UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
AIX-MARSEILLE II
Faculté des Sciences de Luminy

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement
par

Driss EL MORSLI

le 29 mars 2006

Titre

Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov pour les actions moyennables

Directeurs de Thèse : Gennadi KASPAROV et Richard ZEKRI

JURY

M. Baaj Saad	Professeur, Université Blaise Pascal	Rapporteur
M. Chabert Jérôme	Maître de Conférences, Université Blaise Pascal	
M. Fack Thierry	Professeur, Université Claude Bernard	Rapporteur
M. Kasparov Gennadi	Directeur de Recherche, CNRS Marseille	
M. Renault Jean	Professeur, Université d'Orléans	
M. Zekri Richard	Professeur, Université de la Méditerranée	

Remerciements

Je remercie vivement mes directeurs de Thèse, Gennadi Kasparov et Richard Zekri, pour m'avoir proposé cette recherche et apporté le soutien ainsi que les nombreuses idées nécessaires à sa réalisation.

Je tiens à remercier infiniment Saad Baaj et Thierry Fack de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté de rapporter les résultats de ma thèse, je remercie également Jérôme Chabert et Jean Renault pour avoir accepté d'être membres du jury de ma thèse. Leurs nombreux conseils et suggestions concernant la thèse m'ont été d'un grand secours.

Merci aussi à tous les membres et thésards de l'Institut de Mathématiques de Luminy, sans oublier ceux du Département de Mathématiques.

Mes remerciements vont à tous les participants de la rencontre du GDR Algèbres d'opérateurs aux Houches pour leurs suggestions. La bonne entente et la convivialité qui régnèrent sur les réunions du GDR furent une clef de la réussite et de l'avancement des travaux.

Je ne saurais oublier toutes les personnes du Département de Mathématiques de l'Université Cadi Ayyad pour leur soutien. Je tiens à remercier en particulier Mohamed El Kahoui, Abdelkader El Koutri, Rody Kandri et Khaled Sami pour de très nombreuses et passionnantes discussions.

Merci à tous mes frères et mes amis pour leurs encouragements.

Enfin, je tiens à louer mon père pour sa bienveillance, sans laquelle cette thèse n'aurait jamais vu le jour. La préparation et l'achèvement de cette thèse n'auraient aucun goût sans le réconfort de ma mère.

Table des matières

Introduction

Soient G un groupe topologique localement compact, X un espace topologique localement compact séparé. On notera $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X nulles à l'infini.
Dans la présente thèse, nous utilisons (X, G) pour désigner un groupe de transformation topologique moyennable au sens d'Anantharaman-Delaroche et Renault (cf. [1, Définition 2.1], [2, Chapitre 2, Section 2]). Rappelons cette définition : étant donné un groupe de transformation topologique (X, G), on dit que (X, G) est *moyennable en mesure* s'il existe une suite généralisée $(m_i)_{i\in I}$ d'applications continues $x \mapsto m_i^x$ de X dans l'espace de mesures de probabilité sur G muni de la topologie faible, telles que $\lim_i \|s \cdot m_i^x - m_i^{s\cdot x}\|_1 = 0$ uniformément sur tout compact de $X \times G$.
On appelle *G-algèbre* une C^*-algèbre A sur laquelle G agit continuement (en norme) par automorphismes. On appelle *G-$C(X)$-algèbre* toute G-algèbre A munie d'une représentation non dégénérée de $C(X)$ sur le centre $Z(M(A))$ de l'algèbre des multiplicateurs de A, tel que $g(fa) = g(f)g(a)$, pour toute $f \in C(X)$, $g \in G$ et $a \in A$. Une $C(X)$-algèbre A est donc munie d'une structure de $C(X)$-module de Banach tel que l'on ait, en outre, $C(X)A = A$. Une G-algèbre A pour laquelle il existe un G-espace propre Y (i.e pour tout compact K de Y, l'ensemble $\{g \in G|\ g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est compact.) tel que A soit une G-$C(X)$-algèbre est dite *propre*. Remarquons qu'il existe une certaine liberté dans le choix de l'espace Y (cf. [10]).
Dans [17], Kasparov associe à toute paire (A, B) de G-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées un groupe abélien noté $KK_G(A, B)$, il a aussi défini sur la catégorie des G-$C(X)$-algèbres, un bifoncteur $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$ (cf. [17]). Lorsque l'espace X est trivial, on retrouve le bifoncteur $KK_G(-, -)$. Si on considère les G-$C(X)$-algèbres $A = A_1 \otimes C(X)$ et $B = B_1 \otimes C(X)$, on désigne $\mathcal{R}KK_G(X; A, B)$ par $RKK_G(X; A_1, B_1)$. On propose par la suite d'étudier le comportement du bifoncteur ainsi défini vis-à-vis des suites exactes.
Soit $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ une suite exacte équivariante de G-algèbres telle que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme 1. On va établir l'exactitude des suites hexagonales (a) et (b); données ci-dessous, pour

les actions moyennables en se basent sur le même résultat pour les algèbres propres :

$$\text{(a)} \qquad \begin{array}{ccccc} KK_G(A/I,B) & \xrightarrow{p^*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{i^*} & KK_G(I,B) \\ \uparrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ KK^1_G(I,B) & \xleftarrow{i^*} & KK^1_G(A,B) & \xleftarrow{p^*} & KK^1_G(A/I,B) \end{array},$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{array}{ccccc} KK_G(B,I) & \xrightarrow{i_*} & KK_G(B,A) & \xrightarrow{p_*} & KK_G(B,A/I) \\ \uparrow \delta^1 & & & & \downarrow \delta^1 \\ KK^1_G(B,A/I) & \xleftarrow{q_*} & KK^1_G(B,A) & \xleftarrow{i_*} & KK^1_G(B,I) \end{array}$$

On note (a') (resp.(b')) la première ligne de la suite hexagonale (a) (resp. (b)).
De telles suites exactes, si elles existent, peuvent être utilisées pour construire des éléments de la théorie de Kasparov équivariante par G. Le comportement de KK_G vis-à-vis des suites exactes a fait l'objet de nombreuses études.
En utilisant l'isomorphisme entre KK_G et Ext, Kasparov montre dans [18] que pour les groupes compacts les foncteurs $KK_G(B,-)$ et $KK_G(-,B)$ restreints aux algèbres trivialement graduées nucléaires, sont semi-exacts. Les mêmes résultats pour les foncteurs $KK(B,-)$ et $KK(-,B)$ sont obtenus dans le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué par Skandalis (cf. [28]), où l'hypothèse de nucléarité est remplacée par l'existence d'un relèvement complètement positif de l'application p.
Dans [3], Baaj et Skandalis montrent que, si G est moyennable discret et si A/I est nucléaire, on a les suites exactes hexagonales (a) et (b). Pour les groupes localement compacts fortement moyennables en K-thèorie, le résultat est dû à Maghfoul (cf. [22]).
Dans [16], on a, si $A_1 \otimes C(X)$ est nucléaire propre, la suite (b) est exacte pour le groupe $RKK_G(X; A_1, B_1)$.
Nous nous inspirons, dans notre situation, d' idées de [28, 16, 22], nous établissons les suites exactes (a) et (b) pour les algèbres propres, et nous nous servirons des résultats de [13, 30] pour construire une algèbre non-commutative nucléaire propre séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée que l'on notera $\mathcal{A}_X(H)$. Nous établissons par la suite un homomorphisme injectif scindé concernant le bifoncteur de Kasparov $\mathcal{R}KK_G$. La présence de cette inclusion en K-théorie et l'existence des suites exactes pour les algèbres propres permettent alors d'étendre les suites exactes hexagonales (a) et (b) aux actions moyennables.

Cette thèse s'organise de la manière suivante.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principales notions dont nous aurons besoin : $G - C(X)$-algèbre, les définitions et les propriétés générales du bifoncteur de Kasparov $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$.
Nous étudions dans le second chapitre les suites exactes pour les algèbres propres. Pour deux G-algèbres A et B, et $(\mathcal{E}, \pi)$ un (A,B)-bimodule Hilbertien équivariant, on note $(\mathcal{E}_A, \pi_A)$ le (A,B)-module Hilbertien équivariant $(A \widehat{\otimes}_A \mathcal{E}, 1 \otimes \pi)$. Supposons que A est propre, reprenons la construction de [16, Démonstration de la Proposition 5.7]. On voit

alors que $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$. Ainsi, si B est propre, B est un facteur direct de $B \otimes L^2(G)$. Donc $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_A \widehat{\otimes}_B B$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$. Utilisons ce résultat en adaptant la méthode de Skandalis, [28] (qui a utilisé le Théorème de Stinespring généralisé par Kasparov (cf. [17, Section, Théorème 3])), on a la proposition suivante :

Proposition. *Soient G un groupe topologique localement compact, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, et $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres tel que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme* 1. *Si B est propre, alors les suites* (a) *et* (b) *sont exactes.*

Le troisième chapitre est le coeur de la thèse. Soit $\mathcal{A}(H)$ la C^*-algèbre de Higson-Kasparov associée à un espace Euclidien H de dimension infinie (cf. [12, Proposition 4.2]). L'idée principale consiste à remarquer que l'hypothèse de moyennablité de l'action de G sur X permet de construire une action affine propre du groupoïde $X \rtimes G$ dans un $C(X)$-module Hilbertien de la forme $H \otimes C(X)$ (on peut prendre ici $H = L^2(G) \otimes l^2(\mathbb{N})$). Par une construction de Tu [30], on obtient que $C(X)$ est $KK_{X \rtimes G}$-sous-équivalente à la G-$C(X)$-algèbre propre $\mathcal{A}_X(H) := \mathcal{A}(H) \otimes C(X)$. Si B est une G-$C(X)$-algèbre, l' ampliation en $KK_{X \rtimes G}$ théorie entraine que B est KK_G-sous-équivalente à $B' = B \widehat{\otimes}_{C(X)} \mathcal{A}_X(H)$ qui est une G-algèbre propre, et le résultat établi précédemment pour les algèbres propres permet d'étendre la semi-exactitude du cas des algèbres propres à celui des actions moyennables.

