Lemme 2** : Si $K$ est un sous-groupe ouvert compact de $G$, il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $K$ possédant la propriété suivante :

Pour toute représentation lisse admissible $(\pi, V)$ de $G$, pour tout élément $\xi$ de $V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\langle \pi^*(k)\xi, \pi(a)v \rangle = \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-,\ k \in K'.$$

Le lemme précédent permet d'utiliser des résultats de Casselman (cf. [C] théorème 4.2.4) que nous étendons aux coefficients généralisés dans le théorème suivant.

Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse admissible de $G$.

**Théorème 1** : Soit $\xi \in V^{*H}$. Alors il existe un unique $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M \cap H}$ vérifiant : pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de $v$, tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon).$$

De plus, on peut choisir $\varepsilon$ indépendamment de $\xi \in V^{*H}$.

On note $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$. On note $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Soient $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$ et $\Delta(U, A_\emptyset)$ les racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $U$ qui sont éléments de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$ l'ensemble :

$$\{a \in A_\emptyset;\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(U, A_\emptyset) \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1,\ \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Delta(U, A_\emptyset)\}.$$

Le théorème suivant est une extension aux coefficients généralisés du théorème 4.3.3 de [C] pour les coefficients.

**Théorème 2** : Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\xi \in V^{*H}$, on ait :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle,\ a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

Fixons un plongement algébrique $\tau : G \to GL_n(F)$. On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $F$ (cf. [Wald] I.1). Pour $g \in G$, écrivons : $\tau(g) = (a_{i,j})_{i,j=1,..,n}$, $\tau(g^{-1}) = (b_{i,j})_{i,j=1,..,n}$, $\|g\| = sup_{i,j} sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F)$ et:

$$\|gH\| := \|g\sigma(g^{-1})\|. \tag{0.2}$$

**Théorème 4** : (i) Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse, admissible et de type fini de $G$. Soit $\xi \in V^{*H}$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe $C_v > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v\rangle| \leq C_v \|gH\|^c,\ g \in G.$$

(ii) Si $(\pi, V)$ est une représentation lisse bornée irréductible de $G$ et $\xi \in V^{*H}$, alors pour tout $v \in V$, la fonction $c_{\xi,v}$ définie en (0.1) est bornée.

**Remarque** : Le point (i) permet de voir qu'une des hypothèses du théorème 3 de [BD] est toujours satisfaite.

## 0.4

Soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$, soient $M$ son sous-groupe de Levi $\sigma$-stable et $U$ son radical unipotent. Soit $(\delta, V_\delta)$ une représentation lisse, admissible, bornée et de type fini de $M$. On introduit, pour $\chi \in X(M)_\sigma$, la représentation $\delta_\chi = \delta \otimes \chi$ de $M$. L'espace de $\delta_\chi$ s'identifie à $V_\delta$. On étend l'action de $M$ à $P$ en la prenant triviale sur $U$. Soit $I_\chi^P(\delta)$ l'espace des applications $\varphi : G \to V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\delta_\chi(m^{-1})\varphi(g),\ \ g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe $G$ agit par la représentation régulière gauche $\pi_{\delta,\chi}^P$ sur $I_\chi^P(\delta)$.

Si $x \in G$ et $E$ est une partie de $G$, on note $x.E := xEx^{-1}$.

A tout $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, on associe l'espace : $\mathcal{V}(\delta, w) = V_\delta^{*M \cap w^{-1}.H}$. On considère la somme $\mathcal{V}(\delta) := \oplus_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \mathcal{V}(\delta, w)$. La projection de $\mathcal{V}(\delta)$ sur $\mathcal{V}(\delta, w)$ parallèlement aux autres composantes sera notée $pr(\delta, w)$ ou $pr_w$.

Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $|\chi\delta_P^{-1/2}|$ soit strictement $P$-dominant. On associe à $\eta \in \mathcal{V}(\delta, e)$, la fonction $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)$ définie sur $G$ à valeurs dans $V_\delta^*$ par les relations :

a/ $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta) = 0$ en dehors de $HP$.

b/ Pour tout $(h, m, u) \in H \times M \times U$, on a :

$$\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)(hmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\chi(m)\delta^*(m^{-1})\eta.$$

Pour $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$, on définit également :

$$\varepsilon_w(P, \delta, \chi, \eta) = R_{w^{-1}}\varepsilon_e(w.P, w.\delta, w.\chi, \eta),$$

où $R$ désigne la représentation régulière droite de $G$ et $w.\delta$ (resp. $w.\chi$) la représentation de $w.M$ déduite de $\delta$ (resp. $\chi$) par transport de structure. On définit enfin pour $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$:

$$j(P, \delta, \chi, \eta) = \sum_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \varepsilon_w(P, \delta, \chi, pr(\delta, w)\eta).$$

On peut appliquer le théorème 3 de [BD] avec $r = 0$ grâce à notre théorème 4 (ii). On en déduit que pour tout $v \in V_\delta$, l'application $g \mapsto \langle j(P, \delta, \chi, \eta)(g), v\rangle$ est continue sur $G$. Alors $\varphi \mapsto \int_K \langle j(P, \delta, \chi, \eta)(k), \varphi(k)\rangle dk$ définit une forme linéaire sur $I_\chi^P(\delta)$, invariante par $H$ sous $(\pi_{\delta,\chi}^P)^*$, on la note encore $j(P, \delta, \chi, \eta)$.

On dispose des intégrales d'entrelacements $A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ qui entrelacent $I_\chi^P(\delta)$ et $I_\chi^{\bar{P}}(\delta)$ et définies par des intégrales convergentes pour $\chi \in X(M)$, tel que $|\chi\delta_P^{-R_\delta}|$ soit $P$-dominant pour $R_\delta > 0$ bien choisi (cf. [Wald ], théorème IV.1.1).

Le symbole $a \to_{\bar{P}} \infty$ signifie que $a \in A_M$ et que $|\alpha(a)|_F \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \Sigma(\bar{P})$.

**Théorème 5** : On suppose de plus que $(\delta, V_\delta)$ est irréductible. Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $|\chi\delta_P^{-1/2}|$ et $|\chi\delta_P^{-R_\delta}|$ soient strictement $P$-dominants. Alors, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, $g \in G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$ :

$$lim_{a \to_{\bar{P}} \infty}\chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)\langle(\pi_{\delta,\chi}^P)^*(ga)j(P, \delta, \chi, \eta), \varphi\rangle = \langle pr_e\eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(g)\rangle, \tag{0.3}$$

où $\mu_\delta$ est le caractère central de $\delta$.

On note $\Lambda_T^-(A_\emptyset) := \{\lambda \in \Lambda(A_\emptyset); |\alpha(\lambda)|_F \leq e^{-T}, \alpha \in \Delta(P_\emptyset)\}$, où $T \geq 0$ et $\Lambda^-(A_\emptyset) := \Lambda_0^-(A_\emptyset)$.

La décomposition de Cartan (cf. [BeO], [DS]) donne l'existence d'une partie compacte $\Omega$ de $G$ telle que :

$$G = \bigcup_{y \in \overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G} \Omega\Lambda^-(A_\emptyset)y^{-1}H. \tag{0.4}$$

**Théorème 7** : Il existe $T > 0$ tel que la réunion $\bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega\Lambda_T^-(A_\emptyset)y^{-1}H$ soit disjointe.

# 1 Notations et rappels.

## 1.1 Notations.

On va utiliser largement des notations et conventions de [Wald]. Soit $F$ un corps local non archimédien, de caractéristique 0. On considère divers groupes algébriques définis sur $F$, et on utilisera des abus de terminologie ou convention du type suivant :

$$\text{"soit } A \text{ un tore déployé " signifiera " soit } A \text{ le groupe des points sur } F \text{ d'un tore } \underline{A} \text{ défini et déployé sur } F \text{ ".} \tag{1.1}$$

Avec ces conventions, soit $G$ un groupe linéaire algébrique réductif et connexe. Soit $A_0$ un sous-tore de $G$, déployé et maximal pour cette propriété, on note $M_0$ son centralisateur dans $G$. Si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_0$, il possède un unique sous-groupe de Levi contenant $A_0$, noté $M$ (ou $M_P$). Son radical unipotent sera noté $U$ ou $U_P$.

Si $H$ est un groupe algébrique, on note $Rat(H)$ le groupe des caractères algébriques de $H$ définis sur $F$. Si $E$ est un espace vectoriel, on note $E^*$ son dual. S'il est réel, on note $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié. On note $A_G$ le plus grand tore déployé dans le centre de $G$.

On note $\mathfrak{a}_G = Hom_{\mathbb{Z}}(Rat(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères rationnels de $G$ à $A_G$ induit un isomorphisme :

$$Rat(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq Rat(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \tag{1.2}$$

On dispose de l'application canonique, $H_G : G \to \mathfrak{a}_G$ définie par :

$$e^{\langle H_G(x), \chi \rangle} = |\chi(x)|_F, \; x \in G, \chi \in Rat(G) \tag{1.3}$$

où $|.|_F$ est la valeur absolue normalisée de $F$. Le noyau de $H_G$, qui est noté $G^1$, est l'intersection des noyaux des caractères de $G$ de la forme $|\chi|_F$, $\chi \in Rat(G)$. On notera $X(G) = Hom(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. On a des notations similaires pour les sous-groupes de Levi.

Si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_0$, on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$, $H_P = H_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$. On note $\mathfrak{a}_{G,F}$, resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}$ l'image de $G$, resp. $A_G$, par $H_G$. Alors $G/G^1$ est isomorphe au réseau $\mathfrak{a}_{G,F}$. Soit $M$ un sous-groupe de Levi contenant $A_0$. Les inclusions $A_G \subset A_M \subset M \subset G$, déterminent un morphisme de groupe surjectif $\mathfrak{a}_{M,F} \to \mathfrak{a}_{G,F}$, et un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} \to \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$. Le premier (resp. le second) se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$ (resp. injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$). La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, noté $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie ;

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G \tag{1.4}$$

Il y a une surjection :

$$(\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}} \to X(G) \to 1 \tag{1.5}$$

qui associe à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|^s$ (cf. [Wald], I.1.(1)). Le noyau est un réseau et cela définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G)$ est de dimension $dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_G$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\nu \in (\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}}$ un élément se projetant sur

$\chi$ par l'application (1.5). La partie réelle $Re\,\nu \in \mathfrak{a}_G^*$ est indépendante du choix de $\nu$. Nous la noterons $Re\,\chi$. Si $\chi \in Hom(G,\mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$. De même, si $\chi \in Hom(A_G,\mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, que l'on note encore $|@\chi|$ et on pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$.

De l'isomorphisme naturel (1.2) on déduit aisément l'égalité :

$$A_G^1 = A_G \cap G^1. \tag{1.6}$$

Alors $A_G^1$ est le plus grand sous-groupe compact de $A_G$.

On note $X_*(G)$ ou $X_*(A_G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de $A_G$. C'est un groupe abélien libre de type fini. On fixe une fois pour toute une uniformisante $\varpi$ de $F$. On note alors $\Lambda(G)$, l'image de $X_*(G)$ dans $G$ par le morphisme de groupes $\underline{\lambda} \mapsto \underline{\lambda}(\varpi)$, qui est isomorphe à $X_*(G)$ par ce morphisme.

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $G$, qui s'identifie à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_M^*$, $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $P$ et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$.

On note $W^G$ le groupe de Weyl de $G$ relativement à $A_0$, qui agit sur $\mathfrak{a}_0$.
On choisit un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$ invariant par $W^G$. On le notera $(.|.)$, et $|.|$ la norme qu'on en déduit. (1.7)

On note :

$$\begin{aligned} &{}^+\mathfrak{a}_P^*(\text{ resp. } {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^*) = \{\nu \in \mathfrak{a}_M^* | \nu = \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta(P)} x_\alpha \alpha \text{ où } x_\alpha > 0 \text{ (resp. } x_\alpha \geq 0)\}.\\ &\mathfrak{a}_P^{*+} \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_P^{*+}) = \{\nu \in \mathfrak{a}_M^* | (\nu|\alpha) > 0 \text{ (resp. } \geq 0), \alpha \in \Sigma(P)\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Comme dans [Wald] I.1, on fixe $K_0$ un sous-groupe compact maximal de $G$ qui est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à $A_0$ dans l'immeuble de $G$.

Soit $P_0$ un sous-groupe parabolique minimal de $G$ contenant $A_0$.

On note :

$$\begin{aligned} &\bar{\mathfrak{a}}_P^+(\text{resp. } \bar{\mathfrak{a}}_P^-) := \{X \in \mathfrak{a}_P | \langle \alpha, X\rangle \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0), \alpha \in \Delta(P)\},\\ &\text{On écrira } \bar{\mathfrak{a}}_0^+ \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_0^-) \text{ au lieu de } \bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^+ \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^-).\\ &{}^+\bar{\mathfrak{a}}_P := \{X \in \mathfrak{a}_P | \langle \nu, X\rangle \geq 0\ ,\ \nu \in \mathfrak{a}_P^{*+}\},\\ &\overline{M}_0^+ := H_{M_0}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}_0^+) \text{ et } \overline{M}_0^- := H_{M_0}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}_0^-). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si $N$ est un sous-groupe fermé de $G$, on note $dn$ une mesure de Haar invariante à gauche sur $N$. Si $N$ et $N'$ sont deux sous-groupes fermés de $G$ tels que $N' \subset N$, on notera $d\dot{n}$, si elle existe, une mesure sur $N/N'$, invariante à gauche par $N$, positive et non nulle. C'est le cas si $N$ et $N'$ sont unimodulaires.

Soit $P$ un sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_0$, soit $M$ son sous-groupe de Levi contenant $A_0$ et soit $\bar{P} = M\bar{U}$ le sous-groupe parabolique de $G$ opposé à $P$ relativement à $M$.

Soit $P$ un sous-groupe parabolique de $G$ de sous-groupe de Levi $M$. On note $\rho_P$ la demi-somme des racines de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $P$, on note $\delta_P$ l'élément de $X(M)_\sigma$ tel que l'on ait :

$$\delta_P(m) = e^{2\rho_P(H_M(m))},\ m \in M.$$

On note $C(G, P, -2\rho_P)$ l'espace des fonctions continues $f : G \to \mathbb{C}$ telles que :

$$f(gmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))}, \quad g \in G,\ m \in M,\ u \in U.$$

On remarque que si $f \in C(G, P, -2\rho_P)$, alors $f$ est invariante à droite par $K_0 \cap P$. En raisonnant comme dans la preuve de la conséquence 7 de la proposition 5.26 de [K], et en remplaçant $K \cap M$ par $K_0 \cap P$, on montre que, pour une bonne normalisation des mesures :

Pour toute fonction $f$ de $C(G, P, -2\rho_P)$, l'intégrale $\int_{\bar{U}} f(\bar{u})d\bar{u}$ est absolument convergente et :

$$\int_{K_0} f(k)dk = \int_{\bar{U}} f(\bar{u})d\bar{u}. \tag{1.10}$$

Il en résulte que la forme linéaire $\mathcal{M}$ sur $C(G, P, -2\rho_P)$ définie par :

$$\mathcal{M}(f) := \int_{K_0} f(k)dk, \quad f \in C(G, P, -2\rho_P)$$

est invariante par les translations à gauche par les éléments de $K_0$, de $\bar{U}$ ainsi que ceux de $M$. Donc :

La forme linéaire $\mathcal{M}$ sur $C(G, P, -2\rho_P)$ est invariante par les translations à gauche par les éléments de $G$. (1.11)

## 1.2 Involutions rationnelles de $G$.

On utilisera parfois de façon implicite les deux faits suivants. Avec nos hypothèses sur $F$, on a (cf. [Hu] théorème 34.4 (d)) :

Si $L$ est le groupe des points sur $F$ d'un groupe algébrique réductif $\underline{L}$ défini sur $F$, alors $L$ est Zariski dense dans $\underline{L}$. (1.12)

Il résulte facilement de ceci et du théorème 34.4 (c) de [Hu], que :

Si $L$ est comme ci-dessus et $A$ le groupe des points sur $F$ d'un tore déployé $\underline{A}$ de $\underline{L}$, alors le centralisateur de $\underline{A}$ est un groupe réductif défini sur $F$ dont le groupe des points sur $F$ est égal au centralisateur de $A$ dans $L$. (1.13)

Soit $\sigma$ une involution rationnelle, définie sur $F$, du groupe algébrique dont $G$ est le groupe des points sur $F$. Soit $H$ le groupe des points sur $F$ d'un sous-groupe ouvert, défini sur $F$, du groupe des points fixes de $\sigma$.

Un tore déployé de $G$ contenu dans $\{g \in G | \sigma(g) = g^{-1}\}$ sera dit $\sigma$-déployé,(*$(\sigma, F)$-split torus* dans [HWan]). On dira que $P$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ tel que $P$ et $\sigma(P)$ soient opposés, c'est à dire tel que $P \cap \sigma(P)$ soit un sous-groupe de Levi de $P$. C'est alors le sous-groupe de Levi $\sigma$-stable de $P$ : en effet, tout sous-groupe $\sigma$-stable de $P$ est inclus dans $P \cap \sigma(P)$ qui est $\sigma$-stable. On utilisera la convention suivante:

$$\text{La phrase : "Soit } P = MU \text{ un } \sigma\text{-sous-groupe parabolique de } G\text{" signifiera que } P \text{ est un } \sigma\text{-sous-groupe parabolique de } G\text{, que } M \text{ est son sous-groupe de Levi } \sigma\text{-stable (i.e } M = P \cap \sigma(P)\text{) et que } U \text{ est son radical unipotent. On notera } \bar{P} = M\bar{U} \text{ le sous-groupe parabolique } \sigma(P) \text{ qui est opposé à } P \text{ relativement à } M. \tag{1.14}$$

D'après [HWan], proposition 6.15, si $P_0$ est un sous-groupe parabolique minimal de $G$, le nombre de $(H, P_0)$-doubles classes est fini, donc aussi le nombre de $(H, P)$-doubles classes pour tout sous-groupe parabolique $P$ de $G$.

On a (cf. [HWan] l'équivalence de (i) et (iv) de la proposition 4.7 et lemme 4.5) :

$$\text{Si } P_\emptyset \text{ est un } \sigma\text{-sous-groupe parabolique minimal, son sous-groupe de Levi } \sigma\text{-stable, } M_\emptyset\text{, contient un unique tore } \sigma\text{-déployé maximal de } G\text{, } A_\emptyset\text{, et } M_\emptyset = Z_G(A_\emptyset). \tag{1.15}$$

On fixe désormais $A_\emptyset$ un tore $\sigma$-déployé maximal de $G$ et on note $M_\emptyset$ son centralisateur. On fixe $A_0$ un tore déployé maximal de $M_\emptyset$. Alors (cf. [HWan] lemme 4.5 (i)), $A_0$ est $\sigma$-stable et c'est un tore déployé maximal de $G$. Donc :

$$\text{Le tore } A_0 \text{ est un tore déployé maximal } \sigma\text{-stable de } G \text{ contenant } A_\emptyset. \tag{1.16}$$

On fixe aussi $P_\emptyset$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal contenant $A_\emptyset$. On note $(A_i)_{i \in I}$, un ensemble de représentants des classes de $H$-conjugaison de tores $\sigma$-déployés maximaux de $G$. On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les $A_i$ sont tous conjugués sous $G$ (cf. [HH] proposition 1.16).

On choisit, pour tout $i$ dans $I$, un élément $x_i$ de $G$, avec $x_i A_\emptyset x_i^{-1} = A_i$ en prenant $x_\emptyset = e$. On note $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des $\sigma$-sous-groupes paraboliques minimaux de $G$ contenant $A_i$, qui est fini, et les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont tous conjugués entre eux par un élément du normalisateur de $A_i$ (cf. [HH], proposition 2.7). Comme les $A_i$ sont conjugués entre eux, tous les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont conjugués sous $G$ à $P_\emptyset$ et à $P_i := x_i P_\emptyset x_i^{-1}$.

On note $M_i$ le centralisateur dans $G$ de $A_i$. Si $L$ est un sous-groupe de $G$, on note $W_L(A_i)$ le quotient du normalisateur dans $L$ de $A_i$ par son centralisateur. On note $W(A_i)$ au lieu de $W_G(A_i)$.

On note $\overline{W}_i$ un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ de $W_{H_i}(A_\emptyset) \setminus W(A_\emptyset)$ où $H_i = x_i^{-1} H x_i$. Soit $\mathcal{W}_i^G$ l'ensemble $\{x_i x | x \in \overline{W}_i\}$ et $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i^G$. Alors (cf. [HH], théorème 3.1) :

$$\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G \text{ forme un ensemble de représentants des } (H, P_\emptyset)\text{-doubles classes ouvertes dans } G. \tag{1.17}$$

En particulier, comme l'ensemble des $(H, P_\emptyset)$-doubles classes est fini (cf. [HWan], proposition 6.10 et corollaire 6.16), on voit que $I$ est fini.

Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$. On remarque que $A_M$, le plus grand tore déployé du centre de $M$, est invariant par $\sigma$, donc $\sigma$ agit naturellement sur $\mathfrak{a}_M$.

Si $x \in G$ et $E$ est une partie de $G$, on note $x.E := xEx^{-1}$ et si $f$ est une application définie sur $E$, on note $x.f$ l'application définie sur $x.E$ par : $x.f(xyx^{-1}) = f(y)$, pour $y \in E$.