Théorème. *Soient (X, G) un groupe de transformation moyennable, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres tel que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme* 1. *Alors si B est munie d'une structure de $C(X)$-algèbre les suites* (a) *et* (b) *sont exactes.*

Exemple d'application :

Dans le cas où $X := B^2$ est le disque unité et $G := SU(1,1)$ opère dans B^2 par homographies :

$$z \mapsto g \cdot z = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

où a et b sont des paramètres complexes, et $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Cette action s'étend au disque fermé $\overline{B^2}$, avec deux orbites (l'intérieur du disque et le cercle frontière). L'action sur la boule ouverte B^2 est propre. Les stabilisateurs des points du cercle sont moyennables, le noyau de Poisson nous permet de construire une suite de mesures satisfaisant les conditions de la moyennabilité topologique de l'action sur le cercle. D'autre part, on construit une suite des fonctions radiales, continues sur $\overline{B^2}$, presque invariantes sous l'action de G. La moyenne M_n sur le disque hyperbolique $\overline{B^2}$ est une combinaison convexe des moyennes à l'intérieur et au bord :

$$M_n(g,z) = (1 - e^{-\eta(n)\frac{|z|}{(1-|z|)}})\,\frac{1}{c_n(\gamma_z)}\tilde{\mu}_n(g)\,\mathcal{P}^{1/2n}(g\cdot 0,\gamma_z) + e^{-\eta(n)\frac{|z|}{(1-|z|)}}\,\tilde{h}(g,z).$$

Où: $\eta(n)$ est une suite réelle convergente vers 0 et qui dépend du nombre de Lebesgue qui correspond au noyau de poisson $\mathcal{P}^{1/2n}$, γ_z la projection radiale du point z sur le cercle frontière, $\tilde{\mu}_n$ le prolongement sur G de μ_n la fonction vérifiant la moyennabilité du stabilisateur des points du cercle, $c_n(\gamma_z) := \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma_z)dg$ et $\tilde{h}$ le prolongement sur la boule fermée $\overline{B^2}$ d'une fonction satisfaisant les critères de la moyennabilité topologique du groupe de transformation (B^2, G).
Enfin, grâce au Théorème précédent, on retrouve ainsi le résultat de Julg et Kasparov [15]; la suite

$$\begin{array}{ccccc}
KK_G(C(S^1),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_G(C(\overline{B^2}),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_G(C_0(B^2),\mathbb{C}) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
KK^1_G(C_0(B^2),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1_G(C(\overline{B^2}),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1_G(C(S^1),\mathbb{C}).
\end{array}$$

est exacte.

Chapitre 1

Préliminaires et Notations

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition des G-$C(X)$-algèbres ainsi que les principaux résultats de la théorie de Kasparov et nous fixons les notations qui seront utilisées par la suite.

1.1 Les G-$C(X)$-algèbres

On notera $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur X. On notera aussi $C_b(X)$ l'algèbre des fonctions continues et bornées sur X et $C(X)$ l'idéal des fonctions nulles à l'infini, que d'autres auteurs notent traditionnellement $C_0(X)$.
Les $C(X)$-algèbres constituent l'analogue noncommutatif des fibrés vectoriels. Elles ont été introduites en K-théorie par Kasparov. Dans cette section, nous allons rappeler la définition et quelques propriétés importantes pour la suite. Pour plus de détails, nous conférons le lecteur à [19] et [5].
Soit A une C^*-algèbre. On notera par $M(A)$ la C^*-algèbre des multiplicateurs de A [24]. La C^*-algèbre $M(A)$ est unifère et contient A comme idéal bilatère essentiel, i.e $\{x \in M(A)/xA = 0\} = \{0\}$. La topologie stricte de $M(A)$ est la topologie engendrée par la famille des semi- normes :

$$\{||T||_a = ||Ta|| + ||aT||; a \in A\}$$

Muni de la topologie stricte, $M(A)$ est un espace vectoriel localement convexe complet.
Soit $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une unité approchée de A et soit $y \in M(A)$, alors $u_\lambda y$ et yu_λ convergent strictement vers y. Donc A est strictement dense dans $M(A)$.
On dit qu'un homomorphime de C^*-algèbres $\pi : A \to M(B)$ est *nondégénéré* si, pour une unité approchée $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de A, $\pi(u_\lambda)$ converge vers $1_{M(B)}$ pour la topologie stricte.
Remarquons qu'une action continue d'un groupe G localement compact sur A se prolonge en une action de G sur $M(A)$. Cette action est continue pour la topologie stricte, mais elle ne l'est pas en général pour la topologie normique.

Définition 1.1. On appelle $C(X)$-algèbre toute C^*-algèbre A munie d'une représentation non dégénérée de $C(X)$ dans le centre $Z(M(A))$ de l'algèbre $M(A)$ des multiplicateurs de A.

Une $C(X)$-algèbre A est donc munie d'une structure de $C(X)$-module de Banach tel que l'on ait, en outre, $C(X)A = A$. On remarque que $C(X)A$ est fermée. On note A_c la sous-algèbre $C_c(X)A$, et on dira que les éléments de A_c sont les éléments de A à support compact.
Pour tout point $x \in X$, on note par $e_x : C(X) \to \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation en x et par C_x son noyau, i.e. l'ensemble des fonctions de $C(X)$ qui s'annulent en x. Alors C_xA est un idéal bilatère fermé de A.

Définition 1.2. Soit A une $C(X)$-algèbre. On appelle fibre en $x \in X$ la C^*-algèbre $A_x = A/C_xA$.

On note la classe d'un élément $a \in A$ dans A_x par a_x. Tout $a \in A$ définit ainsi une famille $\{a_x \in A_x |\ x \in X\}$. L'application

$$x \mapsto ||a_x|| \text{ de } X \text{ dans } \mathbb{R}$$

est semicontinue supérieurement et que l'on a :

Lemme 1.1. *Soit A une $C(X)$-algèbre. Pour tout $a \in A$, on a :*

$$||a|| = \sup_{x \in X} ||a_x||$$

et en ce supremum est atteint.

Définition 1.3. Soient A, B deux $C(X)$-algèbres. On appelle $C(X)$-morphisme tout morphisme de C^*-algèbres $U : A \to B$ qui vérifie $U(fa) = fU(a)$, pour tout $f \in C(X)$ et $a \in A$.

On note $\otimes$ le produit tensoriel maximum des C^*-algèbres. Nous avons les exemples suivants qui seront utilisé pour démontrer le Lemme 3.2.

Exemples 1.1.

(1) Soit Y un espace topologique localement compact σ-compact et $p : Y \to X$ une application continue. Alors p définit un morphisme $p^* : C(X) \to C_b(Y)$ qui munit $C(Y)$ d'une structure de $C(X)$-algèbre.

(2) Soit A une C^*-algèbre. Alors $C(X) \otimes A$ est une $C(X)$-algèbre dont toutes les fibres sont isomorphes à A. Plus généralement si A est une C^*-algèbre et B une $C(X)$-algèbre alors $A \otimes B$ est une $C(X)$-algèbre dont la fibre en x est $A \otimes B_x$.

Décrivons maintenant le produit tensoriel (maximum) des $C(X)$-algèbres. Soient A une $C(X)$-algèbre et B une $C(Y)$-algèbre. Alors le produit tensoriel $A \otimes B$ est une $C(X \times Y)$-algèbre (cf. [5, Corollaire 3.6]) et

$$(A \otimes B)_{(x,y)} = A_x \otimes B_y.$$

En particulier si $Y = X$, $A \otimes B$ est une $C(X \times X)$-algèbre. On définit

$$A \otimes_{C(X)} B := (A \otimes B)/C_\Delta(A \otimes B),$$

où C_Δ désigne l'idéal de $C(X \times X)$ des fonctions nulles sur la diagonale. Alors $A \otimes_{C(X)} B$ est une $C(X)$-algèbre et

$$(A \otimes_{C(X)} B)_x = A_x \otimes B_x.$$

Proposition 1.1.

(i) *L'opération naturelle $\otimes_{C(X)}$ définie sur A_1 et A_2 est :*

- **(a)** *commutative : $A_1 \otimes_{C(X)} A_2 \simeq A_2 \otimes_{C(X)} A_1$.*
- **(b)** *associative.*

(ii) *il existe un homomorphisme naturel :*

$$M(A_1) \otimes_{C(X)} M(A_2) \to M(A_1 \otimes_{C(X)} A_2)$$

(iii) *Si A_1 ou A_2 est un $C(X)$-algèbre, $A_1 \otimes_{C(X)} A_2$ est un $C(X)$-algèbre.*

(iv) *Si $A_1 = C_0(X, B)$ et A_2 est un $C(X)$-algèbre, $A_1 \otimes_{C(X)} A_2 \simeq B \otimes A_2$.*

Définition 1.4. *Soit X un espace topologique sur lequel agit un groupe G. Alors une C^*-algèbre A est une G-$C(X)$-algèbre si et seulement si :*

(i) *A est munie d'une action $\alpha : G \to Aut(A)$ fortement continue,*

(ii) *$\alpha_g(fa) = (gf)\alpha_g(a)$ pour tout $f \in C(X)$, $g \in G$ et $a \in A$,*

(iii) *A est une $C(X)$-algèbre.*

Une G-algèbre A pour laquelle il existe un espace topologique X sur lequel G agit proprement et telle que A soit une $G - C(X)$-algèbre est appelée algèbre propre. Remarquons qu'il existe une certaine liberté dans le choix de l'espace X (cf. [10, Chapitre 8]). Certaines propriétés des C^*-algèbres munies d'actions de groupes compacts s'étendent aux C^*-algèbres propres.

1.2 Bifoncteurs de Kasparov

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler (sans les démontrer) les principaux résultats de la KK-théorie équivariante. rappelons tout d'abord les notions suivantes.
Une C^*-algèbre B dite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, si elle est munie d'un automorphisme de graduation $\sigma \in Aut(B)$ tel que $\sigma^2 = id_B$. Donc B admet une décomposition $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$, où $B^0 = \{b \in B |\ \sigma(b) = b\}$ et $B^1 = \{b \in B |\ \sigma(b) = -b\}$. Pour $b \in B$, on écrira $\partial b = i$ si $\sigma(b) = (-1)^i b$. Tous les commutateurs sont gradués, i.e.

$$[a, b] = ab - (-1)^{\partial a \cdot \partial b} ba \qquad \text{pour tout } a,\ b \in B$$

On dit que B est trivialement graduée si $\sigma = \mathrm{id}_B$, i.e. $B^{(0)} = B$ et $B^{(1)} = 0$.
Un $*$-homomorphisme $\pi : A \to B$ est gradué (de degré 0) si $\pi(A^{(i)}) \subset (B^{(i)})$, $i = 0, 1$.
Soit G un groupe localement compact agissant par automorphisme sur B. On supposera dans la suite que G est dénombrable à l'infini et que son action est compatible avec la graduation, i.e. qui commute avec σ. On dit qu'un élément $b \in B$ est G-continu si l'application $g \mapsto g(b)$ de G dans B est continue en norme, et on dira que B est une G-algèbre si tout élément de B est G-continu. Un homomorphisme de G-algèbres est dit équivariant, s'il commute avec l'action de G.
Un module Hilbertien $\mathcal{E}$ sur une C^*-algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée B est dit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, s'il existe un automorphisme de graduation $\epsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_{B^{(0)}}$ tel que :

(i) $\langle \epsilon(\xi), \epsilon(\eta) \rangle = \sigma(\langle \xi, \eta \rangle)$ pour tout $\xi,\ \eta \in \mathcal{E})$,

(ii) $\epsilon(\xi b) = \epsilon(\xi)\sigma(b)$ pour tout $\xi \in \mathcal{E},\ b \in B$

Alors $\mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \oplus \mathcal{E}^{(1)}$, où $\mathcal{E}^{(0)}$ et $\mathcal{E}^{(1)}$ sont des sous-B^0-modules Hilbertiens.
Une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\mathcal{E}$ définit une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ en posant :

$$\epsilon'(T)\epsilon(\xi) = \epsilon(T\xi), \qquad T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}),\ \xi \in \mathcal{E}.$$

Une action de G sur un module Hilbertien $\mathcal{E}$ est la donnée d'une application de $G \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ linéaire par rapport à la deuxième variable. On note $g(\xi)$ l'image de (g, ξ) par cette application. On dira qu'une telle action est continue, si, pour tout $\xi \in \mathcal{E}$, l'application de G dans $\mathcal{E}$ qui à g associe $g(\xi)$ est continue en norme.

Définition 1.5. Soient A et B deux G-algèbres A. Un A, B-bimodule équivariant est une paire $(\mathcal{E}, \pi)$ où $\mathcal{E}$ est un B-module Hilbertien muni d'une action continue de G et $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est un $*$-homomorphisme tels que:

(i) $g(\xi b) = g(\xi)g(b)$ pour tout $\xi \in \mathcal{E},\ b \in B,\ g \in G$

(ii) $g(\langle \xi, \eta \rangle) = \langle g\xi, g\eta \rangle$ pour tout $\xi,\ \eta \in \mathcal{E},\ g \in G)$

(iii) $g(\pi(a)\xi) = \pi(ga)g(\xi)$, pour tout $a \in A$, $\xi \in \mathcal{E}$, $g \in G$

Notons qu'une action continue de G sur $\mathcal{E}$ induit une action de G sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ donnée par :

$$gT(\xi) = g(T(g^{-1}\xi)) \qquad T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}),\ \xi \in \mathcal{E}.$$

Cette action n'est en général pas continue pour la topologie normique, mais sa restriction à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ et à $\pi(A)$ l'est.
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux modules hilbertiens sur A et B respectivement et soit $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{F})$ une application complètement positive. On note le produit tensoriel interne $\mathcal{E}\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{E}\widehat{\otimes}_A\mathcal{F}$) le B-module hilbertien séparé et complété du produit tensoriel algébrique $\mathcal{E}\widehat{\otimes}_{alg}\mathcal{F}$ pour le produit scalaire :

$$\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_2, \pi(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle)\eta_2 \rangle;\ (\xi_i \in \mathcal{E},\ \eta_i \in \mathcal{F})$$

L'application $T \longmapsto T\widehat{\otimes}_\pi 1$ définit un $*$-homomorphisme $\pi_* : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{F})$.

1.2.1 Groupes de Kasparov équivariants

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition et quelques propriétés de bifoncteur de Kasparov $\mathcal{R}KK_G$, cf. [19, §2] (voir aussi les travaux de Pierre-Yves Le Gall dans [20]). Nous allons rappeler tout d'abord très brièvement la définition des groupes de Kasparov KK_G.
Soient A et B deux G-algèbres. Un (A, B)-*bimodule de Kasparov équivariant* est un triplet $(\mathcal{E}, \pi, F)$ composé d'un (A, B)-bimodule G-équivariant $(\mathcal{E}, \pi)$ et d'un opérateur $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ de degré 1 tels que:

(i) $[\pi(a), F] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, $\pi(a)(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $\pi(a)(F - F^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ pour tout $a \in A$

(ii) F est G-continu et $\pi(a)(gF - F) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ pour tout $a \in A$, $g \in G$.

On note $E_G(A, B)$ l'ensemble des (A, B)-bimodules de Kasparov équivariants.
Pour simplifier les notations, on écrira parfois $(\mathcal{E}, \pi, F)$ par $(\mathcal{E}, F)$ et $a\xi = \pi(a)\xi$.
Un élément $(\mathcal{E}, F)$ de $E_G(A, B)$ est dit *dégénéré* si, pour tout $a \in A$, $g \in G$, on a :

$$[a, F] = a(F^2 - 1) = a(F - F^*) = a(gF - F) = 0.$$

On note $D_G(A, B)$ l'ensemble des éléments dégénérés.
Une *homotopie* dans $E_G(A, B)$ est un élément de $E_G(A, B[0, 1])$. Une homotopie $(\mathcal{E}, F)$ dans $E_G(A, B[0, 1])$ engendre une famille de (A, B)-bimodules de Kasparov $(\mathcal{E}_t, F_t)_{t\in[0,1]}$ où $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}\widehat{\otimes}_{\phi_t}B$, $\phi_t : B[0, 1] \to B$ est donnée par $\phi_t(h) = h(t)$ et $F_t = T\widehat{\otimes}_{\phi_t}1$. Les éléments $(\mathcal{E}_0, F_0)$ et $(\mathcal{E}_1, F_1)$ ainsi obtenus sont dits homotopes. Une homotopie dans laquelle $\mathcal{E}_t$ est fixe et l'application $t \to F_t$ est continue en norme est appelée *homotopie opératorielle.*

L'ensemble des classes d'homotopie d'élément de $E_G(A,B)$ est noté $KK_G(A,B)$. Muni de l'addition définie par la somme directe

$$(\mathcal{E}_1, F_1) \oplus (\mathcal{E}_2, F_2) = (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, F_1 \oplus F_2),$$

l'ensemble $KK_G(A,B)$ a une structure de groupe abélien.

Définition 1.6. Soient A et B deux G-$C(X)$-algèbres, le groupe $\mathcal{R}KK_G(X;A,B)$ est l'ensemble des éléments de $KK_G(A,B)$ tels que, pour tout paire $(\mathcal{E},T) \in E_G(A,B)$, et tout $f \in C(X), a \in A, b \in B, \xi \in \mathcal{E}$, on a l'égalité $(fa)\xi b = a\xi(fb)$ dans $\mathcal{E}$.
Si $A = A_1 \widehat{\otimes} C(X)$, $B = B_1 \widehat{\otimes} C(X)$, on note $\mathcal{R}KK_G(X;A,B)$ par $RKK_G(X;A_1,B_1)$. Si l'espace X est trivial, on retrouve le groupe $KK_G(A,B)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, A et B deux G-$C(X)$-algèbre. On pose

$$\mathcal{R}KK_G^n(X;A,B) = \mathcal{R}KK_G(X;A \otimes C_0(\mathbb{R}^n), B).$$

1.2.2 Connexions

Définition 1.7. Soit $\mathcal{E}_1$ un B_1-module Hilbertien et soit $\mathcal{E}_2$ un (B_1,B)-bimodule équivariant. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \widehat{\otimes}_{B_1} \mathcal{E}_2$. Pour $\xi \in \mathcal{E}_1$, on définit $F_\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$ par $F_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta$. Soit $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$. On dit qu'un élément $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est une F_2-connexion pour $\mathcal{E}_1$, si pour tout $\xi \in \mathcal{E}_1$, $F_\xi F_2 - (-1)^{\partial\xi\cdot\partial F_2} F F_\xi \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$ et $F_2 F_\xi^* - (-1)^{\partial\xi\cdot\partial F_2} F_\xi^* F \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$.

Les propriétés importantes d'une connexion sont regroupées dans la proposition ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur à [27] pour plus de détails.