On note $X(M)_\sigma$ (resp. $X_\mathbb{R}(M)_\sigma$) l'ensemble des caractères non ramifiés de $M$ qui sont l'image par l'application de (1.5) (pour $M$ au lieu de $G$), de l'ensemble des éléments de $(\mathfrak{a}_M^*)_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{a}_M^*$) anti-invariants par $\sigma$. Alors $X(M)_\sigma$ est la composante neutre de l'ensemble des caractères de $X(M)$ anti-invariants par $\sigma$. On remarque de plus que :

$$\text{Si } \chi \in X(M)_\sigma, \text{ alors } \chi(h) = 1, \quad h \in M \cap H, \tag{1.18}$$

En effet:

$$\chi \circ \sigma(h) = \chi(h)^{-1}, \quad h \in M \cap H.$$

On en déduit que :

$$\chi(h)^2 = 1, \quad h \in M \cap H.$$

Alors, pour $h \in M \cap H$ fixé, l'application continue sur $X(M)_\sigma$ définie par $\chi \mapsto \chi(h)$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par connexité, on en déduit que $\chi(h) = 1$, d'où (1.18).

On fixe $P_0$ un sous-groupe parabolique minimal de $G$ contenant $A_0$ et contenu dans $P_\emptyset$. (1.19)

On pose :

$$\begin{aligned} &\Lambda_T^-(A_\emptyset) := \{\lambda \in \Lambda(A_\emptyset);\ |\alpha(\lambda)|_F \leq e^{-T},\ \alpha \in \Delta(P_\emptyset)\}, \text{ où } T \geq 0 \\ &\text{et } \Lambda^-(A_\emptyset) := \Lambda_0^-(A_\emptyset). \end{aligned} \tag{1.20}$$

La décomposition de Cartan (cf. [BeO] théorème 1.1 et [DS] théorème 0.1) donne l'existence d'un ensemble compact $\Omega$ tel que :

$$G = \cup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda^-(A_\emptyset) y^{-1} H. \tag{1.21}$$

Comme $A_0$ est $\sigma$-invariant, $\sigma$ agit naturellement sur $\mathfrak{a}_0$. On définit $\mathfrak{a}_\emptyset$ le sous-espace des éléments anti-invariants de $\mathfrak{a}_0$. Le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}_0$ engendré par $\sigma$ et le groupe de Weyl de $G$ relativement à $A_0$, $W^G$, est fini car $\sigma$ préserve $A_0$ et donc $N_G(A_0)$. En conséquence, le produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$ introduit en (1.7) peut être supposé également $\sigma$-invariant.

Soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$ et $M$ son sous-groupe de Levi $\sigma$-stable. On note $A_{G,\sigma}$ (resp. $A_{M,\sigma}$) le plus grand tore $\sigma$-déployé de $A_G$ (resp. de $A_M$), $\mathfrak{a}_G^\sigma$ (resp. $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$) l'ensemble des points fixes (resp. anti-invariants ) de $\mathfrak{a}_G$ sous $\sigma$.

On note $p_\sigma$ la projection de $\mathfrak{a}_G$ sur $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ parallèlement à $\mathfrak{a}_G^\sigma$ et $H_{G,\sigma}$ la composée $p_\sigma \circ H_G$.

## 1.3 Représentations.

### 1.3.1 Représentations lisses.

Soit $(\pi, V)$ une représentation de $G$ sur un espace vectoriel $V$ complexe. On dira que $(\pi, V)$ est bornée si tous ses coefficients sont bornés. Si $K$ est un sous-groupe de $G$, on note $V^K$ l'espace des vecteurs de $V$ invariants sous $\pi(K)$. On dit qu'une représentation

$(\pi, V)$ est lisse si tout élément $v$ de $V$ appartient à $V^K$ pour un sous-groupe compact ouvert $K$. On dit qu'elle est admissible si elle est lisse et si $V^K$ est de dimension finie pour tout sous-groupe compact ouvert $K$.

Une fonction de $G$ dans $\mathbb{C}$ bi-invariante par un sous-groupe compact ouvert sera dite lisse. On note $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions lisses à support compact qui est aussi l'espace des fonctions localement constantes à support compact.

On note $R$ (resp. $L$) la représentation régulière droite (resp. gauche) de $G$ sur $C^\infty(G)$.

Si $(\pi, V)$ est une représentation lisse de $G$, on définit sa représentation duale $(\pi^*, V^*)$ par la représentation $g \mapsto^t \pi(g^{-1})$ sur le dual algébrique $V^*$ de $V$ et on définit sa contragrédiente $(\check{\pi}, \check{V})$ par la restriction de $\pi^*$ au sous espace $\check{V}$ des éléments de $V^*$ fixés par un sous-groupe ouvert compact.

Si $(\pi, V)$ est une représentation admissible de $G$ et $K$ un sous-groupe ouvert compact de $G$, on définit l'opérateur $\pi(e_K)$ par la formule :

$$\pi(e_K)v := \int_K \pi(k)v \, dk \tag{1.22}$$

où $v \in V$ et $dk$ est la mesure de Haar normalisée de $K$.

Comme $v$ est fixé par un sous-groupe ouvert compact, cette intégrale est une somme finie.

Avec les mêmes hypothèses, pour un élément $\xi$ de $V^{*H}$, on définit l'élément $\pi^*(e_K)\xi$ de $V^{*K} \subset \check{V}$ par :

$$\langle \pi^*(e_K)\xi, v\rangle := \langle \xi, \pi(e_K)v\rangle, \quad v \in V. \tag{1.23}$$

### 1.3.2 Représentations rationnelles.

Soit $\Lambda$ un élément de $Rat(M_0)$, on appelle représentation de plus haut poids $\Lambda$ relativement à $P_0$, une représentation rationnelle de $G$, définie sur $F$, de dimension finie, $(\pi_\Lambda, V_\Lambda)$, irréductible et possédant un vecteur non nul $v_\Lambda$, dit de plus haut poids $\Lambda$, invariant par le radical unipotent $U_0$ de $P_0$ et se transformant par $\Lambda$ sous $M_0$.

Une telle représentation, si elle existe, est unique à isomorphisme près (cf. [Hu] théorème 31.3 (c)). Il résulte du théorème 31.3 (b) de [Hu] que :

Pour tout élément $P_0$-dominant, $a$ de $A_0$, la plus grande des valuations des valeurs propres de $\pi_\Lambda(a)$ est égale à $|\Lambda(a)|_F$. (1.24)

Toujours d'après ce théorème 31.3, on a :

Si $(\pi_\Lambda, V_\Lambda)$ est une représentation de plus haut poids $\Lambda$ relativement à $P_0$, alors sa représentation contragrédiante $(\pi_\Lambda^*, V_\Lambda^*)$ est une représentation de plus haut poids $\Lambda^{-1}$ relativement à $\bar{P}_0$. (1.25)

# 2 Modules de Jacquet et vecteurs-distributions $H$-invariants.

## 2.1

Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ fixé pour ce chapitre 2.
On associe à $\varepsilon > 0$ l'ensemble :

$$A_M^-(\varepsilon) := \{a \in A_M;\ |\alpha(a)|_F \leq \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P)\},$$

Si l'on veut expliciter la dépendance par rapport à $P$, on notera $A_M(P, \leq \varepsilon)$ au lieu de $A_M^-(\varepsilon)$.
On notera $A_M^- := A_M^-(1)$, $A_M^+(\varepsilon) := (A_M^-(\varepsilon))^{-1}$ et $A_M^+ := (A_M^-)^{-1}$.
On dit qu'un sous-groupe ouvert compact $K$ de $G$ admet une factorisation d'Iwahori par rapport à $P$ s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. [C] 1.4) :

a/ l'application produit de $K_{\bar{U}} \times K_M \times K_U$ dans $K$ est une bijection, où $K_{\bar{U}} = K \cap \bar{U}$, $K_M = K \cap M$ et $K_U = K \cap U$ (2.1)
b/ pour tout $a \in A_M^-$, $aK_Ua^{-1} \subseteq K_U$, $a^{-1}K_{\bar{U}}a \subseteq K_{\bar{U}}$.

Tout sous-groupe compact ouvert contient un sous-groupe compact ouvert admettant une factorisation d'Iwahori (cf. [C] proposition 1.4.4). (2.2)

Nous remercions Joseph Bernstein pour nous avoir fourni la démonstration du lemme suivant :

**Lemme 1** *: Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact admettant une factorisation d'Iwahori par rapport à $P$ : $K = K_{\bar{U}}K_MK_U$. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $G$, contenu dans $K \cap K_{\bar{U}}K_MH$.*

*Démonstration:*
Avec la convention (1.1), si $G$ est un groupe algébrique, alors $G$ est un groupe de Lie sur $F$ au sens de Bourbaki (cf. [Bou1] Chapitre III paragraphe 1, définition 1). On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.
La différentielle en $(e, e)$ de la fonction analytique :

$$p : \bar{P} \times H \to G$$
$$(\bar{p}, h) \to \bar{p}h$$

est l'application :

$$\bar{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$
$$(X, Y) \to X + Y$$

Or $\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ (voir [BD] début du paragraphe 2.4), elle est donc surjective. Les propriétés des submersions (cf. [Bou2] 5.9.1 à 5.9.4) nous donnent alors l'existence de deux voisinages de $e$, l'un, $V_1$, dans $\bar{P}$ que l'on peut prendre dans $K_{\bar{U}}K_M$ et l'autre, $V_2$, dans $H$ tels que l'image de $V_1 \times V_2$ par $p$ contienne un voisinage de $e$. Quitte à restreindre, on peut supposer ce dernier contenu dans $K$ et que c'est un sous-groupe compact ouvert. On le note $K'$. □

**Lemme 2** *: Si $K$ est un sous-groupe ouvert compact de $G$, il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $K$ possédant la propriété suivante :*
*Pour toute représentation lisse $(\pi, V)$ de $G$, pour tout élément $\xi$ de $V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$,*

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v\rangle = \langle \pi^*(a)\xi, v\rangle,\ a \in A_M^+,\ k \in K'.$$

*En particulier, pour tout sous-groupe compact ouvert $K'' \subset K'$ :*

$$\langle \pi^*(a)\xi, v\rangle = \langle \pi^*(a)\pi^*(e_{K''})\xi, v\rangle,\ a \in A_M^+, \tag{2.3}$$

*(cf. (1.22) et (1.23) pour les définitions de $\pi(e_{K''})v$ et de $\pi^*(e_{K''})\xi$).*

*Démonstration:*
D'après (2.2), on se ramène au cas où $K$ admet une factorisation d'Iwahori par rapport à $P$, on a alors $K = K_{\bar U} K_M K_U$. D'après le lemme 1, il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $G$ contenu dans $K \cap K_{\bar U} K_M H$. Soit $k \in K'$, et soient $k_{\bar U} \in K_{\bar U}$, $k_M \in K_M$ et $h \in H$ tels que $k = k_{\bar U} k_M h$. Puisque $\xi \in V^{*H}$, on a :

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v\rangle = \langle \pi^*(ak_{\bar U}a^{-1}ak_M a^{-1}a)\xi, v\rangle,\ a \in A_M^+.$$

De plus $ak_Ma^{-1} = k_M \in K_M$ et $ak_{\bar U}a^{-1} \in K_{\bar U}$ car $a \in A_M^+$ donc $ak_Ma^{-1}ak_{\bar U}a^{-1} \in K$. Or $v \in V^K$, donc :

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v\rangle = \langle \pi^*(a)\xi, v\rangle,\ a \in A_M^+.$$

□

On déduit du lemme 12 de l'appendice que :

> Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$. Si $\varphi$ est une fonction de $A_M$ dans $\mathbb{C}$, lisse et $A_M$-finie, elle est entièrement déterminée par sa restriction à $A_M^-(\varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$.
> Si de plus $A_\emptyset \subset M$ et si $\varphi$ est une fonction définie sur $A_M \cap A_\emptyset$, lisse et $A_M \cap A_\emptyset$-finie, alors elle est déterminée par sa restriction à $A_M^-(\varepsilon) \cap A_\emptyset$ pour un $\varepsilon > 0$. (2.4)

Si $(\pi, V)$ est une représentation admissible de $G$, tout vecteur est $A_G$-fini. En effet, si $v$ est élément de $V$, il existe un sous-groupe ouvert compact $K$ de $G$ tel que $v$ soit élément de $V^K$. Alors, pour tout élément $a$ de $A_G$, $\pi(a)v$ est élément de $V^K$ et comme $(\pi, V)$ est admissible, la dimension de $V^K$ est finie.
Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$, notons $(\pi_P, V_P)$ le module de Jacquet de $V$ relativement à $P$, où $V_P := V/V(P)$, avec $V(P) := \langle \pi(u)v - v,\ v \in V,\ u \in U\rangle$, et $j_P : V \to V_P$ la projection naturelle. On munit $V_P$ de la représentation $\pi_P$ de $M$ définie par $\pi_P(m)j_P(v) := \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v)$ pour tout $m \in M$, $v \in V$. Elle est admissible, donc, d'après ce qui précède:

Tout vecteur $v_P \in V_P$ est $A_M$-fini. (2.5)

Soit $(\check\pi, \check V)$ la contragrédiente de $(\pi, V)$, on note $((\check\pi)_{\bar P}, (\check V)_{\bar P})$ le module de Jacquet de $\check V$ relativement à $\bar P$ et $\check j_{\bar P} : \check V \to (\check V)_{\bar P}$ la projection naturelle. Alors, (cf. [C], voir aussi

[Wald], théorème I.4.1), il existe un crochet de dualité canonique entre $\check{V}_{\bar{P}}$ et $V_P$ noté $\langle .,.\rangle_P$ qui vérifie :

$$\begin{gathered}\text{Pour tout } (v,\check{v}) \in V \times \check{V}, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que :}\\ \langle \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}), \pi_P(a) j_P(v)\rangle_P = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \check{v}, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon).\end{gathered} \tag{2.6}$$

D'autre part,

Pour tout $\check{v}_{\bar{P}} \in \check{V}_{\bar{P}}$ et pour tout $v_P \in V_P$, la fonction de $A_M$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$a \mapsto \langle \check{v}_{\bar{P}}, \pi_P(a) v_P\rangle_P \tag{2.7}$$

est lisse et $A_M$-finie.

Le théorème suivant est une extension aux coefficients généralisés du théorème 4.3.3 de [C] pour les coefficients.

**Théorème 1** *: Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique.*
*(i) Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$ et soit $\xi \in V^{*H}$. Alors il existe un unique $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M\cap H}$ vérifiant :*

$$\begin{gathered}\textit{Pour tout } v \in V, \textit{ il existe } \varepsilon > 0 \textit{ tel que :}\\ \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon).\end{gathered} \tag{2.8}$$

*De plus, on peut choisir $\varepsilon$ indépendamment de $\xi \in V^{*H}$.*
*(ii) Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact de $G$. Soit $K' \subset K$ un sous-groupe ouvert compact satisfaisant aux conditions du lemme 2. Alors pour toute représentation admissible $(\pi, V)$ de $G$, pour tout élément $\xi$ de $V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on a :*

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M.$$

*Démonstration:*

(i) Soient $j_P^*(\xi)$ et $j_P^*(\xi)'$ deux éléments de $(V_P^*)^{M\cap H}$ vérifiant (2.8). Soit $v \in V$, alors la fonction $\psi_v$ de $A_M$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\psi_v(a) = \langle j_P^*(\xi)' - j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle$$

est une fonction lisse $A_M$-finie nulle sur $A_M^-(\varepsilon)$ pour $\varepsilon$ assez petit. Elle est donc nulle d'après le résultat (2.4). On a donc $\psi_v(e) = 0$ et ceci pour tout $v \in V$; d'où l'unicité de $j_P^*(\xi)$ s'il existe.

Soit $v \in V$, on va définir $\langle j_P^*(\xi), j_P(v)\rangle$.

On va montrer qu'il existe une unique application, $\varphi_v$, définie sur $A_M$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, lisse et $A_M$-finie valant $\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle$ pour $a \in A_M^-(\varepsilon)$ pour au moins un $\varepsilon > 0$. On définira alors $\langle j_P^*(\xi), j_P(v)\rangle$ comme étant la valeur en $e$ (élément neutre du groupe $G$) de $\varphi_v$. Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact admettant une factorisation d'Iwahori par rapport à $P$ et tel que $v \in V^K$ ($K$ existe d'après (2.2)), et soit $K'$ comme dans le lemme 2.

Vérifions l'existence de $\varphi_v$. D'après le lemme 2,

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-. \tag{2.9}$$

D'après [Wald], théorème I.4.1 (cf. (2.6)), il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M^-(\varepsilon). \tag{2.10}$$

On déduit de (2.9) et (2.10) que :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M^-(\varepsilon). \tag{2.11}$$

La fonction définie par :

$$\varphi_v(a) := \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M \tag{2.12}$$

vérifie :

$$\varphi_v(a) = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon). \tag{2.13}$$

Donc $\varphi_v$ convient car elle est lisse et $A_M$-finie d'après (2.5). Cette fonction est unique d'après le résultat (2.4).

Pour $P$ et $\xi$ fixés, on voit sur la formule (2.12) qu'elle ne dépend que de $j_P(v)$.

On remarque grâce au lemme 2 équation (2.3) que l'on peut remplacer $K'$ par un quelconque de ses sous-groupes compacts ouverts dans la définition de $\varphi_v$. (2.14)

L'unicité de $\varphi_v$ permet de définir une application $j_P^*(\xi)$ de $V_P$ dans $\mathbb{C}$ qui, à $j_P(v)$, associe $\varphi_v(e)$, pour $v$ élément de $V$. L'application $j_P^*(\xi)$ est linéaire grâce à (2.12) et (2.14) qui impliquent : $\varphi_{v+v'} = \varphi_v + \varphi_{v'}$, $v, v' \in V$. Montrons que $j_P^*(\xi) \in (V_P^*)^{M\cap H}$.

Si $m \in M \cap H$, pour $\varepsilon' > 0$ assez petit,

$$\varphi_v(a) = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon').$$

$$\varphi_{\pi(m)v}(a) = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(am)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon').$$

Or $a$ et $m$ commutent et $m \in M \cap H$, donc :

$$\varphi_{\pi(m)v}(a) = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \pi^*(m^{-1})\xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon').$$

Comme $m$ est élément de $M \cap H$, les applications $\varphi_v$ et $\varphi_{\pi(m)v}$ coincident sur $A_M^-(\varepsilon')$. Comme $\varphi_v$ et $\varphi_{\pi(m)v}$ sont toutes deux lisses et $A_M$-finies, on déduit du résultat (2.4) que $\varphi_v(e) = \varphi_{\pi(m)v}(e)$. Comme $\delta_P \in X(M)_\sigma$, d'après (1.18), on a $\delta_P(m) = 1, \quad m \in M\cap H$. On en déduit que $j_P^*(\xi) \in (V_P^*)^{M\cap H}$.

Montrons que, pour $\varepsilon$ comme dans (2.10), on a (2.8). On a par définition de $j_P^*(\xi)$ :

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle = \delta_P(a)^{-1/2}\varphi_{\pi(a)v}(e), \quad a \in A_M. \tag{2.15}$$

Montrons que :

$$\varphi_{\pi(a')v}(a) = \delta_P(a')^{1/2}\varphi_v(aa'),\ \ a, a' \in A_M,\ v \in V. \tag{2.16}$$

D'après (2.12) et (2.14), pour tout sous-groupe compact ouvert assez petit $K''$, on a :

$$\varphi_v(a) = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\pi(a')v}(a) &= \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(a)j_P(\pi(a')v)\rangle_P,\ a, a' \in A_M \\ &= \delta_P(a')^{1/2}\langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(aa')j_P(v)\rangle_P,\ a, a' \in A_M.\end{aligned}$$

D'où (2.16). Finalement :

$$\varphi_{\pi(a)v}(e) = \delta_P(a)^{1/2}\varphi_v(a).$$

Donc, d'après (2.15) :

$$\begin{aligned}\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle &= \varphi_v(a) \\ &= \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de (2.13). Donc $j_P^*(\xi)$ vérifie (2.8).
(ii) D'après (2.11), il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon_1).$$

Et d'après le théorème 1 (i), il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle,\ a \in A_M^-(\varepsilon_2).$$

En posant $\varepsilon := min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on obtient :

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle_P,\ a \in A_M^-(\varepsilon).$$

D'après le résultat (2.4), on a donc l'égalité sur $A_M$. □

On suppose que $A_\emptyset \subset M$ ce qui équivaut à $A_\emptyset \subset P$ car $A_\emptyset$ est $\sigma$-stable.

**Corollaire 1** *: Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique.*
*(i) On suppose que $(\pi, V)$ est une représentation admissible de $G$ et soit $\xi \in V^{*H}$. Pour tout $v \in V$, $a \mapsto \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v)\rangle$ est l'unique fonction sur $A_M \cap A_\emptyset$ à valeurs complexes, lisse, $A_M \cap A_\emptyset$-finie qui soit égale à $\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle$ sur $A_M^-(\varepsilon) \cap A_\emptyset$ pour au moins un $\varepsilon > 0$.*
*(ii) Plus généralement, on a le même résultat en remplaçant, dans l'énoncé de (i), $A_\emptyset$ par un tore $\sigma$-déployé maximal contenu dans $M$.*

*Démonstration:*
La fonction considérée vérifie l'égalité voulue d'après le théorème 1. L'unicité provient du résultat (2.4), (i) en résulte. Le choix de $A_\emptyset$ (précedant l'équation (1.16)) étant indifférent, (ii) est immédiat. □

Soit $K$ un sous-groupe compact ouvert de $G$ totalement décomposé relativement à $M_0$ au sens de [Bu], section 1.1. On note $\Lambda^-(P, K)$ l'ensemble des éléments strictement $P$-anti-dominants de $A_M$ (i.e dans $A_M^-$), qui sont $(P, K)$ positifs au sens de [Bu], section 3.1. Les propriétés importantes de ces notions sont :

- L'ensemble $\Lambda^-(P,K)$ est non vide (cf. [BuK], lemma (6.14) et l'observation de la fin de la preuve).
- Les sous-groupes compacts ouverts totalement décomposés relativement à $M_0$ forment une base de voisinage de l'élément neutre de $G$ (cf. [Bu], lemma 1).