Proposition 1.2. *Soient A et B deux G-$C(X)$-algèbres. Soient $\mathcal{E}_1$ un A-module Hilbertien équivariant, $(\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2)$ un élément de $E_G(A,B)$ et π_1 une représentation équivariante de B à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_2)$. Soient $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \widehat{\otimes}_A \mathcal{E}_2$ et $\pi : \mathcal{K}(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ la représentation $T \mapsto T\widehat{\otimes}1$. Alors :*

- **(i)** *Si $[F_2, a] = 0$ pour tout $a \in A$, alors $1 \otimes F_2$ a un sens, et c'est une F_2-connexion. De plus $[F \otimes 1, 1 \otimes F_2] = 0$ pour tout $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1)$*
- **(ii)** *Si $[F_2, a] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2)$ pour tout $b \in A$, alors il existe une F_2-connexion pour $\mathcal{E}_1$.*
- **(iii)** *L'espace des F_1-connexions est un espace affine associé à l'espace vectoriel $V = \{F \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) |\ FT$ et $TF \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, pour tout $T \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1)\}$*
- **(iv)** *Si F est une F_2-connexion et F' est une F_2'-connexion, alors $F + F'$, FF' et F^* sont respectivement des $F_2 + F_2'$, F_2F_2' et F_2^*-connexions.*
- **(v)** *Pour toute F_2-connexion $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, le triplet $(\mathcal{E}, \pi, F)$ est un élément de $E_G(\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)\widehat{\otimes}1, B)$.*

1.2.3 Propriété du produit de Kasparov

L'outil clé de la théorie de Kasparov est l'existence d'un produit (*dit produit de Kasparov*), $\mathcal{R}KK_G(X;A,D) \otimes \mathcal{R}KK_G(X;D,B) \to \mathcal{R}KK_G(X;A,B)$, qui donne une structure d'anneau à $\mathcal{R}KK_G(X;A,A)$ et permet de retrouver la dualité entre la K-théorie et la K-homologie. On note 1_A l'élément de $\mathcal{R}KK_G(X;A,A)$ représenté par le triplet $(A, i_A, 0)$ en posant, pour tout $a \in A$, $i_A(a) = a \in \mathcal{K}(A)$.

Définition 1.8. Soient A, B, D trois G-$C(X)$-algèbres graduées, $(\mathcal{E}_1, \pi_1, F_1) \in E_G(A, D)$ et $(\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2) \in E_G(D, B)$. Soient $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \widehat{\otimes}_D \mathcal{E}_2$ et $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ la représentation $x \mapsto \pi_1(x) \widehat{\otimes} 1$.
Le triplet $(\mathcal{E}, \pi, F)$ est appelé produit de Kasparov de $(\mathcal{E}_1, \pi_1, F_1)$ par $(\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2)$ si $(\mathcal{E}, \pi, F) \in E_G(A, B)$, F est une F_2-connexion et pour tout $a \in A$, $\pi(a)[F_1 \widehat{\otimes}_D 1, F]\pi(a^*)$ est positif modulo $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Théorème 1.1. *Soient A, B, D trois G-$C(X)$-algèbres graduées avec A séparable, $(\mathcal{E}_1, \pi_1, F_1) \in E_G(A, D)$ et $(\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2) \in E_G(D, B)$. Il existe un produit de Kasparov de $(\mathcal{E}_1, \pi_1, F_1)$ par $(\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2)$, unique à homotopie opératorielle près.*
Le produit de Kasparov est invariant par homotopie et définit par passage au quotient une application :

$$\mathcal{R}KK_G(X;A,D) \otimes \mathcal{R}KK_G(X;D,B) \to \mathcal{R}KK_G(X;A,B)$$

notée $(x, y) \mapsto x \otimes_D y$.

On a les propriétés du produit de Kasparov suivantes :

Définition 1.9. Soient A, B et D, des G-$C(X)$-algèbres, D ayant une unité approchée dénombrable. Soit $(\mathcal{E}, \pi, T) \in E_G(A, B)$. On note $\sigma_{X,D}$ l'homomorphisme de groupes de $\mathcal{R}KK_G(X;A,B)$ à valeurs dans $\mathcal{R}KK_G(X; A\widehat{\otimes}_{C(X)}D, B\widehat{\otimes}_{C(X)}D)$ défini par :

$$\sigma_{X,D}(\mathcal{E}, \pi, T) = (\mathcal{E}\widehat{\otimes}_{C(X)}D, \pi\widehat{\otimes} id_D, T\widehat{\otimes} id_D).$$

Comme dans le cas non équivariant, l'homomorphisme $\sigma_{X,D}$ est naturel relativement au produit de Kasparov.

Définition 1.10. SoientA_1, A_2, B, B_1, B_2 et D des G-$C(X)$-algèbres, avec A_1 et A_2 séparables et D ayant une unité approchée dénombrable.
Soient $x \in \mathcal{R}KK_G(X; A_1, B_1\widehat{\otimes}_{C(X)}D)$ et $y \in \mathcal{R}KK_G(X; A_2\widehat{\otimes}_{C(X)}D, B_2)$. Leur produit de Kasparov noté $x\widehat{\otimes}_D y$ est défini par :

$$\begin{aligned} x\widehat{\otimes}_D y &= \sigma_{X,A_2}(x)\widehat{\otimes}_{B_1\widehat{\otimes}_{C(X)}D\widehat{\otimes}_{C(X)}A_2}\sigma_{X,B_1}(y) \\ &\in \mathcal{R}KK_G(X; A_1\widehat{\otimes}_{C(X)}A_2, B_1\widehat{\otimes}_{C(X)}B_2). \end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Soient A_1, A_2, A_3, D_1 et D_2 des G-$C(X)$-algèbres séparables. Soient $x_1 \in \mathcal{R}KK_G(X; A_1, B_1 \widehat{\otimes}_{C(X)} D)$, $x_2 \in \mathcal{R}KK_G(X; D_1 \widehat{\otimes}_{C(X)} A_2, B_2 \widehat{\otimes}_{C(X)} D_2)$ et $x_3 \in \mathcal{R}KK_G(X; D_2 \widehat{\otimes}_{C(X)} A_3, B_3)$, alors :*

$$(x_1 \widehat{\otimes}_{D_1} x_2) \widehat{\otimes}_{D_2} x_3 = x_1 \widehat{\otimes}_{D_1} (x_2 \widehat{\otimes}_{D_2} x_3).$$

Proposition 1.3. *Soient A_1, A_2, B_1 et B_2 des G-$C(X)$-algèbres séparables, $x_1 \in \mathcal{R}KK_G(X; A_1, B_1)$ et $x_2 \in \mathcal{R}KK_G(X; A_2, B_2)$. Alors on a l'égalité :*

$$x_1 \widehat{\otimes}_C x_2 = x_2 \widehat{\otimes}_C x_1 \in \mathcal{R}KK_G(X; A_1 \widehat{\otimes}_{C(X)} A_2, B_1 \widehat{\otimes}_{C(X)} B_2);$$

où $x_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} x_2 = \sigma_{X,A_2}(x_1) \widehat{\otimes}_{B_1 \otimes A_2} \sigma_{X,B_1}(x_2)$.

Remarque 1.1. En particulier le produit de Kasparov munit $\mathcal{R}KK_G(X; C(X), C(X))$ d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

Chapitre 2

Suites exactes en K-théorie bivariante pour les algèbres propres

Les deux chapitres qui viennent sont consacrés à l'étude du comportement des bifoncteurs KK_G vis-à-vis des suites exactes. Dans [28], Skandalis a montré que les foncteurs $KK(B,-)$ et $KK(-,B)$ sont semi-exacts i.e. que toute suite exacte de C^*-algèbre admettant un relèvement complètement positif donne lieu à des suites exactes hexagonales de groupes de Kasparov.
Nous allons montrer dans ce chapitre la semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov équivariant pour les algèbres propres en supposant que toutes les algèbres sont séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées; nous démontrerons dans le troisième chapitre, que ce résultat se généralise au cas des groupes de transformation moyennables.

2.1 Utilisation du Théorème de Stinespring pour les algèbres propres

Soit $\mathcal{E}$ un B-module Hilbertien et $C_c(G,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions continues à supports compacts de G dans $\mathcal{E}$. On note par $L^2(G,\mathcal{E})$ le B-module Hilbertien obtenu par la complétion de $C_c(G,\mathcal{E})$ pour les opérations :

(i) $(fb)(g) = f(g)b$

(ii) $g(f)(g_1) = g(f(g^{-1}g_1))$

(iii) $\langle f_1, f_2\rangle = \int_G \langle f_1(g), f_2(g)\rangle \, dg$

pour tout $g, g_1 \in G$, $b \in B$, $f,\ f_1,\ f_2 \in C_c(G,\mathcal{E})$.
L'application $f(g)\otimes\xi \mapsto f(g).\xi$ définit un isomorphisme entre $L^2(G)\otimes\mathcal{E}$ et $L^2(G,\mathcal{E})$.
On note $\mathcal{L}(L^2(G,\mathcal{E}))$ la C^*-algèbre des opérateurs bornés admettant un adjoint sur $L^2(G,\mathcal{E})$.

Lemme 2.1. *On a, pour toute G-algèbre A :*

(i) *pour toute application $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$, l'application $\bar{\pi} : A \to \mathcal{L}(L^2(G,\mathcal{E}))$, défini par $(\bar{\pi}(a)\xi)(g) = g \cdot (\pi(g^{-1}a)(g^{-1} \cdot \xi(g))$, $a \in A$, $\xi \in L^2(G,\mathcal{E})$ et $g \in G$, est équivariante ;*

(ii) *pour toute paire $(\mathcal{E}, F)$ dans $E_G(A,B)$, il existe une paire $(\mathcal{E}_A, F_A) = (A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}, F_A)$ dans $E_G(A,B)$ tel que $(\mathcal{E}, F)$ et $(\mathcal{E}_A, F_A)$ définissent la même classe dans $KK_G(A,B)$.*

Démonstration. Pour (ii), on se réfère à [19, Lemme 2.8]. Rappelons la démonstration de (i). Soient $h \in G$, $a \in A$ et $\xi \in L^2(G,\mathcal{E})$. Pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
[(h \cdot \bar{\pi}(a))\xi](g) &= [h \cdot (\bar{\pi}(a)(h^{-1} \cdot \xi))](g) \\
&= h \cdot [(\bar{\pi}(a)(h^{-1} \cdot \xi))(h^{-1}g)] \\
&= h \cdot [h^{-1}g \cdot (\pi(g^{-1}ha)(g^{-1}h \cdot (h^{-1}\xi(h^{-1}g))))] \\
&= h \cdot [(h^{-1}g \cdot (\pi(g^{-1}ha)))((h^{-1} \cdot \xi)(h^{-1}g))] \\
&= h \cdot [(h^{-1}g \cdot (\pi(g^{-1}ha)))(h^{-1} \cdot (\xi(g))] \\
&= h \cdot [h^{-1}g \cdot ((\pi(g^{-1}ha))(g^{-1}hh^{-1} \cdot (\xi(g)))] \\
&= g \cdot [\pi(g^{-1}ha)(g^{-1} \cdot (\xi(g)))] \\
&= g \cdot [\pi(g^{-1}ha)(g^{-1} \cdot (\xi(g)))] \\
&= [\bar{\pi}(ha)\xi](g).
\end{aligned}$$

On en déduit (i). □

Proposition 2.1. *Soient A et B des G-algèbres, $(\mathcal{E}, \pi)$ un (A,B)-bimodule Hilbertien équivariant. Si A ou B est propre, alors $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$.*

Démonstration. Supposons que A est propre. Reprenons la construction de [16, Démonstration de la Proposition 5.7]. Dans ce cas, G agit proprement sur un espace localement compact Y. Il existe alors une fonction de coupure $\mathcal{C} : Y \to \mathbb{R}^+$ continue. Le groupe G agit par translation à gauche sur G, diagonalement sur $C(Y) \otimes L^2(G)$, cette action est donnée par :

$$(g \cdot (\xi \otimes \eta))(y,h) = (\xi \otimes \eta)(g^{-1} \cdot y, g^{-1}h), \qquad \text{pour tout } g \in G,\ \xi \otimes \eta \in C(Y) \otimes L^2(G),$$

pour tout ξ dans $C(Y)$, $U_0(\xi) \in C(Y) \otimes L^2(G)$, regardé comme une fonction à deux variables y dans Y et g dans G, on associe à $\mathcal{C}$ une isométrie $U_0 : C(Y) \to C(Y) \otimes L^2(G)$ donné par la formule :

$$(U_0(\xi))(y,g) = \xi(y)(\mathcal{C}(g^{-1} \cdot y))^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{pour tout } \xi \in C(Y),\ y \in Y,\ g \in G.$$

Ce $C(Y)$-morphisme est G-équivariant :

$$\begin{array}{rcl} U_0(h(\xi))(y,g) &=& (h\xi)(y)\mathcal{C}(g^{-1}\cdot y)^{\frac{1}{2}} \\ &=& \xi(h^{-1}\cdot y)\mathcal{C}(g^{-1}\cdot y)^{\frac{1}{2}} \\ &=& \xi(h^{-1}\cdot y))\mathcal{C}(g^{-1}h\cdot(h^{-1}\cdot y))^{\frac{1}{2}} \\ &=& \xi(h^{-1}y)\mathcal{C}((h^{-1}g)^{-1}\cdot(h^{-1}\cdot y))^{\frac{1}{2}} \\ &=& U_0(\xi)(h^{-1}\cdot y, h^{-1}g)) \\ &=& hU_0(\xi)(y,g), \qquad \text{(car l'action est diagonale).} \end{array}$$

On écrit

$$\begin{array}{ccc} A & = & C(Y)\otimes_{C(Y)} A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle U_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle U_0\otimes_{C(Y)}1} \\ A\otimes L^2(G) & = & (C(Y)\otimes L^2(G))\otimes_{C(Y)} A \end{array}$$

L'application U_1 de A dans $A\otimes L^2(G)$ donnée par :

$$U_1(fa)(y,g) = f(y)(\mathcal{C}(g^{-1}y))^{\frac{1}{2}}a, \qquad \text{pour tout } f\in C(Y),\ a\in A,\ y\in Y,\ g\in G,$$

définit bien un élément de $\mathcal{L}(A, A\otimes L^2(G))$. Alors l'application $U = U_1\otimes 1 : A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}\to \mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$ donnée par

$$U(fa\widehat{\otimes}_A\xi) = U_1(fa)\widehat{\otimes}_A\xi, \qquad f\in C(Y),\ a\in A,\ \xi\in C(Y)$$

a un sens dans $\mathcal{L}(A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}, (A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E})\otimes L^2(G)) = \mathcal{L}(\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_A\otimes L^2(G))$, de plus c'est une isométrie G-invariante. Comme l'action de $C(Y)$ est centrale, U entrelace alors les actions de A.
Si B est propre, alors B est un facteur direct de $B\otimes L^2(G)$. Donc $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_A\widehat{\otimes}_B B$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$. $\square$

Soit A et B deux C^*-algèbres, $\mathcal{E}$ un B-module Hilbertien et $\phi : \tilde{A}\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ une application complètement positive. Généralisant un théorème de Stinespring, Kasparov a construit un B-module Hilbertien $\tilde{\mathcal{E}}$, une isométrie $U'\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\tilde{\mathcal{E}})$ et un $*$-homomorphisme $\pi : A\longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ avec $\phi(a) = (U')^*\pi(a)U'$. Rappelons que $\tilde{\mathcal{E}}$ est le séparé complété du produit tensoriel algébrique $A\otimes_{alg}\mathcal{E}$ pour le produit scalaire :

$$\langle\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes x_i, \sum_{j=1}^{m} a_j\otimes x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, \phi({a_i}^* a_j)x_j\rangle,$$

et π est donné par multiplication à gauche, $U'\xi = 1\otimes\xi$. Si ϕ est un $*$-homomorphisme alors $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{A}\widehat{\otimes}_{\tilde{A}}\mathcal{E} = \mathcal{E}$.
Dans les deux prochaines sections, nous adaptons la méthode de Skandalis, [28] (qui a utilisé théorème de Stinespring généralisé par Kasparov (cf. [17, Section 3, Théorème 3])), et nous utilisons la proposition 2.1 pour établir les suites exactes en K-théorie pour les algèbres propres.

2.2 Suites exactes en première variable

Proposition 2.2. *Soient G un groupe topologique localement compact, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, et $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ une suite exacte équivariante de G-algèbres tel que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme 1. Si A ou B est propre, alors la suite*

$$KK_G(A/I,B) \xrightarrow{p^*} KK_G(A,B) \xrightarrow{i^*} KK_G(I,B) \qquad \text{(a')}$$

est exacte.

Lemme 2.2. *Soit $(\mathcal{E},F)$ un élément de $E_G(A,B)$ tel que $i^*[(\mathcal{E},F)] = [(0,0)] \in KK_G(I,B)$. Alors il existe $(\mathcal{E}',F') \in D_G(A,B)$ tel que $i^*(\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}', F_A \oplus F')$ est opératoriellement homotope à un élément de $D_G(I,B)$.*

Démonstration. Soit $(\bar{\mathcal{E}},\bar{F}) \in E^G(I,B[0,1])$ une homotopie entre $i^*(\mathcal{E},F) = (\mathcal{E},F)$ et $(0,0)$. Grâce au Lemme 2.1(ii), on peut remplacer $(\mathcal{E},F)$ par $(\mathcal{E}_A,F_A)$. On a alors une nouvelle homotopie $(\bar{\mathcal{E}}_1,\bar{F}_1) \in E_G(I,B[0,1])$ entre $(\mathcal{E}_A,F_A)$ et $(0,0)$.
Soit H_0 et H_1 deux $(\mathbb{C}[0,1],\mathbb{C})$-bimodules zéro gradués $H_0 = H_1 = \mathbb{C}$ (G agissant trivialement sur $\mathbb{C}$). L'action équivariante de $\mathbb{C}[0,1]$ est donnée sur H_0 par $f\xi = f(0)\xi$, et sur H_1 par $f\xi = f(1)\xi$. D'après [18, Section 6, Théorème 1], il existe $({H_0}',{F_0}')$ et $({H_1}',{F_1}')$ dans $D_G(\mathbb{C}[0,1],\mathbb{C})$ tel que $(H_0 \oplus {H_0}', 0 \oplus {F_0}')$ est opératoriellement homotope à $(H_1 \oplus {H_1}', 0 \oplus {F_1}')$. D'autre part, $1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{F_0}'$ a un sens dans $\mathcal{L}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_0 \oplus {H_0}'))^1$ car $({H_0}',{F_0}')$ est un élément dégénéré de $E_G(\mathbb{C}[0,1],\mathbb{C})$. Alors $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_0 \oplus {H_0}'), 1\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{F_0}'))$ est opératoriellement homotope à $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_1 \oplus {H_1}'), 1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(0 \oplus {F_1}'))$.
On pose $\mathcal{E}' := \bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{H_0}')$, $F' := 1\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{F_0}') \in \mathcal{L}(\mathcal{E}')^{(1)}$, et π' le $*$-homomorphisme équivariant de $\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}}_A)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}')^{(0)}$ donné par :

$$\pi'(T)(\xi \otimes b \otimes \eta') = T\xi \otimes b \otimes \eta', \qquad T \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}}_A),\ \xi \in \bar{\mathcal{E}}_A,\ b \in B,\ \eta' \in {H_0}'.$$

Il est clair que $(\mathcal{E}',\pi',F')$ est un élément dégénéré de $E_G(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}}_A),B)$, le fait que l'algèbre A agit par composition sur $\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}}_A)$, donc $(\mathcal{E}',F')$ est un élément dégénéré de $E_G(A,B)$. Compte tenu du Théorème 1.1, le produit de Kasparov de $(\bar{\mathcal{E}}_A,\bar{F}_A)$ par $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_0 \oplus {H_0}'), 1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(0 \oplus {F_0}'))$ dans $KK_G(I,B)$ est opératoriellement homotope au produit de Kasparov de $(\bar{\mathcal{E}}_A,\bar{F}_A)$ par $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_1 \oplus {H_1}'), 1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(0 \oplus {F_1}'))$. Puisque $({H_1}',{F_1}')$ est un élément dégénéré, l'élément $\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{H_1}'), 1\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{F_1}')$ est dégénéré dans $E_G(I,B)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}(H_1 \oplus {H_1}')) &= (\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}H_1)) \oplus (\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{H_1}')) \\
&= 0 \oplus (\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{H_1}')).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'élément $i^*(\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}', F_A \oplus F')$ est opératoriellement homotope à l'élément $(\bar{\mathcal{E}}_A\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}H_1)), 1\widehat{\otimes}_{B[0,1]}(1\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}{F_1}'))$ qui est dégénéré dans $E_G(I,B)$. $\square$

Lemme 2.3. *Soit $(\mathcal{E}, \pi)$ un (A, B)-bimodule Hilbertien équivariant. On pose pour tout a dans A, a' dans I et g dans G :*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) | \; x \textit{ est } G\textit{-continu, } [\pi(a), x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \textit{ et } \pi(a)(gx - x) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\},\\
&\mathcal{A}' = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) | \; x \textit{ est } G\textit{-continu, } [\pi(a'), x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \textit{ et } \pi(a')(gx - x) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\},\\
&\mathcal{I}' = \{x \in \mathcal{A}' | \; x\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\}
\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{A} + \mathcal{I}' = \mathcal{A}'$.