Le résultat suivant, du à J. Bernstein (cf. [B], III.3.3, lemme 31), est une forme renforcée d'un résultat de Casselman [C] (cf. (2.6)). C'est une conséquence de son théorème de stabilisation (cf. [B], III.3.3, théorème 22, voir [Bu], théorème 1 pour une preuve publiée) et de la description du crochet de dualité $\langle .,. \rangle_P$ entre $V_P$ et $\check{V}_{\bar{P}}$ (cf. [Bu], section 5 et [C], voir (2.6)) :

Soit $K$ un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé relativement à $M_0$ et soit $\lambda \in \Lambda^-(P,K)$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,
Pour toute représentation lisse de $G$, $(\pi, V)$, pour tout $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$ invariants par $K$ : (2.17)

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2}\langle \check{v}, \pi(\lambda^n)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle_P, \quad n \geq n_0.$$

On établit le résultat suivant en vue d'une application analogue à celle du lemme 9 de [BD].

**Proposition 1** *: Soit $K$ un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé relativement à $M_0$ et $\lambda \in \Lambda^-(P,K)$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,*
*Pour toute représentation admissible $(\pi, V)$ de $G$, pour tout $\xi \in V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on ait :*

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2}\langle \xi, \pi(\lambda^n)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle, \quad n \geq n_0.$$

*Démonstration:*
D'après le lemme 2, il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $K$ tel que :
pour tout sous-groupe compact ouvert $K'' \subset K'$, pour toute représentation admissible $(\pi, V)$ de $G$, pour tout élément $\xi$ de $V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$,

$$\langle \xi, \pi(\lambda^n)v\rangle = \langle \pi^*(e_{K''})\xi, \pi(\lambda^n)v\rangle, \ \lambda \in A_M^-. \tag{2.18}$$

D'après [Bu], lemme 1, on peut prendre $K''$ totalement décomposé, ce que l'on fait. Alors, pour tout $v \in V^K$ et tout $\xi \in V^{*H}$, $v$ et $\pi^*(e_{K''})\xi$ sont invariants par $K''$, on peut donc appliquer le résultat (2.17). Donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de $K''$, donc de $K$, et de $\lambda$ tel que :

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2}\langle \pi^*(e_{K''})\xi, \pi(\lambda^n)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle_P, \quad n \geq n_0. \tag{2.19}$$

D'après (2.18) et (2.19), et comme $\Lambda^-(P,K) \subset A_M^-$, on en déduit que pour toute représentation admissible $(\pi, V)$ de $G$, pour tout $\xi \in V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2}\langle \xi, \pi(\lambda^n)v\rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle_P, \quad n \geq n_0.$$

Or d'après le théorème 1 (ii), et en remarquant que $K''$ satisfait aux hypothèses du lemme 2, on a :

$$\langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle_P = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v)\rangle, \quad \lambda \in A_M. \tag{2.20}$$

La propriété résulte des équations (2.19) et (2.20). $\square$

## 2.2 Terme constant de fonctions sur $G/H$.

Considérons l'espace :

$$C^\infty(G/H) = \cup_K C(K \setminus G/H),$$

où $K$ parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $G$ et où $C(K \setminus G/H)$ est l'ensemble des fonctions sur $G/H$ invariantes à gauche par $K$.

Le groupe $G$ agit sur $C^\infty(G/H)$ par la représentation régulière gauche $L$.

Pour toute représentation admissible $(\pi, V_\pi)$ de $G$ et tout $\xi \in (V_\pi^*)^H$, notons $\mathcal{A}(\pi, \xi)$ le sous espace de $C^\infty(G/H)$ engendré par les fonctions $c_{\xi,v} : gH \mapsto \langle \pi^*(g)\xi, v\rangle$, $v \in V_\pi$.

Posons :

$$\mathcal{A}(G/H) := \bigcup_{(\pi,\xi)} \mathcal{A}(\pi, \xi), \tag{2.21}$$

où $\pi$ parcourt les représentations admissibles de $G$ et $\xi \in (V_\pi^*)^H$.

En utilisant les sommes directes de représentations, on voit que :

$$\mathcal{A}(G/H) = \sum_{(\pi,\xi)} \mathcal{A}(\pi, \xi). \tag{2.22}$$

où $\pi$ parcourt les représentations admissibles de $G$ et $\xi \in (V_\pi^*)^H$.

Le sous-espace $\mathcal{A}(G/H)$ de $C^\infty(G/H)$ est invariant par la représentation régulière gauche $L$.

On note que si $f \in \mathcal{A}(G/H)$, $f$ est $A_G$-finie (cf. (2.5)).

**Remarque 1** *: On peut se limiter à ce que $\pi$ parcourt les représentations admissibles de type fini de $G$ et $\xi \in (V_\pi^*)^H$ car tout vecteur d'une représentation admissible engendre une représentation admissible de type fini.*

**Proposition 2** *: (i) Si $f$ est un élément de $\mathcal{A}(G/H)$, il existe un unique élément $f_P$ de $\mathcal{A}(M/M \cap H)$ vérifiant la propriété suivante :*

*Pour tout $m \in M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A_M^+(\varepsilon)$, on ait l'égalité :*

$$\delta_P(ma)^{1/2} f(maH) = f_P(ma(M \cap H)).$$

*On appele $f_P$ terme constant de $f$ le long de $P$.*

*(ii) L'application $f \mapsto f_P$ de $\mathcal{A}(G/H)$ dans $\mathcal{A}(M/M \cap H)$ est linéaire.*

*(iii) Si $(\pi, V_\pi)$ est une représentation admissible de $G$, si $\xi \in (V_\pi^*)^H$, si $v \in V_\pi$, et si $f = c_{\xi,v}$, alors :*

$$f_P(m(M \cap H)) = \langle \pi_P^*(m) j_P^*(\xi), j_P(v)\rangle, \quad m \in M.$$

*Démonstration:*
Prouvons (i) et (iii). Soit $f \in \mathcal{A}(G/H)$, supposons que deux éléments $f_P$ et $f'_P$ de $\mathcal{A}(M/M\cap H)$ vérifient les conditions de la proposition.
Pour tout $m \in M$, les fonctions sur $A_M$ :

$$a \mapsto f_P(ma(M\cap H)) \text{ et } a \mapsto f'_P(ma(M\cap H))$$

coincident sur $A_M^+(\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Le fait qu'elles soient toutes deux lisses et $A_M$-finies assure alors leur égalité d'après le résultat (2.4). D'où l'unicité de $f_P$ s'il existe.
Si $f = c_{\xi,v}$, la fonction définie par $f_P(m(M\cap H)) = \langle \pi_P^*(m)j_P^*(\xi), j_P(v)\rangle$ convient d'après le théorème 1.
Dans le cas où $f$ est un élément quelconque de $\mathcal{A}(G/H)$, l'existence de $f_P$ est claire par linéarité. Ceci achève de prouver (i) et (iii). La linéarité de (ii) résulte de l'unicité dans (i). □

Soit $(\delta, V_\delta)$ une représentation lisse de $M$. On étend l'action de $M$ à $P$ en la prenant triviale sur $U$. On considère l'ensemble $ind_P^G V_\delta$ des $\varphi : G \to V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\delta(m^{-1})\varphi(g), \;\; g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe $G$ agit par la représentation régulière gauche $L$ sur $ind_P^G V_\delta$.

**Lemme 3** *: Pour $f \in \mathcal{A}(G/H)$, on définit l'application :*

$$f_P^{ind} : G \to \mathcal{A}(M/M\cap H).$$
$$g \mapsto (L_{g^{-1}}f)_P$$

*Alors $f_P^{ind} \in ind_P^G \mathcal{A}(M/M\cap H)$.* (2.23)

*Démonstration:*
Par linéarité, on se ramène à $f = c_{\xi,v}$, où $v \in V$, $\xi \in V^{*H}$ et $(\pi, V)$ est une représentation admissible de type fini de $G$. Pour $g_1 \in G$ :

$$(f_P^{ind}(g_1))(m(M\cap H)) = \langle \pi_P^*(m)j_P^*(\xi), j_P(\pi(g_1^{-1})v)\rangle.$$

Montrons que $f_P^{ind}(g_1mu) = \delta_P^{-1/2}(m)L_{m^{-1}}f_P^{ind}(g_1)$, $g_1 \in G$, $m \in M$, $u \in U$.
Cela revient à montrer que pour $m' \in M$ :

$$(f_P^{ind}(g_1mu))(m'(M\cap H)) = \delta_P^{1/2}(m^{-1})(L_{m^{-1}}f_P^{ind}(g_1))(m'(M\cap H)). \tag{2.24}$$

On a :

$$\begin{aligned}(f_P^{ind}(g_1mu))(m'(M\cap H)) &= \langle \pi_P^*(m')j_P^*(\xi), j_P(\pi(u^{-1}m^{-1}g_1^{-1})v)\rangle \\ &= \langle \pi_P^*(m')j_P^*(\xi), j_P(\pi(m^{-1}g_1^{-1})v)\rangle \\ &= \delta_P^{1/2}(m^{-1})\langle \pi_P^*(m')j_P^*(\xi), \pi_P(m^{-1})j_P(\pi(g_1^{-1})v)\rangle \\ &= \delta_P^{1/2}(m^{-1})\langle \pi_P^*(mm')j_P^*(\xi), j_P(\pi(g_1^{-1})v)\rangle \\ &= \delta_P^{1/2}(m^{-1})(f_P^{ind}(g_1))(mm'(M\cap H))\end{aligned}$$

d'où (2.24). Le lemme en résulte. □

## 2.3 Comportements asymptotiques de certains coefficients généralisés de représentations admissibles.

On rappelle qu'on a fixé $A_\emptyset$, un tore $\sigma$-déployé maximal de $G$, et $P_\emptyset$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal contenant $A_\emptyset$.

Soit $\Sigma(G, A_\emptyset)$ l 'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $G$. Alors $\Sigma(G, A_\emptyset)$ est un système de racines dont le groupe de Weyl s'identifie au quotient du normalisateur dans $G$ de $A_\emptyset$, $N_G(A_\emptyset)$, par son centralisateur $Z_G(A_\emptyset)$ ( cf. [HWan], Prop. 5.9).

On note $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$. On note $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Si $\Theta$ est une partie de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, on note $\langle\Theta\rangle_\emptyset$ le sous-système de $\Sigma(G, A_\emptyset)$ engendré par $\Theta$, et $P_\Theta$ le sous-groupe parabolique de $G$ pour lequel $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset) \cup \langle\Theta\rangle_\emptyset$ est l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\Theta$. Alors :

$$P_\Theta \text{ contient } P_\emptyset \text{ et } P_\Theta \text{ est un } \sigma\text{-sous-groupe parabolique de } G, \tag{2.25}$$

en effet, comme les éléments de $A_\emptyset$ sont anti-invariants par $\sigma$, l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $\sigma(P_\Theta)$ est égal à l'ensemble des opposés des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\Theta$.

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, on note pour $P = P_\Theta$ :

$$A_\emptyset^-(P, < \varepsilon) := \{a \in A_\emptyset^-;\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \text{ racine de } A_\emptyset \text{ dans } U_P\}. \tag{2.26}$$

Comme $\varepsilon \leq 1$, on a l'égalité :

$$A_\emptyset^-(P, < \varepsilon) = \{a \in A_\emptyset^-;\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta\}. \tag{2.27}$$

Elle résulte immédiatement du fait que si $\alpha$ est une racine de $A_\emptyset$ dans $U_P$, $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} n_\beta \beta$, $n_\beta \in \mathbb{N}$, alors il existe $\beta_0 \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta$ tel que $n_{\beta_0} \neq 0$.
Ceci est cohérent avec les notations de l'introduction au sous-chapitre 0.3.

On définit $A_0^-(P, < \varepsilon) := \{a \in A_0^-;\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \text{ racine de } A_0 \text{ dans } U_P\}$.

On suppose, pour la suite de ce sous-chapitre 2.3, que $P$ contient $A_\emptyset$.

**Théorème 2** *: Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$. Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\xi \in V^{*H}$,*

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle,\ a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

*En d'autres termes, si $f$ est l'élément de $\mathcal{A}(G/H)$ défini par $f = c_{\xi,v}$, alors :*

$$\delta_P(a)^{-1/2} f(a^{-1}H) = f_P(a^{-1}(M \cap H)),\ a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

*On peut remplacer $P$ par un $\sigma$-sous-groupe parabolique quelconque et $A_\emptyset$ par un tore $\sigma$-déployé maximal contenu dans $P$.*

*Démonstration:*
Soient $v \in V$ et $K$ un sous-groupe compact ouvert tel que $v \in V^K$. On applique le lemme 2 à $P = P_\emptyset$. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert $K'$ de $K$, tel que :

$$\langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle, \ a \in A^-_{M_\emptyset}.$$

Or $A^-_\emptyset \subset A^-_{M_\emptyset}$. Donc on a :

$$\langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle, \ a \in A^-_\emptyset. \tag{2.28}$$

D'après [C], théorème 4.3.3, il existe $0 < \varepsilon \leq 1$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle_P, \ a \in A^-_0(P, < \varepsilon). \tag{2.29}$$

Donc d'après (2.28) et (2.29) :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle_P, \ a \in A^-_0(P, < \varepsilon) \cap A^-_\emptyset. \tag{2.30}$$

On a de plus l'égalité : $A^-_0(P, < \varepsilon) \cap A^-_\emptyset = A^-_\emptyset(P, < \varepsilon)$, d'où :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle_P, \ a \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon). \tag{2.31}$$

Pour $a \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon)$ fixé, la fonction définie sur $A_M \cap A_\emptyset$ par :

$$b \mapsto \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba) j_P(v) \rangle_P$$

est une fonction lisse et $A_M \cap A_\emptyset$-finie. Or, pour $b \in A^-_M \cap A_\emptyset$ et $a \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon)$, on a $ba \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon)$. Donc, d'après (2.31) appliqué à $ba \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon)$ au lieu de $a$, on a l'égalité :

$$\delta_P(ba)^{-1/2} \langle \xi, \pi(ba)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba) j_P(v) \rangle_P, \ b \in A^-_M \cap A_\emptyset.$$

D'après le corollaire 1 du théorème 1 appliqué à $v' := \pi(a)v$, on a alors :

$$\langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba) j_P(v) \rangle_P = \langle j^*_P(\xi), \pi_P(ba) j_P(v) \rangle, \ b \in A^-_M \cap A_\emptyset, \ a \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon).$$

En joignant (2.31) à cette dernière égalité appliquée à $b = e$, on obtient :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j^*_P(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle, \ a \in A^-_\emptyset(P, < \varepsilon).$$

$\square$

## 2.4 $\sigma$-sous-groupes paraboliques.

Donnons d'autres caractérisations des $\sigma$-sous-groupes paraboliques.

Soient $A$ un tore déployé de $G$, et $\lambda \in \Lambda(A)$. On note $P_\lambda$ le sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A$ pour lequel les poids $\alpha$ de $A$ dans l'algèbre de Lie de $P_\lambda$ vérifient $|\alpha(\lambda)|_F \geq 1$.

On a une dualité :

$$Rat(A) \times X_*(A) \to \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \underline{\lambda}) \mapsto \langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle$$

caractérisée par : $\alpha \circ \underline{\lambda}(\varpi) = \varpi^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}$

On note $P(\underline{\lambda})$ le sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A$ dont les racines de $A$ dans son algèbre de Lie sont les $\alpha \in \Sigma(G, A)$ tels que $\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle \geq 0$.

**Remarque 2** *: $P(\underline{\lambda}) = P_\lambda$, où $\lambda := \underline{\lambda}(\varpi)$.*

En effet, $P(\underline{\lambda})$ et $P_\lambda$ sont deux sous-groupes paraboliques de $G$, donc il suffit de montrer qu'ils ont la même algèbre de Lie. Mais :

$$|\alpha(\lambda)|_F = |\alpha(\underline{\lambda}(\varpi))|_F = |\varpi^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}|_F = |\varpi|_F^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}$$

Donc :

$$|\alpha(\lambda)|_F \geq 1 \Leftrightarrow \langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle \geq 0.$$

D'où la remarque.

**Lemme 4** *: Soient $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$, $M = P \cap \sigma(P)$ son sous-groupe de Levi $\sigma$-stable et $A_{M,\sigma}$ le plus grand tore $\sigma$-déployé du centre de $M$. Il existe $\lambda \in \Lambda(A_{M,\sigma})$ tel que $P = P_\lambda$. Alors $M$ est égal au centralisateur dans $G$ de $\lambda$.*

*Démonstration:*

D'après [HWan] lemme 4.6 et en tenant compte de (1.13), il existe $\underline{\lambda} \in X_*(A)$ tel que $\sigma(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}^{-1}$, $P = P(\underline{\lambda})$ et $M = Z_G(\underline{\lambda})$.

Comme $M = Z_G(\underline{\lambda})$, $\lambda := \underline{\lambda}(\varpi)$ est un élément de $\Lambda(A_{M,\sigma})$. D'après la remarque 2, on a $P = P_\lambda$. Clairement $Z_G(\underline{\lambda}) \subset Z_G(\lambda)$. Par ailleurs, comme $\sigma(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}^{-1}$, on a $\sigma(\lambda) = \lambda^{-1}$. De plus, $Z_G(\lambda) = Z_G(\lambda^{-1})$ et $\sigma(P_\lambda) = P_{\lambda^{-1}}$. Donc $Z_G(\lambda) \subset P_\lambda \cap \sigma(P_\lambda) = M = Z_G(\underline{\lambda})$. Finalement $Z_G(\lambda) = Z_G(\underline{\lambda})$. $\square$

**Lemme 5** *: (i) Si $\lambda \in \Lambda(A_\emptyset)$ est $P_\emptyset$-dominant, i.e. $|\alpha(\lambda)|_F \geq 1, \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $P_\lambda = P_\Theta$, où $\Theta = \{\alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset); |\alpha(\lambda)|_F = 1\}$.*

*(ii) Tout $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$ est de la forme $P_\Theta$ pour $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$.*

*(iii) Tout $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ est conjugué par un élément de $H$ à un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ de la forme $x_i w.P_\Theta$, $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $w \in W(A_\emptyset)$, $i \in I$ (cf. 1.2 pour définition de $I$).*

On peut remplacer $A_\emptyset$ par n'importe quel tore $\sigma$-déployé maximal et $P_\emptyset$ par n'importe quel $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ le contenant dans les trois premières assertions.

*Démonstration:*

(i) est clair.

Montrons (ii) : soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$. D'après le lemme 4, il est de la forme $P_\mu$ pour $\mu$ élément de $\Lambda(A_{M,\sigma})$. Or $A_{M,\sigma}$ est contenu dans un tore $\sigma$-déployé maximal $A'_\emptyset$ de $G$, donc $\mu \in \Lambda(A'_\emptyset)$. Comme $A_\emptyset$ et $A'_\emptyset$ sont $\sigma$-stable, ils sont contenus dans $M = P \cap \sigma(P)$. Alors $A_\emptyset$ et $A'_\emptyset$ sont deux tores $\sigma$-déployés maximaux de $M$, donc conjugués par un élément $m$ de $M$ (cf. [HH] proposition 1.16). Posant $\lambda = m\mu m^{-1}$, on a $\lambda \in \Lambda(A_\emptyset)$. Et $P_\lambda = m.P_\mu = P$ car $m \in M$. Enfin, comme $P$ contient $P_\emptyset$, l'élément $\lambda$ de $\Lambda(A_\emptyset)$ doit être $P_\emptyset$-dominant. Alors (ii) résulte de (i).

On montre (iii) en reprenant les notations de 1.2. Soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$, alors $P$ est conjugué par un élément de $H$ à un sous-groupe parabolique de $G$ de la forme $P_\lambda$, pour un élément $\lambda$ de $\Lambda(A_i)$. Soit $\mu \in \Lambda(A_\emptyset)$ tel que $\lambda = x_i\mu x_i^{-1}$; alors $P = P_\lambda = x_i.P_\mu$. Alors il existe $\nu \in \Lambda(A_\emptyset)$ qui est $P_\emptyset$-dominant, et $w \in W(A_\emptyset)$ tel que $w\nu = \mu$ et $x_i.P_\mu = x_i w.P_\nu$.