Démonstration. Il est évident que $\mathcal{A} + \mathcal{I}' \subset \mathcal{A}'$. Soit $x \in \mathcal{A}'$. Montrons que $x \in \mathcal{A} + \mathcal{I}'$. On pose :

$E = \mathcal{K}(\mathcal{E})$,
$E_1 = \pi(I) + E$ la sous G-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, engendrée par $\pi(I) \cup E$,
E_2 la sous G-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ engendrée par $[\pi(a), x]$, $a \in A$,
$\mathcal{F}$ l'espace vectoriel engendré par x et $\pi(A)$.

Il est évident que $E \subset E_1$, $[\mathcal{F}, E] \subseteq E$, $[\mathcal{F}, E_1] \subseteq E_1$. On a aussi, pour tout $a' \in I$ et $a \in A$,

$$\pi(a')[\pi(a), x] = [\pi(a')\pi(a), x] - (-1)^{\partial x \partial a}[\pi(a'), x]\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) = E.$$

Donc $E_1.E_2 \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E}) = E$. Les hypothèses de [18, Théorème 1.4] étant satisfaites, soient $M \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $N \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ les deux éléments donnés par ce théorème. On a alors $M + N = 1$, $M \geq 0$ et $N \geq 0$. De plus $[M, \mathcal{F}]$, $[N, \mathcal{F}]$, $M.E_1$ et $N.E_2$ sont des éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Donc, pour tout $g \in G$, $gM - M$, $gN - N$ sont dans $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.
Montrons que $Mx \in \mathcal{I}'$. Il suffit de montrer pour tout $a' \in I$ que $[Mx, \pi(a')]$, $g(Mx) - Mx$ et $Mx\pi(a')$ sont des éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. En effet, $[M, \pi(a')] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ (car $\pi(a') \in \mathcal{F}$), $[x, \pi(a')] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ (car $x \in \mathcal{A}'$) et comme $[Mx, \pi(a')] = x[M, \pi(a')] + M[M, \pi(a')]$, donc $[Mx, \pi(a')] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Le fait que $(gM - M) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $(gx - x) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, donc $g(Mx) - Mx = (gM - M)g(x) + M(gx - x) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Pour tout a' dans I, on a donc $Mx\pi(a') = M\pi(a')x + MK$ avec $K \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ (car $[\pi(a'), x] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$). On a aussi $\pi(a') \in E_1$ et $ME_1 \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$. D'où $Mx\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.
Montrons que $Nx \in \mathcal{A}$. Il suffit de montrer que $[Nx, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$; pour tout $a \in A$, et $g(Nx) - Nx \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. En effet, $N.E_2 \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $[x, \pi(a)] \in E_2$. Donc $N[x, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. On a aussi $\pi(a) \in \mathcal{F}$ et $[N, \mathcal{F}] \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Donc $[N, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. D'autre part $[Nx, \pi(a)] = x[N, \pi(a)] + N[x, \pi(a)]$, d'où $[Nx, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Puisque $g(N) - M \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $gx - x \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ alors $g(Nx) - Nx = ((gN - N)g(x) + N(gx - x)) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.
Finalement, pour tout $x \in \mathcal{A}'$, $x = (Nx + Mx) \in \mathcal{A} + \mathcal{I}'$. □

Lemme 2.4. *Soient $(\mathcal{E}, F) \in E_G(A, B)$ et $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie opératorielle $(\mathcal{E}, F_t) \in E_G(I, B)$ tel que $F_0 = F$. Alors il existe une homotopie opératorielle G_t telle que, pour tout $a' \in I$, $t \in [0, 1]$, $(\mathcal{E}, G_t) \in E_G(A, B)$, $G_0 = F$ et $(G_t - F_t)\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. On définit $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{A} | \ x\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}),\ a \in A\}$, et on pose $\mathcal{D} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{A}'/\mathcal{I}'$. Grâce au Lemme 2.3, on voit que l'application $q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ est surjective.
Soient $q_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ et $q_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \to \mathcal{D}'$ les deux applications quotients correspondantes.
Soient $f = q_{\mathcal{A}}(F)$ et $f_t = q_{\mathcal{A}'}(F_t)$, $F \in \mathcal{A}$, $F_t \in \mathcal{A}'$.
On a $f^2 = 1$, $f = f^*$, $g \cdot f = f$ $(g \in G)$, $\partial f = 1$, et $f_t^2 = 1$, $f_t = f_t^*$, $g \cdot f_t = f_t$ $(g \in G)$, $\partial f_t = 1$.
Nous construisons un chemin $(g_t)_{t\in[0,1]} \in \mathcal{D}'$ tel que, pour tout $g \in G$,

$$q(g_t) = f_t, g_t^2 = 1, g_t = g_t^*, g \cdot g_t = g_t, \partial g_t = 1.$$

Par récurrence, supposons que l'on a un chemin continu

$$(g_t)_{t\in[0,\alpha_k]} \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1, \text{ avec } g_t \in \mathcal{D}$$

vérifiant, pour tout $g \in G$, $q(g_t) = f_t$, $g_t^2 = 1$, $g_t = g_t^*$, $g \cdot g_t = g_t$, $\partial g_t = 1$.
Choisissons une suite $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = 1$ telle que :

$$\|f_t - f_{\alpha_k}\| \leq \frac{1}{2}, \text{ pour tout } t \in [\alpha_k - \alpha_{k+1}],\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Comme q est surjective, il existe alors un chemin continu $(g_t)_{t\in[\alpha_k,\alpha_k+1]}$ tel que :

$$q(g'_t) = f_t\ ,\ g'_t = g'^*_t\ ,\ \partial g'_t = 1\ ,\ g'_{\alpha_k} = g_{\alpha_k} \text{ et } \|g'_t - g_{\alpha_k}\| \leq \frac{1}{2}.$$

On a alors $\||g'_t| - 1\| \leq \frac{1}{2}$ (car $|g_{\alpha_k}| = 1$). On pose $g_t = g'_t|g'_t|^{-1}$.
Comme $q_{\mathcal{A}}$ est surjective, il existe $(G_t)_{t\in[0,1]}$ $(q_{\mathcal{A}}(G_t) = g_t)$ un chemin continu de degré 1 dans $\mathcal{A}$ tel que $G_0 = F$.
Donc, par définition de $\mathcal{I}'$, on a $(G_t - F_t)\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, $a' \in I$, $t \in [0, 1]$. $\square$

Lemme 2.5. *Soient G_1 et F_1 des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$ tels que $(\mathcal{E}_A, G_1) \in E_G(A, B)$, $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I, B)$ et $I\cdot(F_1 - G_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$. Alors la classe de $(\mathcal{E}_A, G_1)$ dans $KK_G(A, B)$ est dans* $\operatorname{Im} p^*$.

Démonstration. Soit $s : A/I \to A$ le relèvement complètement positif. D'après le Théorème de Stinespring généralisé par Kasparov, il existe un A-module Hilbertien $\mathcal{E}_0$, et un $*$-homomorphisme non équivariant $\pi : A/I \to \mathcal{L}(A \oplus \mathcal{E}_0)$ tels que $s(a) = Q\pi(a)Q$, pour tout $a \in A$. Ici $Q : A \oplus \mathcal{E}_0 \to A$ est la projection naturelle sur le premier facteur direct A. On remplace $\mathcal{E}_0$ par le A-module Hilbertien engendré par $\{(1 - Q)\pi(a)\xi|\ a \in A/I,\ \xi \in\ A\}$, que l'on note $\mathcal{E}_0{}'$. On a aussi

$$\begin{aligned}
\langle(1 - Q)\pi(a)\xi, (1 - Q)\pi(a)\xi\rangle &= \langle\pi(a)Q\xi - Q\pi(a)\xi, \pi(a)Q\xi - Q\pi(a)\xi\rangle \\
&= \langle\pi(a)Q\xi, \pi(a)Q\xi\rangle - \langle\pi(a)Q\xi, (\pi(a^*)Q)^*\xi\rangle \\
&\quad -\langle Q\pi(a)\xi, (Q\pi(a^*))^*\xi\rangle + \langle Q\pi(a)\xi, Q\pi(a)\xi\rangle \\
&= \langle Q\pi(a^*)\pi(a)Q\xi, \xi\rangle + \langle\pi(a^*)Q\pi(a)\xi, \xi\rangle \\
&\quad -\langle\pi(a^*)Q\pi(a)\xi, \xi\rangle - \langle Q\pi(a^*)Q\pi(a)\xi, \xi\rangle \\
&= \langle s(a^*a)\xi, \xi\rangle - \langle s(a^*)s(a)\xi, \xi\rangle \\
&= \xi^*(s(a^*a) - s(a^*)s(a))\xi.
\end{aligned}$$