D'après (i), il existe $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ tel que $P_\nu = P_\Theta$ ; alors $P = x_i w.P_\Theta$ d'où (iii). $\square$

## 2.5 Transitivité du terme constant.

**Théorème 3** *: Soient $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_\emptyset$ et $Q$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $M$ contenant $A_\emptyset$. On pose $P_Q := QU$ de sorte que $P_Q$ est un sous-groupe parabolique de $G$ contenu dans $P$. Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$ et soit $\xi \in V^{*H}$, alors $j^*_{P_Q}(\xi) = j^*_Q(j^*_P(\xi))$.*

*Démonstration:*

Soit $P_{\emptyset,M}$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal de $M$ contenant $A_\emptyset$ et contenu dans $Q$. Alors $P_{\emptyset,M}U$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal de $G$. Notre choix de $P_\emptyset$ contenant $A_\emptyset$ étant indifférent, on peut supposer $P_{\emptyset,M}U$ égal à $P_\emptyset$. Alors $P_{\emptyset,M} = P_\emptyset \cap M$. On pose $\Delta_G := \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Delta_M := \Delta(P_{\emptyset,M}, A_\emptyset)$, $P = P_{\Theta_P}$ avec $\Theta_P \subset \Delta_G$ et $Q = P_{\Theta_Q}$ avec $\Theta_Q \subset \Delta_M$. Alors :

$$\Theta_P = \Delta_M \text{ et donc } \Theta_Q \subset \Theta_P. \tag{2.32}$$

Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$. Soient $\xi \in V^{*H}$ et $v \in V$, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\langle j^*_Q(j^*_P(\xi)), \pi_{P_Q}(a) j_{P_Q}(v)\rangle = \delta_{P_Q}(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\ a \in A^-_\emptyset(P_Q, < \varepsilon). \tag{2.33}$$

En remarquant que $j_{P_Q}(v) = j_Q(j_P(v))$, on a :

$$\langle j^*_Q(j^*_P(\xi)), \pi_{P_Q}(a) j_{P_Q}(v)\rangle = \langle j^*_Q(j^*_P(\xi)), \pi_Q(a) j_Q(j_P(v))\rangle.$$

On remarque que dans le théorème 2, on peut prendre $\varepsilon \leq 1$. Alors, d'après (2.27) et en appliquant le théorème 2 au sous-groupe parabolique $Q$ de $M$, à la représentation admissible de $M$, $(\pi_P, V_P)$, et à $j^*_P(\xi) \in (V_P)^{*M\cap H}$, on trouve qu'il existe $0 < \varepsilon' \leq 1$ tel que :

$$\begin{gathered}\langle j^*_Q(j^*_P(\xi)), \pi_Q(a) j_Q(j_P(v))\rangle = \delta_Q(a)^{-1/2}\langle j^*_P(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle, \\ a \in A_\emptyset,\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon',\ \alpha \in \Delta_M \setminus \Theta_Q \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1,\ \alpha \in \Delta_M.\end{gathered} \tag{2.34}$$

En appliquant d'autre part le théorème 2 au sous-groupe parabolique $P$ de $G$, à $(\pi, V)$, la représentation admissible de $G$, et à $\xi \in V^{*H}$, on trouve qu'il existe $0 < \varepsilon'' \leq 1$ tel que :

$$\begin{aligned}&\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\\ &a \in A_\emptyset,\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon'',\ \alpha \in \Delta_G \setminus \Theta_P \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1,\ \alpha \in \Delta_G.\end{aligned} \tag{2.35}$$

D'après (2.32), on déduit de (2.34) et de (2.35) que :

$$\begin{aligned}&\langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_Q(a) j_Q(j_P(v))\rangle = \delta_Q(a)^{-1/2}\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle,\\ &a \in A_\emptyset,\ |\alpha(a)|_F < min(\varepsilon', \varepsilon''),\ \alpha \in \Delta_G \setminus \Theta_Q, |\alpha(a)|_F \leq 1,\ \alpha \in \Delta_G.\end{aligned} \tag{2.36}$$

L'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de $P_Q$ est, par définition de $P_Q$, la réunion disjointe de l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $U_P$ et dans celle de $U_Q$. Donc :

$$\delta_{P_Q}(a) = \delta_Q(a)\delta_P(a), \quad a \in A_\emptyset.$$

D'où (2.33) en posant $\varepsilon := min(\varepsilon', \varepsilon'')$.
Or $A^-_{M_{P_Q}}(\varepsilon) = A^-_{M_Q}(\varepsilon) := \{a \in A_{M_Q} |\, |\alpha(a)|_F \leq \varepsilon,\ \alpha \in \Delta_G \setminus \Theta_Q\}$.
Donc $A^-_{M_{P_Q}}(\varepsilon) \subset A^-_\emptyset(P_Q, < \varepsilon)$. En particulier, d'après le théorème 1,

$$j^*_{P_Q}(\xi) = j_Q^*(j_P^*(\xi)).$$

□

On reprend les notations du théorème précédent.

**Corollaire 1** *: Soit $f$ un élément de $\mathcal{A}(G/H)$, alors $f_P$ est élément de $\mathcal{A}(M/M \cap H)$, et on peut considérer $(f_P)_Q$ élément de $\mathcal{A}(M_Q/M_Q \cap H)$. De plus, $f_{P_Q} = (f_P)_Q$.*

## 2.6 Vecteurs distributions $H$-invariants cuspidaux.

**Définition 1** *: Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$ et soit $\xi \in V^{*H}$, on dira que la paire $(\pi, \xi)$ est $H$-cuspidale si pour tout $\sigma$-sous-groupe parabolique $P$ de $G$, distinct de $G$, $j_P^*(\xi) = 0$.*

**Proposition 3** *: La paire $(\pi, \xi)$ est $H$-cuspidale si et seulement si pour tout $\sigma$-sous-groupe parabolique $P$ de $G$, distinct de $G$, égal à l'un des $x_i w.P_\Theta$, pour un $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, un $w \in W(A_\emptyset)$ et un $i \in I$ (voir notations en 1.1), $j_P^*(\xi) = 0$.*

*Démonstration:*

Supposons que pour tout $\sigma$-sous-groupe parabolique $P$ de $G$ distinct de $G$ égal à l'un des $x_i w.P_\Theta$, pour un $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, un $w \in W(A_\emptyset)$ et un $i \in I$, on ait : $j_P^*(\xi) = 0$. Soit $P \neq G$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$, alors d'après le lemme 5 (iii), il existe $h \in H$, $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Theta \neq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $w \in W(A_\emptyset)$ et $i \in I$ tels que $h.P = x_i w.P_\Theta$. Et donc $j^*_{h.P}(\xi) = 0$.

On note $\bar{v}$ la classe d'un élément $v \in V$ dans $V_P := V/V(P)$ et $[v]$ sa classe dans $V_{h.P} := V/V(h.P)$.
On considère l'application :

$$T_h : V_P \to V_{h.P}$$
$$j_P(v) \mapsto j_{h.P}(\pi(h)v)$$

$T_h$ est bien définie, de plus, c'est un isomorphisme car $V(h.P) = \pi(h)V(P)$. En utilisant le théorème 1, on montre par transport de structure que :

$$T_h^*(j_{h.P}^*(\xi)) = j_P^*(\xi).$$

Mais $j_{h.P}^*(\xi) = 0$ donc $j_P^*(\xi) = 0$. □

**Proposition 4** *: Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de $G$, soit $\xi \in V^{*H}$, et soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique minimal de $G$ parmi ceux tels que $j_P^*(\xi) \neq 0$, alors $(\pi_P^*, j_P^*(\xi))$ est $H \cap M$-cuspidale.*

*Démonstration:*
Soit $Q \subset M$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $M$, montrons que $j_Q^*(j_P^*(\xi)) = 0$. En reprenant les notations du théorème 3, on a $j_Q^*(j_P^*(\xi)) = j_{P_Q}^*(\xi)$. Or $P_Q \subset P$ et $P_Q \neq P$, par définition de $P$, on a donc $j_{P_Q}^*(\xi) = 0$, d'où la proposition. □

On rappelle qu'une représentation admissible de type fini de $G$, $(\pi, V)$, est cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique $P$ de $G$, distinct de $G$, $j_P(V) = \{0\}$.

**Proposition 5** *: Si $(\pi, V)$ est une représentation admissible de type fini de $G$ cuspidale et si $\xi \in V^{*H}$, alors $(\pi, \xi)$ est $H$-cuspidale.*

*Démonstration:*
Soit $P$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$, comme $j_P^*(\xi)$ est une forme linéaire sur $j_P(V) = \{0\}$, elle est nulle. D'où la proposition. □

# 3 Majorations.

## 3.1 Fonctions $\Theta_G$ et $N_d$, $d \in \mathbb{N}$ sur $G/H$.

Fixons un plongement algébrique

$$\tau : G \to GL_n(F). \tag{3.1}$$

On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K_0) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $F$ (cf. [Wald] I.1). Pour $g \in G$, écrivons :

$$\tau(g) = (a_{i,j})_{i,j=1,..,n},\ \tau(g^{-1}) = (b_{i,j})_{i,j=1,..,n}.$$

Posons

$$\|g\| = sup_{i,j} sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F). \tag{3.2}$$

On a (cf. [Wald] I.1) :

$$\|g\| \geq 1 \text{ pour tout } g \in G, \quad \|g_1 g_2\| \leq \|g_1\| \|g_2\| \text{ pour tout } g_1,\ g_2 \in G \text{ et } \|k_1 g k_2\| = \|g\| \text{ pour tout } k_1, k_2 \in K_0,\ g \in G. \tag{3.3}$$

Avec les notations du paragraphe 1.1 et (1.19), on rappelle que $P_0$ est un sous-groupe parabolique minimal de $G$ que l'on a fixé. On note $(\varepsilon_{M_0}, \mathbb{C})$ la représentation triviale de $M_0$, $(\pi_0, V_0) = (ind_{P_0}^G \varepsilon_{M_0}, ind_{P_0}^G \mathbb{C})$, $e_0$ l'unique élément de $V_0$ invariant par $K_0$ et tel que $e_0(e) = 1$, où $e$ est l'élément neutre du groupe $G$.
Remarquons que $(\check{\pi}_0, \check{V}_0)$ est isomorphe à $(\pi_0, V_0)$. Pour $g \in G$, on pose :

$$\Xi(g) = \langle \pi_0(g) e_0, e_0 \rangle.$$

Alors $\Xi$ est biinvariante par $K_0$.

On dira que deux fonctions $f_1$ et $f_2$ définies sur un ensemble $E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sont équivalentes sur un sous ensemble $E'$ de $E$ (on notera $f_1(x) \asymp f_2(x),\ x \in E'$), s'il existe $C, C' > O$ tels que : (3.4)

$$C' f_2(x) \leq f_1(x) \leq C f_2(x),\ x \in E'.$$

**Lemme 6** *: Avec les notations de (1.9), il existe $C_1, C_2 > 0$ et $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, on ait :*

$$C_1 \delta_{y.P_0}(m')^{1/2} (1 + log\|m'\|)^{-d_1} \leq \Xi(m') \leq C_2 \delta_{y.P_0}(m')^{1/2} (1 + log\|m'\|)^{d_2},\ m' \in y.\overline{M}_0^+.$$

*On a la même inégalité en remplaçant $P_0$ par $\bar{P}_0$ et $\overline{M}_0^+$ par $\overline{M}_0^-$.*

*Démonstration:*

On rappelle le lemme II.1.2 de [Wald] :

Il existe $d \in \mathbb{N}$ et, pour tous $g_1,\ g_2 \in G$, il existe $c > 0$ tels que, pour tout $g \in G$, on ait : (3.5)

$$\Xi(g_1 g g_2) \leq c \Xi(g) (1 + log\|g\|)^d.$$

On l'applique à $ymy^{-1}$ (respectivement $y^{-1} ymy^{-1} y$) pour obtenir l'inégalité de droite (respectivement de gauche) et du fait de la finitude de $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, il existe $c_1, c_2 > 0$ et $d_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$c_1 (1 + log\|ymy^{-1}\|)^{-d_1} \Xi(m) \leq \Xi(ymy^{-1}) \leq c_2 (1 + log\|m\|)^{d_1} \Xi(m),\ y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G,\ m \in M_0. \tag{3.6}$$

De plus, d'après [Wald], lemme II.1.1, il existe $c'_1, c'_2 > 0$ et $d'_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$c'_1 \delta_{P_0}(m)^{1/2} \leq \Xi(m) \leq c'_2 \delta_{P_0}(m)^{1/2} (1 + log\|m\|)^{d'_1},\ m \in \overline{M}_0^+. \tag{3.7}$$

En appliquant (3.7) à (3.6), on obtient l'existence de $C_1, C_2 > 0$ et $d_1, d_1' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$C_1\delta_{P_0}(m)^{1/2}(1+log\|ymy^{-1}\|)^{-d_1} \leq \Xi(ymy^{-1}) \leq C_2\delta_{P_0}(m)^{1/2}(1+log\|m\|)^{d_1+d_1'}, y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}, m \in \overline{M}_0^+.$$

Or

$$\delta_{P_0}(m) = \delta_{y.P_0}(ymy^{-1}),\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset},\ m \in \overline{M}_0^+,$$

et il existe $C_2' > 0$ tel que :

$$1 + log\|m\| \leq C_2'(1 + log\|ymy^{-1}\|),\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset},\ m \in M_0,$$

puisque $\|m\| \leq \|y^{-1}\|\|ymy^{-1}\|\|y\|$. Donc quitte à changer $C_2'$, l'assertion est démontrée. L'assertion sur $\bar{P}_0$ est immédiate. □

On pose :

$$\|gH\| := \|g\sigma(g^{-1})\|,\ g \in G. \tag{3.8}$$

Grâce à (3.3), on voit que si $\Omega'$ est une partie compacte de $G$,

$$\|\omega gH\| \asymp \|gH\|,\ \omega \in \Omega',\ g \in G. \tag{3.9}$$

On définit les fonctions $\Theta_G$ et $N_d$, $d \in \mathbb{N}$ par :

$$\Theta_G(gH) = (\Xi(g\sigma(g^{-1})))^{1/2},\ g \in G. \tag{3.10}$$

et

$$N_d(gH) = (1 + log\|gH\|)^d,\ g \in G. \tag{3.11}$$

On notera $N$ au lieu de $N_1$.

En utilisant le fait que tous les tores déployés maximaux du centralisateur $M_\emptyset$ de $A_\emptyset$ sont conjugués entre eux par des éléments de $M_\emptyset$, on voit que si $n$ est un élément du normalisateur de $A_\emptyset$ dans $G$, $N_G(A_\emptyset)$, il existe un élément $z$ de $M_\emptyset$ tel que $zn$ normalise $A_0$. On en déduit que tout automorphisme de $\mathfrak{a}_\emptyset$ induit par un élément de $N_G(A_\emptyset)$ préserve la restriction du produit scalaire de $\mathfrak{a}_0$ à $\mathfrak{a}_\emptyset$ d'après (1.7). Si deux éléments $y$, $y'$ de $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ vérifient $yA_\emptyset y^{-1} = y'A_\emptyset y'^{-1}$, on a $y'^{-1}y \in N_G(A_\emptyset)$. Il résulte de ce qui précède :

> Si $y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, le produit scalaire sur $y.\mathfrak{a}_\emptyset$ déduit de celui de $\mathfrak{a}_\emptyset$ ne dépend que de $y.\mathfrak{a}_\emptyset$. On le note encore $(.|.)$ et $|.|$ la norme qu'on en déduit. (3.12)

Si $x$ est un élément de $G$ tel que $x.A_\emptyset = A_i$, l'action par conjugaison induit une application linéaire de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{a}_i$ notée $X \mapsto x.X$ et caractérisée par :

$$H_{A_i}(xax^{-1}) = x.H_{A_\emptyset}(a), \quad a \in A_\emptyset.$$

Pour $a \in A_\emptyset$ et $y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, on notera $a_y := yay^{-1}$ et on remarque qu'alors $a_y\sigma(a_y)^{-1} = a_y^2$ car $y.A_\emptyset$ est égal à $A_i$ pour un $i \in I$ (cf.paragraphe 1.2), donc $y.A_\emptyset$ est $\sigma$-déployé.

**Lemme 7** *: Soit $\Omega'$ une partie compacte de $G$.*
*(i) Pour tout $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ :*

$$1 + log\|m'\| \asymp 1 + |H_{y.M_0}(m')|, \; m' \in y.M_0.$$

*(ii) On a l'égalité :*

$$H_{y.M_0}(a_y^2) = 2y.H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a), \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \; a \in A_\emptyset.$$

*(iii) On a :*

$$N(\omega a y^{-1} H) \asymp (1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|), \; \omega \in \Omega', \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

*Il existe des constantes $c, C, c', C' > 0$ telles que :*

$$Ce^{c|H_{M_0}(a)|} \leq \|\omega a y^{-1} H\| \leq C' e^{c'|H_{M_0}(a)|}, \omega \in \Omega', \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

*(iv) Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a :*

$$N_d(a_y H) \asymp N_d(aH), \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \; a \in A_\emptyset^-.$$

*Démonstration:*
(i) cf. [Wald] I.1(6), en remarquant que la formule reste vraie pour $y.M_0$.
(ii) On a :

$$H_{y.M_0}(a_y^2) = y.H_{M_0}(a^2) = 2y.H_{M_0}(a) = 2y.H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a),$$

la dernière égalité provenant du fait que $a \in A_\emptyset$.
(iii) Montrons qu'il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que :

$$C(1+|H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|) \leq N(\omega a y^{-1} H) \leq C'(1+|H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|), \omega \in \Omega', a \in A_\emptyset^-, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \quad (3.13)$$

On a :

$$N(gH) = 1 + log\|\omega y^{-1} a_y \sigma(a_y)^{-1} \sigma(y) \sigma(\omega)^{-1}\|, \; g = \omega a y^{-1}, \; \omega \in \Omega', \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

d'où :

$$N(gH) \leq 1 + log\|\omega\| + log\|y^{-1}\| + log\|a_y^2\| + log\|\sigma(y)\| + log\|\sigma(\omega)^{-1}\|,$$

$g = \omega a y^{-1}, \; \omega \in \Omega', \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$.
Par compacité de $\Omega'$ et finitude de $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, il existe $c > 0$ tel que :

$$N(gH) \leq c + log\|a_y^2\|, \; g = \omega a y^{-1}, \; \omega \in \Omega', \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

On en déduit l'inégalité de droite de l'équation (3.13) en combinant (i) et (ii). L'inégalité de gauche se démontre de la même façon en partant de l'égalité $a_y \sigma(a_y)^{-1} = y\omega^{-1} g \sigma(g)^{-1} \sigma(\omega) \sigma(y)^{-1}$.
L'autre inégalité de (iii) est obtenue en exponentiant les inégalités de (3.13).

(iv) Il suffit de montrer l'assertion pour $d = 1$. Soit $y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, en prenant $\Omega' = \{y\}$ dans (iii), on a :

$$N(yay^{-1}H) \asymp 1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|, \quad a \in A^-_\emptyset,$$

et, en appliquant à nouveau (iii) à $y = e$ et $\Omega' = \{e\}$, on obtient :

$$1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)| \asymp N(aH), \quad a \in A^-_\emptyset,$$

d'où (iv) d'après la finitude de $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$. □

**Proposition 6** : *(i) $\Theta_G$ est $K_0 \cap \sigma(K_0)$ invariante à gauche.*
*(ii) Soit $\Omega'$ une partie compacte de $G$. Il existe $C, C' > 0$ et $d, d' \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$C\delta^{1/2}_{\bar{P}_\emptyset}(a)N_{-d}(aH) \leq \Theta_G(gH) \leq C'\delta^{1/2}_{\bar{P}_\emptyset}(a)N_{d'}(aH), g = \omega a y^{-1}, \omega \in \Omega', a \in A^-_\emptyset, y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}.$$

*Démonstration:*
(i) est clair.
(ii) Par compacité de $\Omega'$, il existe un ensemble fini $F$ tel que $\Omega' \subset (K_0 \cap \sigma(K_0))F$. Par invariance de $\Theta_G$ à gauche par $K_0 \cap \sigma(K_0)$ et par finitude de $F$, on se réduit à étudier $\Theta_G(\omega a y^{-1}H)$, $a \in A^-_\emptyset$, $y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ pour $\omega \in F$ fixé. On le fixe. On a :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1}H) = (\Xi(\omega y^{-1}a_y^2\sigma(y)\sigma(\omega)^{-1}))^{1/2},\ a \in A^-_\emptyset,\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}.$$

Montrons l'inégalité de droite de (ii) :
D'après [Wald], lemme II.1.2 (cf. (3.5)) (appliqué à $g_1 = \omega y^{-1}$ et $g_2 = \sigma(y)\sigma(\omega)^{-1}$) et du fait de la finitude de $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $c' > 0$ tels que :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1}H)^2 \leq c'\Xi(a_y^2)N_d(a_yH),\ a \in A^-_\emptyset,\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}.$$

En appliquant l'inégalité de droite du lemme 6 à $m' = a_y^2 \in y.A^-_\emptyset \subset y.\overline{M}^-_0$, il existe $d_2 \in \mathbb{N}$ et $c'' > 0$ tels que :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1}H)^2 \leq c''\delta^{1/2}_{y.\bar{P}_0}(a_y^2)N_{d+d_2}(a_yH),\ a \in A^-_\emptyset,\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}.$$

Or :

$$\delta_{y.\bar{P}_0}(a_y^2) = \delta_{\bar{P}_0}(a^2) = \delta_{\bar{P}_\emptyset}(a)^2,\ a \in A^-_\emptyset,\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}.$$

La dernière égalité provenant du fait que $a \in A^-_\emptyset$. On obtient alors l'inégalité voulue en appliquant le lemme 7 (iv).
L'inégalité de gauche se démontre de la même façon en partant de l'égalité :

$$a_y\sigma(a_y)^{-1} = y\omega^{-1}g\sigma(g)^{-1}\sigma(\omega)\sigma(y)^{-1},\ g = \omega a y^{-1},\ \omega \in \Omega',\ a \in A^-_\emptyset,\ y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset},$$

et en utilisant l'inégalité de gauche du lemme 6. □

**Lemme 8** *: Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions définies sur $G/H$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que :*
*(a) Pour tout $x \in G$ fixé, on ait :*

$$f_i(xgH) \asymp f_i(gH),\ g \in G,\ i = 1, 2.$$

*(b) Pour un sous-groupe compact ouvert $K$, on ait $f_i(kgH) \asymp f_i(gH)$, $g \in G$, $k \in K$, $i = 1, 2$.*
*(c) Pour tout $y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, on ait :*

$$f_i(yay^{-1}H) \asymp f_i(aH),\ a \in A^-_\emptyset,\ i = 1, 2.$$

*(d) $f_1(aH) \asymp f_2(aH)$, $a \in A^-_\emptyset$, $i = 1, 2$.*
*Alors $f_1$ et $f_2$ sont équivalentes sur $G/H$.*

*Démonstration:*
On fixe $\Omega$ comme dans la décomposition de Cartan (1.21) et on utilise cette décomposition de l'espace symétrique $G/H$. Par compacité de $\Omega$, il existe un ensemble fini $F'$ tel que $\Omega \subset KF'$. Par finitude de $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ et $F'$, il suffit de montrer que $f_1$ et $f_2$ sont équivalentes sur $\cup_{y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}} yA^-_\emptyset y^{-1}H$ d'après (a) et (b). Ce qui équivaut à montrer que $f_1$ et $f_2$ sont équivalentes sur $A^-_\emptyset$ d'après (c), ce qui est donné par (d). □

## 3.2 Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_{BD}$.

On note $\Sigma(G, A_0)$ (resp. $\Sigma(P_0, A_0)$ ou $\Sigma(P_0)$) l'ensemble des racines de $A_0$ dans l'algèbre de Lie de $G$ (resp. $P_0$). On rappelle que l'on note $\Delta(P_0)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_0)$. Si $\Theta$ est une partie de $\Delta(P_0)$, on note $\langle\Theta\rangle$ le sous-système de $\Sigma(G, A_0)$ engendré par $\Theta$ et $P_{\langle\Theta\rangle}$ le sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_0$ pour lequel $\Sigma(P_0) \cup \langle\Theta\rangle$ est l'ensemble des racines de $A_0$ dans l'algèbre de Lie de $P_{\langle\Theta\rangle}$. On définit $\Theta_\emptyset$ par l'égalité :

$$P_\emptyset = P_{\langle\Theta_\emptyset\rangle}$$

On écrit

$$\Delta(P_0) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \Delta(P_0) \setminus \Theta_\emptyset = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\},$$

avec $k \geq l$.

On note $\delta_1, ..., \delta_k \in \mathfrak{a}_0^*$ les poids fondamentaux de $\Sigma(P_0, A_0)$. Ils sont nuls sur $\mathfrak{a}_G$. Alors pour $i = 1, \ldots, l$, $\delta_i \in \mathfrak{a}^*_{M_\emptyset}$. Reprenons les notations de [BD], paragraphe 2.7. Il existe des entiers $n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_i\delta_i$ corresponde à un plus haut poids $\Lambda_i \in RatM_0$ d'une représentation rationnelle irréductible de dimension finie $(\pi_i, V_i)$ de $G$ de vecteur de plus haut poids $v_i$ relativement à $P_0$ (cf. (1.1)). La droite $Fv_i$ est $P_\emptyset$-invariante (cf. [BD] (2.23) et ce qui suit). On note $v_i^*$ l'unique élément de $V_i^*$ de poids $\Lambda_i^{-1}$ sous $M_0$ et vérifiant $\langle v_i^*, v_i\rangle = 1$. Pour $i = 1, \ldots, l$, on notera $\tilde{\Lambda}_i := \Lambda_i(\Lambda_i^{-1} \circ \sigma)$ et $(\tilde{\pi}_i, \tilde{V}_i)$ la représentation rationnelle de $G$ $(\pi_i \otimes (\pi_i^* \circ \sigma), V_i \otimes V_i^*)$. On note $\tilde{v}_i := v_i \otimes v_i^*$ qui est de poids $\tilde{\Lambda}_i$ sous $\tilde{\pi}_i$ relativement à $M_0$. Alors, il existe un vecteur $H$-invariant non nul sur $\tilde{\pi}_i^*$ dans $\tilde{V}_i^* = (V_i \otimes V_i^*)^* \simeq V_i^* \otimes V_i \simeq EndV_i$, égal à l'identité, $\tilde{e}_{i,H}^*$, vérifiant $\langle \tilde{e}_{i,H}^*, \tilde{v}_i \rangle = 1$. On notera $\tilde{\delta}_i := \delta_i - \delta_i \circ \sigma$, alors $\tilde{\delta}_i \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$. Pour $i = 1, \ldots, l$, on fixe une base de $V_i$ formée de vecteurs poids sous $A_0$, ce qui permet de définir une norme sur $V_i$ notée $\| \|_i$ en prenant le maximum des valuations des coordonnées dans cette base, puis une norme sur $EndV_i = \tilde{V}_i^*$ encore notée $\| \|_i$.

On pose, pour $g \in G$ :

$$\|gH\|_i = \|\tilde{\pi}_i^*(g)\tilde{e}_{i,H}^*\|_i = \|\pi_i(g^\sigma g^{-1})\|_i, \; i = 1, ..., l, \tag{3.14}$$

$$\|gH\|_0 = e^{|H_{G,\sigma}(g)|}, \tag{3.15}$$

où l'on a muni $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ de la norme provenant du produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$.

On définit :

$$\|gH\|_{BD} = \prod_{i=o}^{l} \|gH\|_i, \;\; g \in G. \tag{3.16}$$

**Proposition 7** *: Il existe $c, C, c', C' > 0$ tels que :*

$$C\|gH\|_{BD}^c \leq \|gH\| \leq C'\|gH\|_{BD}^{c'}, \; g \in G. \tag{3.17}$$

*Démonstration:*

Soit $V$ un espace vectoriel sur $F$ de dimension finie et soit $\| \|$ une norme sur $EndV$ déduite d'une norme sur $V$. Alors si $\Gamma$ est une partie compacte de $GL(V)$, on a :

$$\|\gamma T \gamma'\| \asymp \|T\|, \; T \in EndV. \tag{3.18}$$

Par ailleurs,

$$-|H_{G,\sigma}(g)| + |H_{G,\sigma}(g')| \leq |H_{G,\sigma}(gg')| \leq |H_{G,\sigma}(g)| + |H_{G,\sigma}(g')|, \; g, g' \in G \tag{3.19}$$

Tenant compte de la deuxième égalité de (3.14), de (3.18) et de(3.19), et en écrivant $\omega a y^{-1} = \omega y^{-1}(y a y^{-1})$, on déduit de ce qui précède :

$$\|\omega a y^{-1} H\|_{BD} \asymp \|y a y^{-1} H\|_{BD}, \; \omega \in \Omega, \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Et d'après (3.3) :

$$\|\omega a y^{-1} H\| \asymp \|y a y^{-1} H\|, \; \omega \in \Omega, \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Montrons que :

$$\|y a y^{-1} H\| \asymp \|aH\|, \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \tag{3.20}$$

En effet, l'égalité $\sigma(a_y) = a_y^{-1}$ implique $\|y a y^{-1} H\| = \|a_y^2\|$, donc $\|y a y^{-1} H\| = \|y a^2 y^{-1}\|$. Or, d'après (3.3) :

$$\|y a^2 y^{-1}\| \asymp \|a^2\| = \|aH\|, \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

D'où (3.20), ce qui implique :

$$\|\omega a y^{-1} H\| \asymp \|aH\|, \; \omega \in \Omega, \; a \in A_\emptyset^-, \; y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \tag{3.21}$$

On a le même résultat pour $\| \|_{BD}$.

Tenant compte de la décomposition de Cartan (1.21), on est ramené à prouver les inégalités de la proposition pour $g = a \in A_\emptyset^-$.

Pour $i = 1, \dots, l$ on fixe une base, $f_{i,1}, \dots, f_{i,r}$, de $\tilde{V}_i^*$ formée de vecteurs poids sous $A_0$ telle que $f_{i,1} = v_i^* \otimes v_i$ (donc de poids $\tilde{\Lambda}_i^{-1}$ sous $\tilde{\pi}_i^*$) et telle que $\tilde{e}_{i,H}^* = \sum_{j=1}^r \alpha_j f_{i,j}$, où $\alpha_1 = 1$ et pour $j = 2, \dots, r$, $\alpha_j = 0$ ou 1. On note $\| \|_i'$ la norme sur $\tilde{V}_i^*$ qu'on en déduit. D'après l'équivalence des normes en dimension finie, $\| \|_i \asymp \| \|_i'$. Alors, en utilisant la première égalité de (3.14), on a :

$$\|aH\|_i \asymp \| \sum_{j=1}^r \alpha_j \tilde{\pi}_i^*(a) f_{i,j} \|_i', a \in A_\emptyset^-.$$

Soit encore :

$$\|aH\|_i \asymp \|\tilde{\Lambda}_i^{-1}(a) f_{i,1} + \sum_{j=2}^r \alpha_j \tilde{\pi}_i^*(a) f_{i,j} \|_i', a \in A_\emptyset^-.$$

Puisque pour $i = 2, \dots, r$, $\alpha_j = 0$ ou 1, que $a \in A_0^-$, et que $(\tilde{\pi}_i, \tilde{V}_i)$ est une représentation de plus haut poids $\tilde{\Lambda}_i$, $|\tilde{\Lambda}_i^{-1}(a)|_F = e^{-n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a))}$ est la plus grande des valuations des coordonnées de $\tilde{\pi}_i^*(a) \tilde{e}_{i,H}^*$ dans la base $f_{i,1}, \dots, f_{i,r}$ de $\tilde{V}_i^*$ pour $a \in A_\emptyset^-$.

On a donc :

$$\|aH\|_i \asymp e^{-n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a))}, a \in A_\emptyset^-,\ i = 1, \dots, l. \tag{3.22}$$

D'où :

$$\|aH\|_{BD} \asymp e^{-\sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a)) + |H_{G,\sigma}(a)|}, a \in A_\emptyset^-. \tag{3.23}$$

On note $\mathfrak{a}_{\emptyset,G} := \mathfrak{a}_\emptyset \cap \mathfrak{a}_G$, $\mathfrak{a}_\emptyset^G := \mathfrak{a}_{M_\emptyset}^G$ (cf.(1.4)), $\bar{\mathfrak{a}}_\emptyset^+ := \bar{\mathfrak{a}}_{P_\emptyset}^+ \cap \mathfrak{a}_\emptyset$ et $\mathfrak{a}_\emptyset^{*+} := \mathfrak{a}_\emptyset^* \cap \mathfrak{a}_{P_\emptyset}^{*+}$. On remarque que $\mathfrak{a}_\emptyset^{*+}$ est non vide car $\rho_{P_\emptyset} \in \mathfrak{a}_\emptyset^{*+}$ : en effet, $\rho_{P_\emptyset}$ est élément de $\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^{*+}$ et $\rho_{P_\emptyset} \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ car $\sigma(\rho_{P_\emptyset}) = -\rho_{P_\emptyset}$ puisque $P_\emptyset$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique.

Montrons que :

pour $\mu \in \mathfrak{a}_\emptyset^{*+}$ et $X \in \bar{\mathfrak{a}}_\emptyset^+$, si l'on note $X = X^G + X_G$ où $X^G \in \mathfrak{a}_\emptyset^G$ et $X_G \in \mathfrak{a}_{\emptyset,G}$, on a : $|X| \asymp \mu(X^G) + |X_G|$, $X \in \bar{\mathfrak{a}}_\emptyset^+$. (3.24)

En remarquant que la norme $|.|$ sur $\mathfrak{a}_\emptyset$ est équivalente à la norme $X \mapsto |X^G| + |X_G|$, où $X = X^G + X_G$, avec $X^G \in \mathfrak{a}_\emptyset^G$ et $X_G \in \mathfrak{a}_{\emptyset,G}$ on se ramène à prouver qu'il existe des constantes $C_1$, $C_2 > 0$ telles que :

$$C_1|X| > \mu(X) > C_2|X|, \quad X \in \bar{\mathfrak{a}}_\emptyset^+,$$

ce qui résulte du fait que la fonction $\mu$ est continue et ne s'annule pas sur le compact $\{X \in \bar{\mathfrak{a}}_\emptyset^+ / |X| = 1\}$. C'est une conséquence du fait que les poids fondamentaux sont des produits scalaires positifs ou nuls.

On applique (3.24) à $\mu := \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i$ et $X := -H_{M_0}(a), a \in A_\emptyset^-$. Alors $X_G = -H_{G,\sigma}(a)$ et $\tilde{\delta}_i(X) = \tilde{\delta}_i(X^G)$, on obtient :

$$-\sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a)) + |H_{G,\sigma}(a)| \asymp | - H_{M_0}(a)|, a \in A_\emptyset^-.$$

En exponentiant cette dernière équivalence jointe à (3.23), on trouve qu'il existe des constantes $c_1, C_1, c'_1, C'_1 > 0$ telles que :

$$C_1 e^{c_1 |H_{M_0}(a)|} \leq \|aH\|_{BD} \leq C'_1 e^{c'_1 |H_{M_0}(a)|}, a \in A_\emptyset^-. \tag{3.25}$$

Or, d'après le lemme 7 (iii), on obtient des inégalités similaires pour $\|aH\|$ et ces inégalités conduisent au résultat voulu. □

## 3.3 Majorations de certains coefficients généralisés de représentations admissibles de type fini.

**Théorème 4** *: (i) Soit $(\pi, V)$ une représentation admissible de type fini de $G$ et soit $\xi \in V^{*H}$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ vérifiant :*

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C \|gH\|^c, \ g \in G.$$

*(ii) Si $(\pi, V)$ une représentation bornée irréductible de $G$ et $\xi \in V^{*H}$, alors pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ vérifiant :*

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C, \ g \in G.$$

*Démonstration:*

(i) Montrons le théorème par récurrence sur la dimension de $G$. Si dim $G = 0$, le théorème est trivial. Supposons maintenant qu'il soit vrai pour tout autre groupe linéaire algébrique réductif et connexe de dimension strictement inférieure à celle de $G$ et montrons le pour $G$. En utilisant le fait que :

$$\langle \pi^*(g)\xi, \pi(x)v \rangle = \langle \pi^*(x^{-1}g)\xi, v \rangle, \quad x, \ g \in G, \ v \in V,$$

et grâce à (3.9), on se ramène à montrer l'inégalité de (i) pour un ensemble fini de générateurs de $V$. Donc il suffit de montrer que :

Pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C \|gH\|^c, \ g \in G. \tag{3.26}$$

Soit $v \in V$.

a/ Montrons d'abord que :

Il existe $C > 0$ et $c > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C \|aH\|^c, \ a \in A_\emptyset^-. \tag{3.27}$$

Pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ et pour $0 < \varepsilon \leq 1$, on définit ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon)$ par :

$$\{a \in A_\emptyset; \ |\alpha(a)|_F < \varepsilon \text{ pour } \ \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta \ \text{ et } \ \varepsilon \leq |\alpha(a)|_F \leq 1 \ \text{ pour } \ \alpha \in \Theta\}.$$

Alors on a l'analogue de ce qui suit le théorème 4.3.3 de [C] :

$$\text{Pour tout } 0 < \varepsilon \leq 1,\ A_\emptyset^- \text{ est l'union disjointe des } {}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon) \text{ lorsque } \Theta \text{ parcourt les sous ensembles de } \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset). \tag{3.28}$$

D'après le théorème 2, pour chaque $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, il existe $\varepsilon_\Theta > 0$ tel que:

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a)j_{P_\Theta}(v)\rangle,\ a \in A_\emptyset^-(P_\Theta, < \varepsilon_\Theta). \tag{3.29}$$

On pose $\varepsilon := min_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)}\varepsilon_\Theta$. D'après (3.28), $A_\emptyset^-$ est l'union disjointe des ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon)$ lorsque $\Theta$ parcourt les sous ensembles de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Or, on remarque que ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon) \subset A_\emptyset^-(P_\Theta, < \varepsilon)$ pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. D'après (3.29), et la définition de $\varepsilon$, on a donc :

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a)j_{P_\Theta}(v)\rangle,\ a \in_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon),\ \Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset).$$

Pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ en utilisant la restriction de $\tau$ à $M_\Theta$ qui définit un plongement de $M_\Theta$ dans $GL_n(F)$ (cf. (3.1)), on définit la norme sur $M_\Theta$ et sur $M_\Theta \cap H$ (cf. (3.2) et (3.8)). Donc :

$$\|mM_\Theta \cap H\| = \|mH\|,\ m \in M_\Theta. \tag{3.30}$$

Pour $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Theta \neq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la représentation admissible de type fini $(\pi_{P_\Theta}, V_{P_\Theta})$ de $M_\Theta$ et à $j_{P_\Theta}^*(\xi) \in (V_{P_\Theta})^{*M_\Theta \cap H}$. De plus, comme $\varepsilon \in ]0,1]$, on a :

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{1/2} \leq 1,\ a \in_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon).$$

Alors :

Il existe $c_\Theta > 0$ et $C_\Theta > 0$ tels que :

$$|\langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a)j_{P_\Theta}(v)\rangle| \leq C_\Theta \|aH\|^{c_\Theta},\ a \in_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon), \tag{3.31}$$

puisque $\|a^{-1}M_\Theta \cap H\| = \|aM_\Theta \cap H\|$ et $\|aM_\Theta \cap H\| = \|aH\|$.

Soit $A_{\emptyset,G}$ le plus grand tore déployé de $A_\emptyset \cap A_G$. Alors ${}_{\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)}A_\emptyset^-(\varepsilon)$ est compact modulo $A_{\emptyset,G}$ donc de la forme $\Omega' A_{\emptyset,G}$ où $\Omega'$ est une partie compacte de $G$. Montrons que :

Il existe $c_\Delta > 0$ et $C_\Delta > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v\rangle| \leq C_\Delta \|aH\|^{c_\Delta},\ a \in_{\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} A_\emptyset^-(\varepsilon). \tag{3.32}$$

L'application $a \to \langle \pi^*(a)\xi, v\rangle$ est invariante par un sous-groupe compact ouvert $K'$ de $A_\emptyset$. Comme $\Omega'$ est contenu dans une réunion finie de classes à gauche de $K'$ dans $A_\emptyset$, il suffit de prouver une inégalité du même type pour un nombre fini $v_1, \dots, v_l$ de translatés de $v$, mais seulement pour $A_{\emptyset,G}$. Montrons-le.

Soit $i = 1, \dots, l$. Comme $(\pi, V)$ est admissible, la restriction de la fonction $g \to \langle \pi^*(g)\xi, v_i\rangle$ à $A_G$ est $A_G$-finie. D'après [Wald] I.2, il existe $\chi_1, \dots, \chi_m$, des caractères non ramifiés de $A_G$ et $r > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v_i\rangle| \leq Sup(|\chi_1(a)|, \dots, |\chi_M(a)|)(1 + log\|a\|)^r, \quad a \in A_G. \tag{3.33}$$

Mais si $\chi$ est un caractère non ramifié de $A_G$, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_G^*$ tel que :

$$\chi(a) = e^{\lambda(H_G(a))}, \quad a \in A_G.$$

Donc :

$$|\chi(a)| \leq e^{|\lambda||H_G(a)|}, \quad a \in A_G, \tag{3.34}$$

où $|\lambda|$ est la norme de la forme linéaire $\lambda$. Mais (3.25) jointe à la proposition 7 montre qu'il existe $c_0 > 0$ et $C_0 > 0$ tels que :

$$C_0 e^{c_0|H_{M_0}(a)|} \leq \|aH\|, \quad a \in A_\emptyset^-. \tag{3.35}$$

Comme $H_{M_0}(a) = H_G(a), \quad a \in A_G$, on déduit alors de (3.34) et (3.35) qu'il existe $c_\chi > 0$ et $C_\chi > 0$ tels que :

$$|\chi(a)| \leq C_\chi \|aH\|^{c_\chi}, \quad a \in A_{\emptyset,G} \subset A_G \cap A_\emptyset^-.$$

L'inégalité voulue pour $v_i$ résulte alors de (3.33), et de l'inégalité :

$$1 + logx \leq x, \quad x \geq 1,$$

ce qui achève de prouver (3.32). Donc (3.31) est vraie aussi pour $\Theta = \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$.
Or $\|aH\| \geq 1$, (cf. (3.3)). On pose alors $c := max_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} c_\Theta > 0$ et $C := max_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} C_\Theta > 0$. En utilisant (3.28), on obtient (3.27).
b/ On reprend les notations de 1.2. Par un raisonnement similaire, on peut remplacer $A_\emptyset$ par l'un des $A_i := x_i A_\emptyset x_i^{-1}$ pour $i \in I$ dans a/. Toutefois, pour définir la norme sur $M_{i,\Theta} := x_i M_\Theta x_i^{-1}$, on doit utiliser le plongement $\tau \circ Adx_i^{-1}$. Alors on a seulement :

$$\|mM_{i,\Theta} \cap H\| \asymp \|mH\|, \; m \in M_{i,\Theta},$$

mais cela suffit à achever la démonstration de (3.27) pour $A_i$ au lieu de $A_\emptyset$. Donc pour tout $v \in V$, il existe $c_i > 0$ et $C_i > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C_i \|aH\|^{c_i}, \; a \in A_i^- := x_i A_\emptyset^- x_i^{-1}.$$

On souhaite obtenir une telle inégalité sur $A_i$ et non sur $A_i^-$. Or, $A_\emptyset$ est la réunion d'ensembles $A_\emptyset^-$ lorsque $P_\emptyset$ décrit l'ensemble des $\sigma$-sous-groupes paraboliques contenant $A_\emptyset$. Le choix de $P_\emptyset$ étant indifférent dans ce qui précède et $I$ étant fini, on en déduit que :

Pour tout $v \in V$, il existe $c > 0$ et $C > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C \|aH\|^c, \; a \in A_i, \; i \in I. \tag{3.36}$$

On déduit de (1.21) que :

$$G = \bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega y^{-1} A_y H, \quad A_y = y A_\emptyset y^{-1}.$$

Soit $v \in V$ et $K$ un sous-groupe compact ouvert tel que $v \in V^K$. Soit $g \in \Omega y^{-1} a_y H$, $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, $a_y \in A_y$. Alors :

$$\langle \pi^*(g)\xi, v\rangle \in \{\langle \pi^*(a_y)\xi, \pi(y\omega^{-1})v\rangle, \omega \in \Omega\}.$$

L'ensemble $y\Omega$ étant compact et $v$ étant invariant par $K$, l'ensemble $\{\pi(y\omega^{-1})v, \omega \in \Omega\}$ est fini. Par conséquent, il existe un nombre fini d'éléments de $V$, indépendants de $a_y$, notés $v'_1, \dots, v'_r$ tels que :

$$\langle \pi^*(g)\xi, v\rangle \in \{\langle \pi^*(a_y)\xi, v'_j\rangle, j = 1, \dots, r\}. \tag{3.37}$$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Comme $A_y$ est égal à l'un des $A_i$, d'après (3.36) appliqué à $v'_j$ au lieu de $v$, il existe $c_{y,j} > 0$ et $C_{y,j} > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(a_y)\xi, v'_j\rangle| \leq C_{y,j} \|a_y H\|^{c_{y,j}},\ a_y \in A_y.$$

En prenant $C' := Max_{j \in \{1,\dots,r\},\, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} C_{y,j}$ et $c' := Max_{j \in \{1,\dots,r\},\, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} c_{y,j}$, on obtient :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v\rangle| \leq C' \|a_y H\|^{c'},\ gH = \omega y^{-1} a_y H,\ \omega \in \Omega,\ a_y = y a y^{-1},\ a \in A_\emptyset^-,\ y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Or, d'après (3.20), pour $a \in A_\emptyset^-$, on a : $\|a_y H\| \asymp \|aH\|$ et d'après (3.21), pour $a \in A_\emptyset^-$, on a : $\|aH\| \asymp \|gH\|$. D'où (i).