Comme $p(s(a^*a)-s(a^*)s(a))=0$ donc $\xi^*(s(a^*a)-s(a^*)S(a))\xi \in I$, ceci implique que $\langle(1-Q)\pi(a)\xi,(1-Q)\pi(a)\xi\rangle \in I$. D'où $\mathcal{E}_0{}'$ est un I-module Hilbertien.
Montrons qu'il existe $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F}) \in E_G(A/I,B)$ tel que $[p^*(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})] = [(\mathcal{E}_A,G_1)]$ dans $KK_G(A,B)$. L'opérateur $1\widehat{\otimes}_I F_1$ a un sens dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E}_A)$ car $(\mathcal{E}_A,F_1)\in D_G(I,B)$, de plus est une F_1-connexion pour $\mathcal{E}_0{}'$ Proposition 1.2(i). Par hypothèse on a $I(F_1-G_1)\in\mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$ alors l'opérateur $1\widehat{\otimes}_I F_1$ est une G_1 connexion pour $\mathcal{E}_0{}'$, de plus si on applique la Proposition 1.2(v) on voit que le couple $((\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E}_A)\otimes L^2(G),(1\widehat{\otimes}_I F_1)\otimes 1)$ est dans $E_G((\mathcal{K}(\mathcal{E}_0{}')\widehat{\otimes}_I 1)\otimes 1, B)$. On considère le B-module Hilbertien

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}} &:= ((A\oplus\mathcal{E}_0{}')\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}_A)\otimes L^2(G)\\ &= ((A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}_A)\oplus(\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E}_A))\otimes L^2(G)\\ &= (A\widehat{\otimes}_A\mathcal{E}_A)\otimes L^2(G)\oplus(\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E}_A)\otimes L^2(G)\\ &= \mathcal{E}_A\otimes L^2(G)\oplus(\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E}_A)\otimes L^2(G)\end{aligned}$$

Comme l'algèbre A ou B est propre, $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$ (cf. Proposition 2.1). Soit $\mathcal{E}'$ l'orthocomplément de $\mathcal{E}_A$ dans $\mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$. On définit $\tilde{F}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$ comme somme directe des trois opérateurs suivants : G_1 sur $\mathcal{E}_A$, la compression de $F_1\widehat{\otimes}1$ sur $\mathcal{E}'$, et $(1\widehat{\otimes}_I F_1)\otimes 1$ sur $(\mathcal{E}_0{}'\widehat{\otimes}_I\mathcal{E})\otimes L^2(G)$. L'élément $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$ ainsi construit est dans $E_G((\mathcal{L}(0\oplus\mathcal{E}_0{}')+\mathcal{K}(A\oplus\mathcal{E}_0{}'))\widehat{\otimes}_I 1)\otimes 1, B)$. D'autre part $Q\pi(A/I)Q = s(A/I)\subset A=\mathcal{K}(A)$, pour tout a dans A/I on note $\pi^{'}(a)$ la restriction de $\pi(a)$ sur le sous A-module $A\oplus\mathcal{E}_0{}'$ d'après [28, Démonstration du Lemme 2.5] on voit que $\pi^{'}(A/I)\subset\mathcal{L}(0\oplus\mathcal{E}_0{}')+\mathcal{K}(A\oplus\mathcal{E}_0{}')$. D'où la paire $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$ définit alors bien un élément de $E_G(A/I,B)$.
Montrons que $p^*(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$ et $(\mathcal{E}_A,G_1)$ définissent le même élément dans $KK_G(A,B)$.
Rappelons tout d'abord que, pour D une G-algèbre et σ une application complètement positive de D dans A de norme 1 tel que $p\circ\sigma : D\to A/I$ soit un $*$-homomorphisme équivariant, on a $\sigma^*(\mathcal{E},G,F)\in E_G(A,B)$.
Soit $\sigma : A\to A[0,1]$ défini par $\sigma(a)(t)=(1-t)a+t(s\circ p)(a)$ ($a\in A, t\in[0,1]$). C'est une application complètement positive et $p\circ\sigma$ est un $*$-homomorphisme équivariant. D'après le résultat rappelé ci-dessus, l'élément $\sigma^*(\mathcal{E}_A[0,1],G_1\otimes 1,F_1\otimes 1)$ de $E_G(A,B[0,1])$ définit bien une homotopie entre $(\mathcal{E}_A,G_1)$ et $p^*(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$. □

Voyant que la non-équivariance de p est compensée par les propriétés de stabilité des C^*-modules hilbertiens sur les algèbre propres.

Démonstration de la Proposition 2.2. Il est évident que $i^*\circ p^*=0$. Montrons que $\operatorname{Ker} i^*\subset\operatorname{Im} p^*$.
Soit $[(\mathcal{E},F)]\in KK_G(A,B)$ tel que $i^*[(\mathcal{E},F)]=[(0,0)]$ dans $KK_G(I,B)$. Remarquons que si $(\mathcal{E},F)\in E_G(A,B)$, il existe $F_A\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$ tel que $[(\mathcal{E}_A,F_A)]=[(\mathcal{E},F)]$ dans $KK_G(A,B)$ (cf. Lemme 2.1(ii)). Grâce au Lemme 2.2, il existe $(\mathcal{E}',F')\in D_G(A,B)$ tel que $i^*(\mathcal{E}_A\oplus\mathcal{E}',F_A\oplus F')$ soit opératoriellement homotope à un élément de $D_G(I,B)$. Comme la classe de $(\mathcal{E}_A,F_A)$ dans $KK_G(A,B)$ ne change pas quand on lui ajoute un élément $(\mathcal{E}',F')$ de $D_G(A,B)$, il existe alors un chemin $(F_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$, tel que

$F_A = F_0$, $(\mathcal{E}_A, F_t) \in E_G(I,B)$ et $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I,B)$. Compte tenu du Lemme 2.4. Il existe donc une homotopie opératorielle G_t telle que $(\mathcal{E}_A, G_t) \in E_G(A,B)$, $G_0 = F_A$ et $(G_t - F_t)\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$, pour tout $a' \in I$, $t \in [0,1]$, ainsi $[(\mathcal{E}_A, F_A)] = [(\mathcal{E}_A, G_1)]$ dans $KK_G(A,B)$. Comme $(\mathcal{E}_A, G_1)$ est opératoriellement homotope à $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I,B)$ et $I(G_1 - F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$ donc les hypothèses du Lemme 2.5 étant satisfaites, il existe alors d'après ce dernier $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F}) \in E_G(A/I,B)$ tel que $p^*[(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})] = [(\mathcal{E}_A, G_1)]$. Enfin $p^*[(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})] = [(\mathcal{E}, F)]$. □

Dans (cf. [22, Section 3.4]), Maghfoul démontre que, pour tout homomorphisme de G-algèbres $\varphi : A \to B$ et pour toute G-algèbre séparable D, on a les suites de Puppe (énoncées dans [3] et établies dans le cas non-équivariant dans [7]) :

(i) $KK_G(D, A]0,1[) \xrightarrow{\varphi_*} KK_G(D, B]0,1[) \xrightarrow{i_*} KK_G(D, C_\varphi) \xrightarrow{p_*} KK_G(D,A) \xrightarrow{\varphi_*} KK_G(D,B)$.

(ii) $KK_G(B,D) \xrightarrow{\varphi^*} KK_G(A,D) \xrightarrow{p^*} KK_G(C_\varphi, D) \xrightarrow{i^*} KK_G(B]0,1[,D) \xrightarrow{\varphi^*} KK_G(A]0,1[,D)$,

associées à φ (où C_φ, le cône de l'homomorphisme φ, est la sous-G-algèbre ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée) $\{(x,f) |\ \varphi(x) = f(0)\}$ de $A \oplus B[0,1[$), sont exactes.

Corollaire 2.1. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2. Alors si B est propre, on a la suite hexagonale exacte en première variable*

(a)
$$\begin{array}{ccccc} KK_G(A/I,B) & \xrightarrow{p^*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{i^*} & KK_G(I,B) \\ \uparrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ KK^1_G(I,B) & \xleftarrow{i^*} & KK^1_G(A,B) & \xleftarrow{p^*} & KK^1_G(A/I,B) \end{array}$$

Démonstration. Soient C_p le cône de p, $e : x \in I \to (x,0) \in C_p$ l'inclusion naturelle, et C_e le cône de e. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I([0,1[\times\{0\}) \longrightarrow C_e \longrightarrow A/I(]0,1[\times[0,1[) \longrightarrow 0.$$

Cette suite satisfait les hypothèses de la Proposition 2.2. D'après cette dernière, on obtient donc la suite exacte suivante :

$$KK_G(A/I(]0,1[\times[0,1[,B) \longrightarrow KK_G(C_e,B) \longrightarrow KK_G(I([0,1[\times\{0\},B)).$$

Comme les algèbres $I([0,1[\times\{0\})$ et $A/I(]0,1[\times[0,1[)$ sont contractibles, on en déduit alors que $KK_G(C_e,B) = 0$.
Les suites exactes de Puppe appliquées à e montrent que $e^* : KK_G(C_p,B) \to KK_G(I,B)$ est un isomorphisme. Soit $i' : f \in A/I]0,1[\to (0,f) \in C_p$. Alors l'application δ est égale à $i'^* \circ e^{*-1}$. □

2.3 Suites exactes en deuxième variable

Proposition 2.3. *Soient G un groupe topologique localement compact, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, et $0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres tel que q admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme 1. Si A ou B est propre, la suite*

(b')
$$KK_G(A, J) \xrightarrow{j_*} KK_G(A, B) \xrightarrow{q_*} KK_G(A, B/J)$$

est exacte.

Pour démontrer cette proposition, nous adaptons la méthode de Skandalis (cf. [28]) à notre situation. Avant d'énoncer le lemme 2.9 et la démonstration de cette proposition, il est nécessaire de préciser quelques lemmes établis dans les travaux de Kasparov-Skandalis (cf. [16]), et Maghfoul (cf. [22]).