(ii) Soit $v \in V$ fixé, d'après (3.37), il suffit de montrer que :

$$\text{pour tout } i \in I, \text{ il existe } C_i > 0 \text{ tel que :} \quad |\langle \pi^*(a_i)\xi, v\rangle| \leq C_i,\ a_i \in A_i. \tag{3.38}$$

Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact tel que $v \in V^K$. D'après le lemme 2, il existe un sous-groupe ouvert compact $K'$ de $K$ tel que :

$$\langle \pi^*(a_i^{-1})\xi, v\rangle = \langle \pi^*(a_i^{-1})\pi^*(e_{K'})\xi, v\rangle,\ a_i \in A_i^- \subset A_{M_{i,\emptyset}}^-,$$

où $M_{i,\emptyset} := x_i M_\emptyset x_i^{-1}$. Or $(\pi, V)$, étant bornée, il existe $C'_i > 0$ tel que :

$$|\langle \pi^*(a_i^{-1})\pi^*(e_{K'})\xi, v\rangle| \leq C'_i,\ a_i \in A_i^-.$$

On en déduit (3.38) en procédant comme dans la preuve de (3.36), et (ii) en résulte alors. $\square$

**Remarque 3** *: Ce théorème permet de voir qu'une des hypothèses du théorème 3 de [BD] est toujours satisfaite.*

# 4 Un analogue d'un lemme de Langlands.

## 4.1 Résultats préliminaires.

Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$. Par abus de notation, pour $x \in G$, on note $x = k(x)m(x)u(x)$, $k(x) \in K_0$, $m(x) \in M$, $u(x) \in U$. On note $p_M$ la projection de $P$ sur $M$ de noyau $U$. On note $K_{0,M} := p_M(P \cap K_0)$ qui est un sous-groupe compact de $M$. Alors $m(x)$ est défini modulo l'action à gauche de $K_{0,M}$. On remarque que $H_M(m(x))$ est bien défini et pour $\chi \in X(M)$, $\chi(m(x))$ l'est également. De plus,

> Si $\Omega$ est un compact de $G$, l'ensemble $\{m(x) | x \in \Omega\}$ est inclus dans un compact de $M$. (4.1)

En effet, $\Omega$ est inclus dans un nombre fini de classes à gauche modulo $K_0$, et on utilise ce qui précède.

**Lemme 9** *: (i) Soit $(\pi_\Lambda, V)$ une représentation rationnelle de $G$, de dimension finie, de plus haut poids $\Lambda \in Rat(M_0)$, ayant un vecteur, $v_\Lambda$, de plus haut poids $\Lambda$, et un vecteur, $e^*_{\Lambda,H}$, $H$-invariant dans $V^*$ pour $\pi^*_\Lambda$, vérifiant $\langle e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle = 1$. On note $\lambda$ (ou $\lambda_\Lambda$) l'élément de $\mathfrak{a}^*_0$ tel que $e^{\lambda(H_{M_0}(m))} = |\Lambda(m)|_F$ pour $m \in M_0$. On suppose de plus que $\lambda$ est élément de $\mathfrak{a}^*_M$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\lambda(H_M(m(h))) \geq C, \;\; h \in H.$$

*(ii) Si $\chi \in X(M)_\sigma$, avec $Re\chi$ strictement $P$-dominant; alors il existe $C' > 0$ tel que $|\chi(m(h))| \geq C'$, $h \in H$.*

*Démonstration:*

(i) Soit $h \in H$. On déduit de l'invariance de $e^*_{\Lambda,H}$ par $h^{-1}$ l'équation :

$$\langle \pi^*_\Lambda((u(h))^{-1}(m(h))^{-1}(k(h))^{-1})e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle = 1,$$

où l'on a écrit :

$$h = k(h)m(h)u(h). \tag{4.2}$$

Comme $\lambda \in \mathfrak{a}^*_M$, il existe (cf. e.g. [BD] (2.23)) un caractère rationnel, $\Lambda_1$, de $M$, tel que :

$$\pi_\Lambda(m)v_\Lambda = \Lambda_1(m)v_\Lambda, \quad m \in M. \tag{4.3}$$

Il existe $\lambda_1 \in \mathfrak{a}^*_M$ tel que $e^{\lambda_1(H_M(m))} = |\Lambda_1(m)|_F, \quad m \in M$. Donc :

$$e^{\lambda(H_{M_0}(m))} = e^{\lambda_1(H_M(m))}, \quad m \in M_0.$$

En utilisant (1.4) pour $M = M_0$ et $G = M$, on trouve que $\lambda_1 = \lambda$ et :

$$|\Lambda_1(m)|_F = e^{\lambda(H_M(m))}, \quad m \in M. \tag{4.4}$$

D'après (4.2), on a :

$$\langle \pi^*_\Lambda((k(h))^{-1})e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle = \langle \pi^*_\Lambda(m(h))\pi^*_\Lambda(u(h))\pi^*_\Lambda(h^{-1})e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle.$$

Mais $e^*_{\Lambda,H}$ est invariant par $H$ et $v_\Lambda$ vérifie (4.3) et est invariant par $U$, donc

$$\langle \pi^*_\Lambda((k(h))^{-1})e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle = \Lambda_1(m(h))^{-1}. \tag{4.5}$$

Pour des raisons de compacité, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$|\langle \pi^*_\Lambda(k)e^*_{\Lambda,H}, v_\Lambda\rangle|_F \leq C', \;\; k \in K_0.$$

De (4.4) et (4.5), on déduit :

$$e^{-\lambda(H_M(m(h)))} \leq C', \; h \in H.$$

D'où l'assertion en prenant successivement l'inverse puis le logarithme de l'inégalité.
(ii) On a : $Re\chi \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma})^*$. Soient $\chi_1$ dans $X(M)_\sigma$ et $\chi_2$ dans $X(G)_\sigma$ tels que $Re\chi_1 \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$, $Re\chi_2 \in (\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$ et $Re\chi = Re\chi_1 + Re\chi_2$. Alors $|\chi| = |\chi_1||\chi_2|$. D'autre part,

$$|\chi_2(m(h))| = 1, \; h \in H.$$

En effet, puisque $|\chi_2| \in X(G)_\sigma$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,

$$|\chi_2(h)| = 1, \; h \in H,$$

car $|\chi_2| \circ \sigma = |\chi_2|^{-1}$, donc $|\chi_2|(h) = |\chi_2|^{-1}(h), \; h \in H$. Or :

$$|\chi_2|(h) = |\chi_2|(k(h)m(h)u(h)) = |\chi_2|(m(h)), \; h \in H,$$

la dernière égalité provenant du fait que les caractères non ramifiés sont triviaux sur les sous-groupes compacts et les sous-groupes unipotents. On a donc :

$$|\chi(m(h))| = |\chi_1(m(h))|, \; h \in H.$$

Or $Re\chi_1 \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$ donc, d'après $[BD]$ remarque 1, il existe $n_1, ..., n_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathfrak{a}_0^*$ tels que $Re\chi_1 = \sum_{i=1}^k n_i\lambda_i$ et tels que pour $i = 1, \ldots, k$, il existe une représentation rationnelle de $G$ de plus haut poids $\Lambda_i$ vérifiant les propriétés de (i) avec $\lambda_i := \lambda_{\Lambda_i}$. Puisque $Re\chi$ est strictement $P$-dominant, les $n_i$ sont positifs. On obtient alors :

$$|\chi(m(h))| = e^{Re\chi_1(H_M(m(h)))} = \prod_{i=1}^{k} e^{n_i\lambda_i(H_M(m(h)))}, \; h \in H.$$

D'où (ii) en appliquant (i) aux $\lambda_i$. □

**Lemme 10** *: Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $Re\chi$ soit strictement $P$-dominant. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in A_M$ vérifiant $H_M(a) \in -\bar{\mathfrak{a}}_P^+$ on ait :*

$$|\chi(m(a^{-1}\bar{u}a))| \leq C|\chi(m(\bar{u}))|, \;\; \bar{u} \in \bar{U} := \sigma(U).$$

*Démonstration:*
Soit $\nu \in \mathfrak{a}_P^{*+}$ (cf.(1.8)) tel que l'on ait : $e^{\nu(H_M(m))} = |\chi(m)|$, $m \in M$. Il résulte de [Del] (3.14) qu'il existe $Y_P \in \mathfrak{a}_M$ tel que l'on ait :

$$H_M(m(\bar{u})) - H_M(m(a^{-1}\bar{u}a)) \in Y_P +^+ \bar{\mathfrak{a}}_P,\ \bar{u} \in \bar{U},\ a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{\mathfrak{a}}_P^+).$$

Comme $\nu$ est $P$-dominant, on a :

$$\nu(H_M(m(\bar{u})) - H_M(m(a^{-1}\bar{u}a))) \geq \nu(Y_P),\ \bar{u} \in \bar{U},\ a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{\mathfrak{a}}_P^+).$$

Soit encore :

$$e^{\nu(H_M(m(a^{-1}\bar{u}a)))} \leq e^{-\nu(Y_P)} e^{\nu(H_M(m(\bar{u}))}),\ \bar{u} \in \bar{U},\ a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{\mathfrak{a}}_P^+).$$

D'où le lemme. $\square$

## 4.2 Une propriété asymptotique des intégrales d'Eisenstein.

Soit $P = MU$ un $\sigma-$sous-groupe-parabolique de $G$. Soit $(\delta, V_\delta)$ une représentation admissible de type fini de $M$. On introduit pour $\chi \in X(M)_\sigma$, la représentation $\delta_\chi = \delta \otimes \chi$ de $M$. L'espace de $\delta_\chi$ s'identifie à $V_\delta$. On étend l'action de $M$ à $P$ en la prenant triviale sur $U$. On rappelle que $ind_P^G V_\delta$, noté aussi $I_\chi^P(\delta)$, est l'espace des applications $\varphi : G \to V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\delta_\chi(m^{-1})\varphi(g),\ \ g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe $G$ agit sur $I_\chi^P(\delta)$ par la représentation régulière gauche $\pi_{\delta,\chi}^P$. On note $\bar{I}^P(\delta)$ l'espace de $ind_{K_0\cap P}^{K_0}\delta_{|K_0\cap P}$. Alors la restriction des fonctions à $K_0$ détermine un isomorphisme de $K_0$-modules entre $I_\chi^P(\delta)$ et $\bar{I}^P(\delta)$. On note $\overline{\pi}_{\delta,\chi}^P$ la représentation de $G$ sur $\bar{I}^P(\delta)$ déduite de $\pi_{\delta,\chi}^P$ par transport de structure via cet isomorphisme.
On note $C(G, P, \delta^*, \chi)$ l'espace des applications $\psi$ sur $G$, à valeurs dans le dual $V_\delta^*$ de $V_\delta$ qui sont faiblement continues, i.e telles que :
pour tout $v \in V_\delta$, $g \mapsto \langle \psi(g), v\rangle$ soit continue et :

$$\psi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\chi(m)\delta^*(m^{-1})\psi(g), g \in G, m \in M, u \in U. \tag{4.6}$$

Le groupe $G$ agit par représentation régulière gauche sur cet espace.
Si $\psi \in C(G, P, \delta^*, \chi)$ et $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, on note $\langle \psi, \varphi\rangle = \int_{K_0} \langle \psi(k), \varphi(k)\rangle dk$ qui définit un crochet de dualité $G$-invariant sur ces espaces (cf. (1.11)). (On note que cette intégrale existe car il s'agit de fonctions localement constantes sur le compact $K_0$). Ceci permet d'identifier les éléments de $C(G, P, \delta^*, \chi)$ à des éléments de $I_\chi^P(\delta)^*$.
On suppose maintenant que $(\delta, V_\delta)$ est une représentation bornée et irréductible de $M$.
Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $Re\chi\, \delta_P^{-1/2}$ strictement $P$-dominant.
Soit $\eta \in V_\delta^{*M\cap H}$. On lui associe l'appplication $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)$ définie sur $G$ à valeurs dans $V_\delta^*$ par les relations :

a/ $\varepsilon_e(P,\delta,\chi,\eta)=0$ en dehors de $HP$.

b/ Pour tout $(h,m,u)\in H\times M\times U$, (4.7)

$$\varepsilon_e(P,\delta,\chi,\eta)(hmu)=\delta_P^{-1/2}(m)\chi(m)\delta^*(m^{-1})\eta.$$

Remarquons que pour $g\in HP$, la décomposition $g=hmu$, $h\in H$, $m\in M$, $u\in U$ n'est pas unique mais $h$ varie dans une classe à droite modulo $M\cap H$ et $m$ dans une classe à gauche modulo $M\cap H$. La fonction $\varepsilon_e$ est donc bien définie puisque $\chi\delta_P^{-1/2}\in X(M)_\sigma$ et $\eta\in V_\delta^{*M\cap H}$. De plus $\delta$ étant bornée et $Re\chi\,\delta_P^{-1/2}$ étant strictement $P$-dominant, il résulte du théorème 4 (ii) et du théorème 3 de [BD] que :

La fonction $\varepsilon_e$ est élément de $C(G,P,\delta^*,\chi)$. (4.8)

On suppose maintenant que $P$ contient $P_\emptyset$. Alors $M$ contient $A_\emptyset$. On reprend les notations de 1.2 et on note $\overline{W}_{M,i}$ un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ des doubles classes $W_{H_i}(A_\emptyset)\setminus W(A_\emptyset)/W_M(A_\emptyset)$ contenant l'élément neutre $e$ et $\mathcal{W}_{M,i}^G:=\{x_ix|x\in\overline{W}_{M,i}\}$. Alors (cf. [BD] lemme 9) :

*Toute $(H,P)$-double classe ouverte de $G$ est de la forme $HyP$ où $y$ est un élément de :*

$$\mathcal{W}_M^G=\bigcup_{i\in I}\mathcal{W}_{M,i}^G$$

*En particulier toute $(H,P)$-double classe ouverte est de la forme $HyP$ où $y.P:=yPy^{-1}$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$. On notera $\overline{\mathcal{W}}_M^G$ un ensemble de représentants des $(H,P)$-doubles classes ouvertes, contenant $e$, et contenu dans $\mathcal{W}_M^G$.* (4.9)

A tout $w\in\overline{\mathcal{W}}_M^G$, on associe l'espace :

$$\mathcal{V}(\delta,w)=(V_\delta^*)^{M\cap w^{-1}.H} \tag{4.10}$$

et on considère la somme :

$$\mathcal{V}(\delta):=\oplus_{w\in\overline{\mathcal{W}}_M^G}\mathcal{V}(\delta,w). \tag{4.11}$$

La projection de $\mathcal{V}(\delta)$ sur $\mathcal{V}(\delta,w)$ parallèlement aux autres composantes sera notée $pr(\delta,w)$ ou $pr_w$.

Montrons que :

Si $w\in\mathcal{W}_M^G$, alors $w.P$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi $\sigma$-stable $w.M$. (4.12)

Comme $P_\emptyset\subset P$, on a :

$$A_0\subset M_0\subset M_\emptyset\subset P\cap\sigma(P)=M.$$

Donc $A_0$ est un tore déployé maximal de $M$. Il en résulte que $A_M\subset A_0$, donc $A_{M,\sigma}\subset A_\emptyset$. Ceci joint au lemme 4 montre que $P=P_\lambda$, $\lambda\in\Lambda(A_\emptyset)$. Alors $w.P=P_\mu$ où $\mu=w\lambda w^{-1}\in w.A_\emptyset$. Or $w.A_\emptyset$ est égal à l'un des $A_i$, c'est donc un tore $\sigma$-déployé maximal. Il en résulte que $\sigma(P_\mu) = P_{\sigma(\mu)} = P_{\mu^{-1}}$, et $P_{\mu^{-1}}$ est bien opposé à $P_\mu = w.P$. Le sous-groupe de Levi $\sigma$-stable de $P$ (resp. $w.P$) est alors égal au centralisateur dans $G$ de $\lambda$ (resp. $\mu = w\lambda w^{-1}$). Le sous-groupe de Levi $\sigma$-stable de $w.P$ est donc égal à $w.M$. D'où (4.12).

Pour $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ et $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $Re\chi\, \delta_P^{-1/2}$ strictement $P$-dominant on définit :

$$\varepsilon_w(P, \delta, \chi, \eta) = R_{w^{-1}}\varepsilon_e(w.P, w.\delta, w.\chi, \eta) \tag{4.13}$$

où $R$ désigne la représentation régulière droite de $G$ et $w.\delta$ (resp. $w.\chi$) la représentation de $w.M$ déduite de $\delta$ (resp. $\chi$) par transport de structure. Cette expression est bien définie car $\eta \in V_\delta^{*M\cap w^{-1}.H}$ équivaut à $\eta \in V_{w.\delta}^{*w.M\cap H}$ et $w.P$ est bien un $\sigma$-sous-groupe parabolique d'après (4.12).

Soit $\sigma_w$ l'involution rationnelle de $G$ définie sur $F$, donnée par :

$$\sigma_w(g) := w^{-1}\sigma(wgw^{-1})w, \quad g \in G.$$

**Lemme 11** *: (i) Soit $P = MU$ un $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $P_\emptyset$ et $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$. Alors $P$ est un $\sigma_w$-sous-groupe parabolique, $\sigma_w(P) = \sigma(P)$ et $P\cap\sigma_w(P) = M$.*
*(ii) $X(M)_\sigma \subset X(M)_{\sigma_w}$.*

*Démonstration:*

(i) Montrons que :

$$A_\emptyset \text{ est un tore } \sigma_w\text{-déployé.} \tag{4.14}$$

Soit $i \in I$ et $x \in \overline{W}_{M,i}$ tels que $w = x_i x$, alors

$$w.A_\emptyset = x_i x.A_\emptyset = x_i.A_\emptyset = A_i,$$

en particulier,

$$w.A_\emptyset \text{ est } \sigma\text{-déployé,} \tag{4.15}$$

donc :

$$\sigma_w(a) = w^{-1}\sigma(waw^{-1})w = w^{-1}(wa^{-1}w^{-1})w = a^{-1}, \quad a \in A_\emptyset.$$

On déduit (4.14) de l'égalité précédente.

D'autre part, on a l'inclusion $A_{M,\sigma} \subset A_M \subset A_{M_\emptyset}$, donc $A_{M,\sigma}$ est un tore $\sigma$-déployé de $A_{M_\emptyset}$. Donc $A_{M,\sigma} \subset A_\emptyset$ puisque $A_\emptyset$ est le plus grand tore $\sigma$-déployé de $A_{M_\emptyset}$. En particulier $A_{M,\sigma}$ est un tore $\sigma_w$-déployé.

D'après le lemme 4, il existe $\lambda \in A_{M,\sigma}$ tel que $P = P_\lambda$. Alors

$$\sigma_w(P) = P_{\sigma_w(\lambda)} = P_{\lambda^{-1}} = \sigma(P),$$

donc $M = P \cap \sigma_w(P)$, d'où (i).

(ii) Montrons que $w^{-1}\sigma(w) \in M_\emptyset$ :

D'après (4.15), on a :

$$\sigma(waw^{-1}) = wa^{-1}w^{-1}, \quad a \in A_\emptyset.$$

D'autre part,
$$\sigma(waw^{-1}) = \sigma(w)\sigma(a)\sigma(w^{-1}).$$
On déduit des deux égalités précédentes et du fait que $\sigma(a) = a^{-1}$ que :
$$wa^{-1}w^{-1} = \sigma(w)a^{-1}\sigma(w^{-1}).$$
Donc $w^{-1}\sigma(w)$ est élément de $Z_G(A_\emptyset)$ qui est égal à $M_\emptyset$ d'après (1.15). Ceci montre que $w^{-1}\sigma(w)$ est élément de $M_\emptyset$ comme désiré.
Soit $\chi \in X(M)_\sigma$. Comme $M_\emptyset \subset M$, on a :
$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi(w^{-1}\sigma(w))\chi(\sigma(m))\chi(w^{-1}\sigma(w))^{-1}, \quad m \in M.$$
Soit encore :
$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi(\sigma(m)), \quad m \in M.$$
Comme $\chi \in X(M)_\sigma$, on a donc :
$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi^{-1}(m), \quad m \in M.$$
Donc $\chi \in X(M)^{-\sigma_w}$. Par suite, $X(M)_\sigma$ est inclus dans $X(M)^{-\sigma_w}$. Or $X(M)_\sigma$ est connexe et contient l'élément neutre et $X(M)_{-\sigma_w}$ est la composante connexe de l'élément neutre dans $X(M)^{-\sigma_w}$, d'où (ii). $\square$

On associe enfin à tout élément $\eta$ de $\mathcal{V}(\delta)$ et à tout $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $Re\chi\,\delta_P^{-1/2}$ strictement $P$-dominant :
$$j(P,\delta,\chi,\eta) = \sum_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \varepsilon_w(P,\delta,\chi,pr(\delta,w)\eta). \tag{4.16}$$
On déduit de (4.8), (4.13) et de (4.16) que :

L'application $j(P,\delta,\chi,\eta)$ est un élément de $C(G,P,\delta^*,\chi)$ et on l'identifie à un élément $H$-invariant de $I_\chi^P(\delta)^*$. (4.17)

**Remarque 4** *: La condition $Re\chi - 2\rho_P$ strictement $P$-dominant dans le théorème 3 de [BD] où l'induction est non normalisée se traduit ici (où l'induction est normalisée) par la condition $Re\chi\,\delta_P^{-1/2}$ strictement $P$-dominant.*

On définit "les intégrales d'Eisenstein" :
Si $\varphi$ est un élément de l'espace $\bar{I}^P(\delta)$ , $E(P,\delta,\chi,\eta,\varphi)$ est la fonction sur $G/H$ définie par :
$$(E(P,\delta,\chi,\eta,\varphi))(gH) = \langle \bar{j}(P,\delta,\chi,\eta), \bar{\pi}_{\delta,\chi}^P(g^{-1})\varphi\rangle,\ g \in G, \tag{4.18}$$
où $\bar{j}(P,\delta,\chi,\eta)$ est l'élément de $\bar{I}^P(\delta)^*$ déduit de $j(P,\delta,\chi,\eta)$ par transport de structure à l'aide de la restriction des fonctions à $K_0$.

Remarquons que si $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, et si $\bar{\varphi}$ est sa restriction à $K_0$,
$$(E(P,\delta,\chi,\eta,\bar{\varphi}))(gH) = \langle j(P,\delta,\chi,\eta), \pi_{\delta,\chi}^P(g^{-1})\varphi\rangle,\ g \in G.$$

Soient $P = MU$ et $Q = MV$ deux $\sigma$-sous-groupes paraboliques de même sous-groupe de Levi, on rappelle que l'on note $\bar{Q} := \sigma(Q)$.

Soit $\psi$ une fonction sur $V/V \cap U$ à valeurs dans $V_\delta$. Supposons qu'il existe $v_0 \in V_\delta$ tel que pour tout $\check{v}_0 \in \check{V}_\delta$, l'intégrale

$$\int_{V/V\cap U} \langle \psi(\dot{v}), \check{v}_0 \rangle \, d\dot{v}$$

soit absolument convergente, égale à $\langle v_0, \check{v}_0 \rangle$. Alors $v_0$ est unique car la dualité entre $\check{V}$ et $V$ est non dégénérée. Dans ce cas nous dirons que l'intégrale $\int_{V/V\cap U} \psi(\dot{v}) \, d\dot{v}$ converge et nous poserons :

$$\int_{V/V\cap U} \psi(\dot{v}) \, d\dot{v} := v_0. \tag{4.19}$$

Il résulte de cette définition que :

$$\int_{V/V\cap U} \delta(m)\psi(\dot{v}) \, d\dot{v} = \delta(m) \int_{V/V\cap U} \psi(\dot{v}) \, d\dot{v}, \quad m \in M. \tag{4.20}$$

On rappelle (cf. [Wald ], théorème IV.1.1 et équation IV.1 (10)) que :

Il existe une constante $R_\delta > 0$ telle que, pour tout $\chi \in X(M)$, vérifiant :

$$\langle Re\chi, \alpha \rangle \; > R_\delta, \quad \alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{Q})$$

telle que, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$ et $g \in G$, l'intégrale $\int_{V/V\cap U} \varphi(g\dot{v}) \, d\dot{v}$ converge et l'application $g \mapsto \int_{V/V\cap U} \varphi(g\dot{v}) d\dot{v}$ définit un élément de $I_\chi^Q(\delta)$ noté $A(Q, P, \delta, \chi)(\varphi)$. De plus, $A(Q, P, \delta, \chi)$ est un opérateur d'entrelacement non nul entre $I_\chi^P(\delta)$ et $I_\chi^Q(\delta)$. (4.21)

L'application $\chi \mapsto A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ admet un prolongement rationnel au ssens de [Wald] IV.1 que l'on note de même. (4.22)

Il existe un polynôme $q$ non nul sur $X(M)$ tel que si $\chi \in X(M)$ et si $q(\chi) \neq 0$, l'opérateur $A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ est défini et non nul (cf. [Wald] IV(10)). (4.23)

Le symbole $a \to_P \infty$ (respectivement $a \to_{\bar{P}} \infty$) signifie que $a \in A_M$ et que $|\alpha(a)|_F \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$ (resp. $\Sigma(\bar{P})$).

On rappelle que $(\delta, V_\delta)$ est une représentation bornée et irréductible de $M$.

**Théorème 5** *: Avec les notations ci-dessus, soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant (4.21) pour $Q = \bar{P}$ et tel que $Re\chi \, \delta_P^{-1/2}$ soit strictement $P$-dominant. Alors, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, pour tout $g \in G$, et pour tout $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$, on a :*

$$lim_{a \to_{\bar{P}} \infty} \chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)(E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(gaH) = \langle pr_e\eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(g) \rangle$$

*où $\mu_\delta$ est le caractère central de $\delta$ et $\bar{\varphi}$ est la restriction de $\varphi$ à $K_0$.*

On remarque que l'ensemble des $\chi$ vérifiant l'hypothèse du théorème contient l'ensemble $\{\chi \in X(M)_\sigma / \langle Re\chi, \alpha\rangle > R, \alpha \in \Sigma(P)\}$ pour $R$ assez grand.

*Démonstration:*

Par linéarité, on peut supposer $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$ ce que l'on fait dans la suite. En remplaçant $\varphi$ par $L_{g^{-1}}\varphi$ pour $g \in G$, on se ramène à démontrer le théorème pour $g = e$. Avec nos hypothèses, $j(P, \delta, \chi, \eta)$ est élément de $C(G, P, \delta^*, \chi)$ (cf. (4.17)). Donc pour $a \in A_M$, on a :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(aH) = \int_{K_0} \langle (j(P, \delta, \chi, \eta))(k), \varphi(ak)\rangle dk.$$

On pose $E := E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi})$ et $j := j(P, \delta, \chi, \eta)$. On déduit de (1.10) que l'intégrale $\int_{\bar{U}} \langle j(\bar{u}), \varphi(a\bar{u})\rangle d\bar{u}$ est absolument convergente et que :

$$E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(\bar{u}), \varphi(a\bar{u})\rangle d\bar{u}.$$

En changeant $\bar{u}$ en $a\bar{u}a^{-1}$ et en utilisant les propriétés de covariance à droite de $\varphi$, on a :

$$\chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u}.$$

Si $a \to_{\bar{P}} \infty$, il est clair que $a^{-1}\bar{u}a$ converge vers $e$ et l'expression sous le signe somme converge vers $\langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle$ pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$.

Il suffit donc de vérifier que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, et de montrer que :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \langle pr_e\eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(e)\rangle, \quad \varphi \in I_\chi^P(\delta). \tag{4.24}$$

Passons à la majoration de $|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle|$.

Posons :

$$\chi' := \chi\delta_P^{-1/2},$$

de sorte que $\chi' \in X(M)_\sigma$ et que $Re\chi'$ est strictement $P$-dominant.

Soit $\bar{u} \in \bar{U} \cap HwP$. Ecrivons $\bar{u} = hwmu$ où $h \in H$, $m \in M$, $u \in U$. Soit $h_w := w^{-1}hw$. On a :

$$\bar{u} = wk(h_w)m(h_w)u(h_w)mu,$$

où, avec les notations de 4.1, $h_w = k(h_w)m(h_w)u(h_w)$. Donc :

$$m(\bar{u}) = m(wk(h_w))m(h_w)m.$$

Ce qui implique :

$$\chi'(m(\bar{u})) = \chi'(m(wk(h_w)))\chi'(m(h_w))\chi'(m). \tag{4.25}$$

On vérifie aisément que $w^{-1}Hw$ est le groupe des points fixes de l'involution $\sigma_w = Adw^{-1} \circ \sigma \circ Adw$. En utilisant le lemme 11, on peut appliquer le lemme 9 (ii) à $\chi'$ avec $w^{-1}Hw$ au lieu de $H$. Donc :

Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$|\chi'(m(h_w))| \geq c_1, \quad h \in H. \tag{4.26}$$

De plus, $(m(wk(h_w)))^{-1}$ reste dans une partie compacte lorsque $h$ varie dans $H$. Donc:

Il existe $c_2 > 0$ telle que

$$|\chi'((m(wk(h_w)))^{-1})| \leq c_2. \tag{4.27}$$

Donc, on déduit de (4.25) que :

$$|\chi'(m)| \leq c_1^{-1}c_2|\chi'(m(\bar{u}))|, \; \bar{u} \in \bar{U} \cap HwP. \tag{4.28}$$

Soit $\bar{u} \in \bar{U}$. Si $a^{-1}\bar{u}a \notin HwP$, on a $j(a^{-1}\bar{u}a) = 0$. Si $a^{-1}\bar{u}a \in HwP$, on écrit $a^{-1}\bar{u}a = h_0wm_0u_0$ avec $h_0 \in H$, $m_0 \in M$, $u_0 \in U$, et l'on a :

$$j(a^{-1}\bar{u}a) = \delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0)\delta^*(m_0^{-1})\eta. \tag{4.29}$$

D'autre part, on a :

$$\varphi(\bar{u}) = \delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\delta_\chi((m(\bar{u}))^{-1})\varphi(k(\bar{u})). \tag{4.30}$$

Montrons qu'il existe une constante $c'$, indépendante de $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, telle que :

$$\begin{aligned} |\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle| \leq c'|\chi'(m(\bar{u}))\delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\chi((m(\bar{u}))^{-1})| \\ \times|\langle \delta^*(m_0^{-1})\eta, \delta((m(\bar{u}))^{-1})\varphi(k(\bar{u}))\rangle|, \; a \in A_M^-. \end{aligned} \tag{4.31}$$

En effet, d'après (4.29) et (4.30), on a

$$|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle| =$$

$$|\delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0)\delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\chi((m(\bar{u}))^{-1})| \times |\langle \delta^*(m_0^{-1})\eta, \delta(m^{-1}(\bar{u}))\varphi(k(\bar{u}))\rangle|.$$

Or :

$$\delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0) = \chi'(m_0)$$

et d'après (4.28) appliquée à $a^{-1}\bar{u}a$ :

$$|\chi'(m_0)| \leq c_1^{-1}c_2|\chi'(m(a^{-1}\bar{u}a))|.$$

De plus, d'après le lemme 10, il existe $c_3 > 0$ telle que :

$$|\chi'(m(a^{-1}\bar{u}a))| \leq c_3|\chi'(m(\bar{u}))|.$$

En posant $c' := c_1^{-1}c_2c_3$, on obtient (4.31). Comme $\chi'\chi^{-1} = \delta_P^{-1/2}$, on déduit de (4.31) que:

$$|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle| \leq c'|\delta_P^{-1}(m(\bar{u}))| \times |\langle \delta^*(m(\bar{u})m_0^{-1})\eta, \varphi(k(\bar{u}))\rangle|. \tag{4.32}$$

Montrer que la partie droite de l'inégalité est bornée revient à montrer que pour $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, $|\langle \delta^*(m(\bar u)m_0^{-1})\eta, \varphi(k(\bar u))\rangle|$ est bornée indépendamment de $\bar u$ et de $a$.
La fonction $\varphi$ étant invariante à gauche par un sous-groupe compact ouvert $K_\varphi$, $\varphi(k)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $V_\delta$ lorsque $k$ décrit $K_0$, que l'on note $v_1, ..., v_l$.
Alors, puisque $\delta$ est bornée et irréductible, d'après le théorème 4 (ii), il existe $C > 0$ tel que :

$$|\langle \delta^*(m)\eta, v_i\rangle| \leq C,\ i = 1, \dots, l,\ m \in M.$$

On déduit alors de (4.32) que :

$$|\langle j(a^{-1}\bar u a), \varphi(\bar u)\rangle| \ \leq C|\delta_P^{-1}(m(\bar u))|,\ \bar u \in \bar U,\ a \in A_M^-. \tag{4.33}$$

Mais, (cf. [Wald] I.1.(2)),

$$\int_{\bar U} |\delta_P^{-1}(m(\bar u))| d\bar u < +\infty. \tag{4.34}$$

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc réunies. Il reste à montrer (4.24).
Le théorème de convergence dominée montre que :

$$\int_{\bar U} |\langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle| d\bar u < +\infty.$$

L'élément $\varphi$ de $I_\chi^P(\delta)$ est fixé par un sous-groupe compact ouvert de $G$ qui contient un sous-groupe compact ouvert $K_M$ de $M$. Donc :

$$\int_{\bar U} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u = \int_{\bar U} \langle pr_e\eta, \varphi(k_M\bar u)\rangle d\bar u, \quad k_M \in K_M.$$

En utilisant les propriétés de $\varphi$, on a :

$$\int_{\bar U} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u = \delta_P^{-1/2}(k_M) \int_{\bar U} \langle \delta^*(k_M)pr_e\eta, \chi(k_M^{-1})\varphi(k_M\bar u k_M^{-1})\rangle d\bar u, \quad k_M \in K_M.$$

Or, $\chi$ et $\delta_P$ étant des caractères non ramifiés, $\delta_P^{-1/2}(k_M) = \chi(k_M^{-1}) = 1$ pour $k_M \in K_M$.
En changeant de variable, on a :

$$\int_{\bar U} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u = \int_{\bar U} \langle \delta^*(k_M)pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u, \quad k_M \in K_M,$$

et l'intégrale est toujours absolument convergente.
On a donc, en intégrant par rapport à $k_M$:

$$\int_{\bar U} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u = \int_{K_M} \int_{\bar U} \langle \delta^*(k_M)pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle d\bar u dk_M,$$

où $dk_M$ est la mesure de Haar normalisée sur $K_M$.
En procédant de la même manière, on obtient :

$$\int_{\bar U} |\langle pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle| d\bar u = \int_{K_M} \int_{\bar U} |\langle \delta^*(k_M)pr_e\eta, \varphi(\bar u)\rangle| d\bar u dk_M < +\infty. \tag{4.35}$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à (4.35) et on obtient :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{\bar{U}} \int_{K_M} \langle \delta^*(k_M) pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle dk_M d\bar{u}.$$

On note $e_{K_M} pr_e\eta$ l'élément de $\check{V}_\delta$ défini par :

$$\langle e_{K_M} pr_e\eta, v\rangle = \int_{K_M} \langle pr_e\eta, \delta(k_M)v\rangle dk_M, \quad v \in V_\delta,$$

l'invariance de $v$ par rapport à un sous-groupe ouvert compact de $M$ impliquant que l'intégrale se réduit à une somme finie. On a donc :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{\bar{U}} \langle e_{K_M} pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u}.$$

D'après la définition de $\int_{\bar{U}} \varphi(\bar{u})d\bar{u}$ (cf. (4.19)), il en résulte :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \langle e_{K_M} pr_e\eta, \int_{\bar{U}} \varphi(\bar{u})d\bar{u}\rangle,$$

Donc :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{K_M} \langle pr_e\eta, \delta(k_M) \int_{\bar{U}} \varphi(\bar{u})d\bar{u}\rangle dk_M.$$

Soit encore, grâce à (4.20) :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{K_M} \langle pr_e\eta, \int_{\bar{U}} \delta(k_M)\varphi(\bar{u})d\bar{u}\rangle dk_M.$$

Utilisant le fait que $\varphi$ est $K_M$-invariante à gauche et $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, on a :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{K_M} \langle pr_e\eta, \int_{\bar{U}} \varphi(k_M\bar{u}k_M^{-1})d\bar{u}\rangle dk_M.$$

En changeant $\bar{u}$ en $k_M\bar{u}k_M^{-1}$, on déduit :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \int_{K_M} \langle pr_e\eta, \int_{\bar{U}} \varphi(\bar{u})d\bar{u}\rangle dk_M.$$

Soit encore :

$$\int_{\bar{U}} \langle pr_e\eta, \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u} = \langle pr_e\eta, \int_{\bar{U}} \varphi(\bar{u})d\bar{u}\rangle.$$

Tenant compte de (4.21), on en déduit (4.24), ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Soient $P = MU$ et $Q = LV$ deux $\sigma$-sous-groupes paraboliques de $G$ tels que $P_\emptyset \subset P \subset Q$. Alors $M \subset L$ et $V \subset U$. Soient $\bar{U}$ et $\bar{V}$ définis par $\bar{P} = M\bar{U}$ et $\bar{Q} = L\bar{V}$. On pose $\bar{U}' := \bar{U} \cap L$. On reprend les notations du théorème 5. Soit $Q'$ le $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ égal à $(P \cap L)\bar{V}$, qui admet $M$ pour sous-groupe de Levi $\sigma$-stable.

**Théorème 6** *: Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant (4.21) pour $P$ et $Q'$ et tel que $Re\chi\, \delta_P^{-1/2}$ soit strictement $P$-dominant. Alors :*

$$\forall \varphi \in I_\chi^P(\delta), \forall g \in G, \forall \eta \in \mathcal{V}(\delta),$$

$$lim_{a \to_{\bar{Q}} \infty} \chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)(E(P,\delta,\chi,\eta,\bar{\varphi}))(gaH) = \int_{\bar{U}'} \langle j(\bar{u}'), (A(Q',P,\delta,\chi)(\varphi))(\bar{u}')\rangle d\bar{u}'$$

*où $\mu_\delta$ est le caractère central de $\delta$, $\bar{\varphi}$ est la restriction de $\varphi$ à $K_0$.*

*Démonstration:*
Par linéarité, on peut supposer $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$ ce que l'on fait dans la suite. En remplaçant $\varphi$ par $L_{g^{-1}}\varphi$ pour $g \in G$, on se ramène à démontrer le théorème pour $g = e$. D'après le début de la démonstration du théorème 5, on a :

$$\chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u})\rangle d\bar{u},\ a \in A_L. \tag{4.36}$$

On a l'homéomorphisme $\bar{U}' \times \bar{V} \to \bar{U}$, $(\bar{u}', \bar{v}) \mapsto \bar{u}'\bar{v}$ et, pour un bon choix de mesures,

$$\int_{\bar{U}} f(\bar{u})\, d\bar{u} = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} f(\bar{u}'\bar{v}) d\bar{u}' d\bar{v},\ f \in C_c^\infty(G). \tag{4.37}$$

On a donc, d'après (4.36) :

$$\chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} \langle j(a^{-1}\bar{u}'aa^{-1}\bar{v}a), \varphi(\bar{u}'\bar{v})\rangle d\bar{u}' d\bar{v}.$$

Or $a \in A_L$ et $\bar{u}' \in \bar{U} \cap L$. Donc $a\bar{u}' = \bar{u}'a$ et :

$$\chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} \langle j(\bar{u}'a^{-1}\bar{v}a), \varphi(\bar{u}'\bar{v})\rangle d\bar{u}' d\bar{v}.$$

Si $a \to_{\bar{Q}} \infty$, il est clair que $a^{-1}\bar{v}a$ converge vers $e$ et l'expression sous le signe somme converge simplement vers $\langle j(\bar{u}'), \varphi(\bar{u}'\bar{v})\rangle$.
On peut appliquer le théorème de convergence dominée grâce aux équations (4.33), (4.34) et (4.37). On peut alors passer à la limite et appliquer le théorème de Fubini. On a alors :

$$lim_{a \to_{\bar{Q}} +\infty} \chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}'} \int_{\bar{V}} \langle j(\bar{u}'), \varphi(\bar{u}'\bar{v})\rangle d\bar{v} d\bar{u}'.$$

On procède comme dans la preuve de (4.24), pour montrer que :

$$\int_{\bar{V}} \langle j(\bar{u}'), \varphi(\bar{u}'\bar{v})\rangle d\bar{v} = \langle j(\bar{u}'), \int_{\bar{V}} \varphi(\bar{u}'\bar{v}) d\bar{v}\rangle.$$

On a alors:

$$lim_{a \to_{\bar{Q}} \infty} \chi(a)\mu_\delta(a)\delta_P^{-1/2}(a)E(aH) = \int_{\bar{U}'} \langle j(\bar{u}'), \int_{\bar{V}} \varphi(\bar{u}'\bar{v}) d\bar{v}\rangle d\bar{u}'.$$

On remarque que :

$$(A(Q', P, \delta, \chi)(\varphi))(\bar{u}') = \int_{\bar{V}} \varphi(\bar{u}'\bar{v}) d\bar{v}.$$

On a donc :

$$lim_{a \to_{\bar{Q}} \infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}'} \langle j(\bar{u}'), (A(Q', P, \delta, \chi)(\varphi))(\bar{u}') \rangle d\bar{u}',$$

d'où le théorème. □

# 5 Une propriété de la décomposition de Cartan.

## 5.1 Transport de structure.

Soit $P = MU$ un $\sigma-$sous-groupe parabolique de $G$ contenant $A_\emptyset$. Soit $y = x_i x \in \mathcal{W}_M^G$ (cf. 4.2 pour notations), Alors, (cf. (4.12)), $y.P$ est un $\sigma$-sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi $\sigma$-stable $w.M = wMw^{-1}$. Pour ce $\sigma$-sous-groupe parabolique qui ne contient pas $A_\emptyset$ mais $A_i$, on peut définir $\mathcal{W}_{y.M}^G$ de même qu'en (4.9), ainsi que $\mathcal{V}(y.\delta, w)$ et $\mathcal{V}(y.\delta)$. En particulier, on peut imposer à $\mathcal{W}_{y.M}^G$ de contenir $y^{-1}$, qui est un représentant de la $(H, y.P)$ double classe ouverte $Hy^{-1}yPy^{-1} = HPy^{-1}$. Alors $V_\delta^{*M \cap H} = V_{y.\delta}^{*y.M \cap y.H}$ donc :

$$\mathcal{V}(y.\delta, y^{-1}) = \mathcal{V}(\delta, e).$$

Si $\eta_e \in \mathcal{V}(\delta, e)$, on notera $\eta_{y^{-1}}$ l'élément correspondant dans $\mathcal{V}(y.\delta, y^{-1})$. On note $R$ la représentation régulière droite. Avec ces notations, soit $(\delta_0, V_{\delta_0})$ la représentation triviale de $M$, soit $\eta_e$ un élément non nul de $V_{\delta_0}^{*M \cap H}$et soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que :

$$\chi \text{ vérifie (4.21) pour } Q = \bar{P} \text{ et } Re\chi\, \delta_P^{-1/2} \text{ soit strictement } P\text{-dominant.} \tag{5.1}$$

Montrons que :

$$\langle j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle = \langle j(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}}), \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1}) R_y \varphi \rangle, \tag{5.2}$$

pour $\varphi \in I_\chi^P(\delta_0)$, $y \in \mathcal{W}_M^G$.

En effet, comme on le vérifie aisément, $R_y$ est un opérateur d'entrelacement entre $(\pi_{\delta_0, \chi}^P, I_\chi^P(\delta_0))$ et $(\pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}, I_{y.\chi}^{y.P}(y.\delta_0))$, i.e :

$$\pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi = R_{y^{-1}} \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1}) R_y \varphi,\ \varphi \in I_\chi^P(\delta_0),\ g \in G,\ y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \tag{5.3}$$

D'où :

$$\langle j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle = \langle R_y j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1}) R_y \varphi \rangle. \tag{5.4}$$

Or les fonctions de $G$ dans $V_{y.\delta_0}^*$ : $j(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}})$ et $R_y j(P, \delta_0, \chi, \eta_e)$ sont toutes deux nulles en dehors de $Hy^{-1}(y.P)$, coincident en $y^{-1}$, sont $H$-invariantes à gauche et vérifient la même relation de covariance à droite sous $P$ donc elles sont nécessairement égales. On a alors :

$$\langle j(P,\delta_0,\chi,\eta_e),\pi^P_{\delta_0,\chi}(g^{-1})\varphi\rangle = \langle j(y.P,y.\delta_0,y.\chi,\eta_{y^{-1}}),\pi^{y.P}_{y.\delta_0,y.\chi}(g^{-1})R_y\varphi\rangle. \tag{5.5}$$

Soit encore, avec les notations de (4.18) :

$$(E(P,\delta_0,\chi,\eta_e,\bar\varphi))(gH) = (E(y.P,y.\delta_0,y.\chi,\eta_{y^{-1}},\overline{R_y\varphi}))(gH). \tag{5.6}$$

## 5.2

**Théorème 7** *: Il existe $T>0$ tel que la réunion $\cup_{y\in\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}}\Omega\Lambda^-_T(A_\emptyset)y^{-1}H$ soit disjointe.*

*Démonstration:*
Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, comme $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ est fini :

*il existe $y,\ y'\in\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ avec $y\neq y'$ et une suite $(g_n)$ telle que :*

$$\begin{aligned} g_n &= \omega_n\lambda_n y^{-1} = \omega_n y^{-1}\lambda_{y,n}\\ \textit{et}\quad g_n &= \omega'_n\lambda'_n y'^{-1} = \omega'_n y'^{-1}\lambda'_{y',n}\end{aligned} \tag{5.7}$$

*où $\omega_n,\omega'_n\in\Omega$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n,\lambda'_n\in\Lambda^-_n(A_\emptyset)$, et $\lambda_{y,n}:=y\lambda_n y^{-1}$, $\lambda'_{y',n}:=y'\lambda'_n y'^{-1}$.*

Montrons que c'est impossible.
On note $P$ (respectivement $P'$) le $\sigma$-sous-groupe parabolique de $G$ égal à $y.P_\emptyset$, (respectivement $y'.P_\emptyset$), et $\bar P:=y.\bar P_\emptyset$ (respectivement $\bar P':=y'.\bar P_\emptyset$). Alors, comme $\lambda_n$ et $\lambda'_n$ sont des éléments de $\Lambda^-_n(A_\emptyset)$, on a :

$$\lambda_{y,n}\to_{\bar P}\infty \text{ et } \lambda'_{y',n}\to_{\bar P'}\infty \tag{5.8}$$

Par extraction, on peut supposer que $\omega_n$ et $\omega'_n$ convergent dans $\Omega$ vers $\omega$ et $\omega'$ puisque $\Omega$ est compact.
Soit $\delta_0$ la représentation triviale de $M_\emptyset$. Alors $\delta:=y.\delta_0$ est la représentation triviale de $M$. Pour $\chi\in X(M)_\sigma$ et $\varphi\in I^P_\chi(\delta)$, on pose :

$$A_\chi(\varphi):=A(\bar P,P,\delta,\chi)(\varphi)\in Ind^G_{\bar P}V_{\delta_\chi}.$$

On reprend les notations du théorème 5, et soit $\chi_0\in X(M_\emptyset)_\sigma$ vérifiant (5.1) et tel que $A_{y.\chi_0}$ soit non nul (cf. (4.23)). Par symétrie des rôles de $y$ et $y'$ et par extraction, on peut supposer que :

$$(\chi_0\delta^{-1/2}_{P_\emptyset})(\lambda_n^{-1})\geq(\chi_0\delta^{-1/2}_{P_\emptyset})(\lambda_n'^{-1}),\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{5.9}$$

ce que l'on fait. On pose $\chi:=y.\chi_0$. Alors :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\bar\varphi))(g_nH) = \langle\bar j(P,\delta,\chi,\eta_e),\bar\pi^P_{\delta,\chi}(\lambda^{-1}_{y,n})\bar\pi^P_{\delta,\chi}(y\omega_n^{-1})\bar\varphi\rangle,\quad \varphi\in I^P_\chi(\delta).$$

On pose $v_n := y\omega_n^{-1}$. Alors $v_n$ converge vers la limite $v = y\omega$. Donc il existe un rang $n_\varphi \in \mathbb{N}$ à partir duquel le fixateur de $\varphi$ contient $v^{-1}v_n$. En remarquant que $v_n = v(v^{-1}v_n)$, on obtient :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\bar{\varphi}))(g_nH) = (E(P,\delta,\chi,\eta_e,\bar{\pi}^P_{\delta,\chi}(v)\bar{\varphi}))(\lambda_{y,n}H),\ \varphi \in I^P_\chi(\delta),\ n \geq n_\varphi.$$

Comme $P = y.P_\emptyset$, $\chi = y.\chi_0$ et $\delta$ est la représentation triviale de $M$, on a $\delta_P(\lambda_{y,n}) = \delta_{P_\emptyset}(\lambda_n)$, $\chi(\lambda_{y,n}) = \chi_0(\lambda_n)$. D'après (5.8), le théorème 5 implique :

$$lim_{n\to+\infty}\chi_0(\lambda_n)\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n)(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\bar{\varphi}))(g_nH) = \langle pr_e\eta_e, (A(\bar{P},P,\delta,\chi)(\varphi))(v)\rangle,$$

pour tout $\varphi \in I^P_\chi(\delta)$.
D'après les hypothèses, l'application $A_\chi := A_{y.\chi_0}$ est non nulle. Par $G$-invariance, il existe $\varphi_0 \in \bar{I}^P(\delta)$ telle que $(A_\chi(\varphi_0))(v)$ soit non nulle. On pose $C := (A_\chi(\varphi_0))(v)$. On a alors :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\varphi_0))(g_nH) \sim \chi_0(\lambda_n^{-1})\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1})C.$$

où :
$$lim_{n\to+\infty}\chi_0(\lambda_n^{-1})\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}) = +\infty, \tag{5.10}$$

car $Re\chi_0\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}$ est strictement $P_\emptyset$-dominant et $\lambda_n \to_{\bar{P}_\emptyset} \infty$, puisque $\lambda_n \in \Lambda_n^-(A_\emptyset)$. En refaisant le calcul pour $g_n = \omega'_n y'^{-1}\lambda'_{y',n}$, on trouve l'existence d'un rang $n_1$ à partir duquel :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\bar{\varphi}_0))(g_nH) = \langle\bar{j}(P,\delta,\chi,\eta_e), \bar{\pi}^P_{\delta,\chi}(\lambda'^{-1}_{y',n})\bar{\varphi}'_0\rangle,$$

pour $n \geq n_1$, et $\varphi'_0 = \bar{\pi}^P_{\delta,\chi}(v')\varphi_0$ où $v' = lim_{n\to+\infty}y'\omega'^{-1}_n$.
Soit $x' := y'y^{-1}$, alors $x'Px'^{-1}$ est le $\sigma$-sous-groupe parabolique $P'$ de $G$. Notons que $Hx'P = Hy'(y^{-1}Py)y^{-1} = Hy'P_\emptyset y^{-1}$ donc la $(H,P)$ double classe $Hx'P$ est ouverte. On peut alors appliquer ce qu'on a vu en 5.1 au sous-groupe parabolique $P$ de $G$, en prenant pour $y'$ le représentant de la $(H,P)$ double classe $x'$. On obtient alors :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\varphi_0))(g_nH) = (E(x'.P,x'\delta,x'\chi,\eta_{x'^{-1}},\psi'_0)(\lambda'_{y',n}H)$$

où l'on a posé $\psi'_0 = R_{x'}(\varphi'_0)$.
Comme $y \neq y' \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$, on a $HyP_\emptyset \neq Hy'P_\emptyset$. Tenant compte de la définition de $P$ et $x'$, on en déduit que $H(x'.P) \neq Hx'^{-1}(x'.P)$. Donc $pr_e\eta_{x'^{-1}} = 0$. Comme $\lambda'_{y',n} \to_{\overline{x'.P}} \infty$, il résulte du théorème 5 et des relations de conjugaison qu'il existe une suite $\varepsilon_n$ de limite nulle telle que :

$$(E(P,\delta,\chi,\eta_e,\varphi_0))(g_nH) = \varepsilon_n\chi_0(\lambda'^{-1}_n)\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda'^{-1}_n) \tag{5.11}$$

On pose :

$$x_n := (E(P,\delta,\chi,\eta_e,\varphi_0))(g_nH), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$z_n := \chi_0(\lambda_n^{-1})\delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

et :

$$z'_n := \chi_0(\lambda'^{-1}_n)\delta^{-1/2}_{P_\emptyset}(\lambda'^{-1}_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, d'après (5.10) :

$$x_n \sim Cz_n. \tag{5.12}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Cz_n$ est non nul, et d'après (5.12) :

$$x_n(Cz_n)^{-1} \to 1$$

D'autre part, d'après (5.11), il existe une suite $\varepsilon_n$ de limite nulle telle que :

$$x_n = \varepsilon_n z'_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$|\varepsilon_n z'_n||Cz_n|^{-1} \to 1. \tag{5.13}$$

Mais, d'après (5.9), on a :

$$0 < z'_n \leq z_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$|\varepsilon_n z'_n||Cz_n|^{-1} \leq |\varepsilon_n C^{-1}|,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Comme $\varepsilon_n$ est de limite nulle, on trouve alors une contradiction entre (5.13) et (5.14). On en déduit que (5.7) est impossible. D'où le théorème. □

# 6 Appendice.

**Définition 2** *: Soit $A$ un tore déployé sur $F$ et soit $\mathcal{X} := (\chi_1, \ldots, \chi_l)$ une suite finie de caractères continus de $A$ dans $\mathbb{C}^*$. On appelle fonction de type $\mathcal{X}$ toute fonction $\varphi$ de $A$ dans $\mathbb{C}$ telle que :*

$$((L_a - \chi_1(a))...(L_a - \chi_l(a))\varphi)(x) = 0,\ \ a,\ x \in A.$$

Soit $A$ un tore déployé sur $F$ et soit $A^1$ le plus grand sous-groupe ouvert compact de $A$, de sorte que $A = \Lambda(A)A^1$.

**Lemme 12** *: (i) Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction lisse. Alors $f$ est $A$-finie si et seulement s'il existe une suite finie $\mathcal{X}$ de caractères lisses de $A$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que $f$ soit de type $\mathcal{X}$ sur $A$.*

*(ii) Soient $E := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in E^*$ linéairement indépendants, on pose*

$$\Gamma := \{\lambda \in \Lambda(A) |\ \alpha_i(\lambda) \leq 0,\ i = 1, \ldots, l\}$$

*et $B := A^1 \times \Gamma$.*

*Si $f$ est une fonction de $A$ dans $\mathbb{C}$, lisse, $A$-finie et nulle sur $B$, alors $f$ est nulle sur $A$.*

*Démonstration:*

(i) Si $f$ est $A$-finie, en triangulant l'action du groupe commutatif $A$ dans l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les translatés de $f$ par les éléments de $A$, on trouve l'existence de caractères $(\chi_1, \ldots, \chi_l)$ de $A$ dans $\mathbb{C}$ tels que l'action de $A$ dans une base bien choisie s'écrive :

$$\begin{pmatrix} \chi_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_l \end{pmatrix}$$

Ces caractères sont lisses puisque $f$ l'est et $f$ est donc de type $(\chi_1, \ldots, \chi_l)$.

Supposons maintenant que $f$ soit une fonction lisse de type $\mathcal{X}$ sur $A$, où $\mathcal{X} = (\chi_1, \ldots, \chi_l)$ est une suite finie de caractères lisses de $A$ dans $\mathbb{C}$. On note $A^{1'}$ le sous-groupe ouvert compact de $A$ par lequel $f$ est invariante. Montrons que $f$ est $A$-finie. Pour cela, montrons que l'espace des fonctions lisses de $A$ dans $\mathbb{C}$, invariantes par $A^{1'}$ et de type $\mathcal{X}$ est un espace de dimension finie. On notera $C^\infty(A/A^{1'})_\mathcal{X}$ cet espace. Soit $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_\mathcal{X}$ l'ensemble des éléments $f$ de l'espace $\mathbb{C}[\Lambda(A)]$ tels que :

$$(L_\lambda - \chi_1(\lambda)) \ldots (L_\lambda - \chi_l(\lambda))f = 0, \ \lambda \in \Lambda(A).$$

On considère l'application qui à $f \in C^\infty(A/A^{1'})_\chi$ associe la famille $(\varphi_\omega)_{\omega \in A^1/A^{1'}}$ d'éléments de $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_\mathcal{X}$ définie par $\varphi_\omega(\lambda) = f(\lambda\omega)$, $\lambda \in \Lambda(A)$, $\omega \in A^1/A^{1'}$. Elle est injective, d'où le résultat puisque $A^1/A^{1'}$ est fini et que $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_\mathcal{X}$ est de dimension finie (cf. [Del], lemme 3.14). On a bien montré que $C^\infty(A/A^{1'})_\mathcal{X}$ est de dimension finie. Comme pour tout élément $a$, $a'$ de $A$, $L_{a'}$ commute à $(L_a - \chi_1(a))...(L_a - \chi_l(a)$, l'espace $C^\infty(A/A^{1'})_\chi$ est stable par les translations à gauche par les éléments de $A$. Donc les translatés de $f \in C^\infty(A/A^{1'})_\chi$ par les éléments de $A$ sont encore dans cet espace. Cela prouve (i).

(ii) D'après (i), il existe une suite finie de caractères lisses de $A$ dans $\mathbb{C}$ notée $\mathcal{X}$ telle que $f$ soit de type $\mathcal{X}$ sur $A$. En reprenant les notations de la démonstration de (i), il suffit de montrer que pour $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction $\varphi_\omega$ de type $\mathcal{X}$ sur $\Lambda(A)$, est nulle sur $\Lambda(A)$. Par hypothèse, $\varphi_\omega$ est nulle sur $\Gamma$. De plus (cf. [Del], lemme 14), il existe un ensemble fini $F \subset \Lambda(A)$ tel que :

$$\text{Toute fonction } g \text{ de type } \mathcal{X} \text{ sur } \Lambda(A) \text{ nulle sur } F \text{ est nulle sur } \Lambda(A). \tag{6.1}$$

Soit $\lambda_0 \in \Lambda(A)$ tel que $\alpha_i(\lambda_0) < 0$, $i = 1, \ldots, l$, qui existe d'après l'indépendance linéaire des $\alpha_i$, et soit $a := max_{f \in F, i=1,\ldots,l}\alpha_i(f)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\lambda_0 + F \subset \Gamma$. On pose $\lambda := n_0\lambda_0 \in \Lambda(A)$.

Alors, pour tout $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction $L_{\lambda^{-1}}\varphi_\omega$ est nulle sur $F$ puisque $\varphi_\omega$ est nulle sur $\Gamma$ donc $L_{\lambda^{-1}}\varphi_\omega$ est nulle sur $\Lambda(A)$ d'après (6.1). Donc pour tout $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction $\varphi_\omega$ est nulle sur $\Lambda(A)$, d'où (ii). $\square$

# Bibliographie.


[BD] Blanc, P., Delorme, P., Vecteurs distributions $H$-invariants de représentations induites, pour un espace symétrique réductif $p$-adique $G/H$. A paraitre aux Ann. Inst. Fourier.

[BeO] Benoist, Y., Oh, H., Polar decomposition for p-adic symmetric spaces, prépublication, Arxiv, math. GR/0612305.

[BSD] van den Ban, E.P., Schlichtkrull, H., Delorme, P., Harmonic Analysis on symmetric spaces- General Plancherel Theorems, Lie theory. Progress in Mathematics, 229. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[Bou1] Bourbaki, N., Eléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II, III: Groupes de Lie. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349. Hermann, Paris, 1972.

[Bou2] Bourbaki, N., Eléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à 7). Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1333 Hermann, Paris 1967.

[BoWall] Borel, A., Wallach, N. R. Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Annals of Mathematics Studies, 94. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980.

[Bu] Bushnell, C.J., Representations of reductive p-adic groups : localization of Hecke algebras and applications. J. London Math. Soc. 63 (2001), 364-386.

[BuK] Bushnell, C.J., Kutzko, P.C., Smooth representations of reductive $p$-adic groups: structure theory via types. Proc. London Math. Soc. 77 (1998), 582-634.

[C] Casselman, W., Introduction to the theory of admissible representations of $p$-adic reductive groups.

[Del] Delorme, P., Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif $p$-adique. Noncommutative harmonic analysis, in honour of J. Carmona, 131–176, Progr. Math., 220, Birkhauser, Boston, MA, 2004.

[DS] Delorme, P., Sécherre,V., An analogue of the Cartan Decomposition for $p$-adic reductive symmetric spaces, prépublication, Arxiv, math. RT/0612545.

[F-JOsS] Flensted-Jensen, M., Oshima, T., Schlichtkrull, H. , Boundedness of certain unitarizable Harish-Chandra modules. Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, 651–660, Adv. Stud. Pure Math., 14, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[H-C] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula. Ann. of Math. (2) 104 (1976), 117–201.

[HH] Helminck, A. G., Helminck, G. F., A class of parabolic $k$-subgroups associated with symmetric $k$-varieties. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 4669–4691.

[Hi] Hironaka, Y., Spherical functions and local densities on Hermitian forms, J. Math. Soc. Japan, 51 (1999), 553-581.

[HiSat] Hironaka, Y., Sato, F., Spherical functions and local densities of alternating forms, Am. J. Math., 110 (1988), 473-512.

[Hu] Humphreys, J., Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[HWan] Helminck, A. G., Wang, S. P., On rationality properties of involutions of reductive groups. Adv. Math. 99 (1993) 26–96.

[K] Knapp, A.W., Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[O] Offen, O., Relative spherical functions on $\wp$-adic symmetric spaces (three cases). Pacific J. Math. 215 (2004), 97–149.

[Wald] Waldspurger, J.-L., La formule de Plancherel pour les groupes $p$-adiques (d'après Harish-Chandra). J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 235–333.

**RÉSUMÉ :**

Nous établissons une généralisation de la dualité de Casselman aux espaces symétriques réductifs $p$-adiques et nous étudions le comportement asymptotique de certains coefficients généralisés. Nous prouvons aussi un analogue d'un lemme de Langlands grâce auquel nous obtenons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan des espaces symétriques réductifs $p$-adiques.

---

**TITLE :**

CONSTANT TERM OF FUNCTIONS ON A $P$-ADIC REDUCTIVE SYMMETRIC SPACE.

---

**ABSTRACT :**

We generalize Casselman's pairing to $p$-adic reductive symmetric spaces and study the asymptotic behaviour of certain generalized coefficients. We also prove an analogue of a lemma due to Langlands which allows us to prove a disjunction result for the Cartan decomposition of the $p$-adic reductive symmetric spaces.

---

**DISCIPLINE** : MATHÉMATIQUES.

---

**MOTS CLÉS** :

ESPACE SYMÉTRIQUE, GROUPE RÉDUCTIF P-ADIQUE, MODULE DE JACQUET.

---

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE LUMINY. UMR 6206 du CNRS. LUMINY. 13288 MARSEILLE Cedex 9.