Lemme 2.6 ([16, 22])**.** *Soit $(\mathcal{E}, F)$ un élément de $E_G(A, B)$ tel que $q_*((\mathcal{E}, F)) \in D_G(A, B/J)$. Alors il existe $(\mathcal{E}^J, F^J) \in E_G(A, J)$ tel que $j_*(\mathcal{E}^J, F^J) = (\mathcal{E}, F)$ dans $KK_G(A, B)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}^J = \{\xi \in \mathcal{E} | \ \langle \xi, \xi \rangle \in J\}$ le sous-module G-invariant de $\mathcal{E}$ stable par $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Comme $\mathcal{K}(\mathcal{E}^J)$ est un idéal de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, alors la suite

$$0 \to \mathcal{K}(\mathcal{E}^J) \to \mathcal{K}(\mathcal{E}) \to \mathcal{K}(\mathcal{E} \widehat{\otimes}_B B/J) \to 0$$

est exacte. Par hypothèse, $q_*((\mathcal{E}, F)) \in D_G(A, B/J)$. Donc $[a, F] = a(F - F^*) = a(1 - F^2) = a(gF - F) = 0$. Grâce au suite exacte ci-dessus l'élément $[a, F]$, $a(F - F^*)$, $a(1 - F^2)$ et $a(gF - F)$ sont dans $\mathcal{K}(\mathcal{E}^J)$.
Soient $\tilde{\mathcal{E}} = \{\xi \in \mathcal{E}[0, 1] | \ \xi(1) \in \mathcal{E}^J\}$ et F^J la restriction de F sur $\mathcal{E}^J$. Alors $\mathcal{K}(\mathcal{E}^J) \otimes 1 \subset \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}})$, ainsi l'élément $(\tilde{\mathcal{E}}, F \otimes 1)$ définit une homotopie entre $(\mathcal{E}, F)$ et $(\mathcal{E}^J, F^J) \in j_*(E_G(A, J))$ (car $j_*(\mathcal{E}^J, F^J) = (\mathcal{E}^J, F^J)$). □

Lemme 2.7 ([16, 22])**.** *Soit $(\mathcal{E}, \pi)$ un (A, B)-bimodule Hilbertien équivariant. On pose pour tout a dans A et g dans G :*

$$\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) | \ T \text{ est } G\text{-continu, } [\pi(a), T] \in \mathcal{K}(\mathcal{E}) \text{ et } \pi(a)(gT - T) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\}$$
$$\mathcal{B} = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \widehat{\otimes}_B B/J) | \ T \text{ est } G\text{-continu, } [\pi(a), T] \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{E}}) \text{ et } \pi(a)(gT - T) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\}$$
$$\mathcal{I} = \{T \in \mathcal{A} | \ Ta \in \mathcal{K}(\mathcal{E})\}$$
$$\mathcal{J} = \{T \in \mathcal{A} | \ Ta \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \widehat{\otimes}_B B/J)\}$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{B}/\mathcal{J}$. Alors l'homomorphisme $q_* = \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E} \widehat{\otimes}_B B/J)$, donné par $(q_*(T) = T \otimes 1)$, induit un homomorphisme surjectif de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$.

Démonstration. Comme $q_* : \mathcal{K}(\mathcal{E}) \to \mathcal{K}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J)$ est surjectif et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ admet une unité approchée dénombrable, le prolongé de q_* est un $*$-homomorphisme surjectif de $M(\mathcal{K}(\mathcal{E}))$ dans $M(\mathcal{K}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J))$. On note ce prolongement encore $q_* : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J)$. De plus, on a $q_*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ et $q_*(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{J}$. Pour montrer l'assertion du lemme, il suffit de montrer que $q_* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est surjectif.
Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ homogène pour la graduation, auto-adjoint et tel que $q_*(T) = S \in \mathcal{B}$ et $\pi(a)(g \cdot T - T) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ pour tout $a \in A$. Soit ψ une fonction continue sur G telle que $\int_G \psi(g)dg = 1$. On pose $T' = \int_G (g \cdot T)\psi(g)dg$. On voit que T' est G-continu et on a $q_*(T') - q_*(T) = S'$, où $S' \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J)$ (car $q_*(T) = S \in \mathcal{B}$). Il existe $S_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ tel que $q_*(S_0) = S'$. Ainsi l'élément $T' - S_0$ est G-continu et a la même image que T. Donc on peut supposer que S et T sont G-continus.
Soit $\mathcal{E}^J$ le sous-module de $\mathcal{E}$ défini dans la démonstration du Lemme 2.6. Notons que $\mathcal{K}(\mathcal{E}^J)$ est un idéal G-invariant de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Soit D la sous-algèbre séparable de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, $C_0(X, A)$ et la translation de T par G. Posons $D_1 = D \cap \operatorname{Ker} q_*$. Les hypothèses de [19, Théorème 1.4] étant satisfaites, on peut alors construire un élément $M \in M(\mathcal{K}(\mathcal{E}^J)) = \mathcal{L}(\mathcal{E})$, G-continu, équivariant et satisfaisant les conditions de ce Théorème.
On a $q_*(MT) = q_*(T)$ car $M \in \operatorname{Ker} q_*$. Montrons que $MT \in \mathcal{A}$. Notons que, pour tout $a \in A$, on a

$$[\pi(a), MT] = M[\pi(a), T] + [\pi(a), M]T.$$

Comme $q_*(T) \in \mathcal{B}$, $q_*([\pi(a), MT]) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J)$. Il existe donc $K \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ tel que $q_*(K) = q_*([\pi(a), T])$. Ainsi $(K - [\pi(a), T]) \in D_1$. On en déduit :

$$[\pi(a), MT] = (MK + M([\pi(a), T] - K) - [\pi(a), M]T) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}).$$

Il nous reste à vérifier que $(g(MT) - MT)\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, pour tout $a \in A$ et tout $g \in G$. On a $(g(MT) - MT)\pi(a) = (gM - M)(gT)\pi(a) + M(gT - T)\pi(a)$. Comme $gM - M \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, il suffit donc de vérifier que $M(gT - T)\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. Compte tenu que $q_*(T) \in \mathcal{B}$, $q_*(gT - T)\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J)$. Il existe alors $K' \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ tel que $K' - (gT - T)\pi(a) \in D_1$. Ainsi $MK' - M(gT - T)\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_J) \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$ de plus $MK' \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, ce qui implique $M(gT - T)\pi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. □

Lemme 2.8 ([22])**.** *Soient $(\mathcal{E}, F) \in E_G(A, B)$ et $(\mathcal{E}\widehat{\otimes}_B B/J, G_t) \in E_G(A, B/J)$ une homotopie opératorielle tel que $F\widehat{\otimes}1 = G_0$. Il existe alors une homotopie opératorielle, $(\mathcal{E}, F_t) \in E_G(A, B)$, tel que $F_0 = F$.*

Démonstration. Soient $q_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ et $q_\mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{D}'$ les applications quotients du Lemme 2.7. Soient $f = q_\mathcal{A}(F)$ et $f_t = q_\mathcal{B}(G_t)$, $F \in \mathcal{A}$, $F_t \in \mathcal{A}'$. On a $f^2 = 1$, $f = f^*$, $g \cdot f = f$ $(g \in G)$, $\partial f = 1$ et $f_t^2 = 1$, $f_t = f_t^*$, $g \cdot f_t = f_t$ $(g \in G)$, $\partial f_t = 1$.
On veut construire un chemin $(g_t)_{t\in[0,1]} \in \mathcal{D}'$ tel que, pour tout $g \in G$,

$$q(g_t) = f_t,\ g_t^2 = 1,\ g_t = g_t^*,\ g \cdot g_t = g_t,\ \partial g_t = 1.$$

Par récurrence, supposons que l'on a un chemin continu

$$(g_t)_{t\in[0,\alpha_k]},\ k=0,1,\ldots,n-1, \text{ avec } g_t \in \mathcal{D}$$

qui vérifie, pour tout $g \in G$, $q_*(g_t) = f_t,\ g_t^2 = 1,\ g_t = g_t^*,\ g\cdot g_t = g_t,\ \partial g_t = 1$. Choisissons une suite $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = 1$ telle que :

$$\|f_t - f_{\alpha_k}\| \leq \frac{1}{2}, \qquad t \in [\alpha_k - \alpha_{k+1}],\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Comme q_* est surjectif, il existe un chemin continu $(g_t)_{t\in[\alpha_k,\alpha_k+1]}$ tel que :

$$q_*(g'_t) = f_t,\ g'_t = g'^*_t,\ \partial g'_t = 1,\ g'_{\alpha_k} = g_{\alpha_k} \text{ et } \|g'_t - g_{\alpha_k}\| \leq \frac{1}{2}.$$

On a alors $\||g'_t| - 1\| \leq \frac{1}{2}$, compte tenu que $|g_{\alpha_k}| = 1$. On pose $g_t = g'_t|g'_t|^{-1}$. On définit ainsi un chemin continu, $(F_t)_{t\in[0,1]}$, dans $\mathcal{A}$, donné par $q_{\mathcal{A}}(F_t) = g_t$ et $F_0 = F$. □

Lemme 2.9. *Pour chaque élément $(\mathcal{E}', F')$ de $D_G(A, B/J)$, il existe un élément $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})$ de $D_G(A, B)$, tel que $(\tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_q B/J, \tilde{F}\widehat{\otimes}_q 1)$ contenant $(\mathcal{E}'_A, F'_A)$ comme facteur direct.*

Démonstration. Soit $s : B/J \to B$ le relèvement complètement positif, non équivariant et de norme 1. Par le théorème de Stinespring généralisé par Kasparov, il existe un B-module Hilbertien $\mathcal{E}_0$ et un $*$-homomorphisme non équivariant $\pi : B/J \to \mathcal{L}(B \oplus \mathcal{E}_0)$ tel que $s(a) = Q\pi(a)Q$, pour tout $a \in A$. Ici $Q : B \oplus \mathcal{E}_0 \to B$ est la projection naturelle sur le premier facteur direct A.
On considère le B-module Hilbertien $\bar{\mathcal{E}} := L^2(G) \otimes (B \oplus \mathcal{E}_0)$, soit $\bar{\pi} : B/J \to \mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}})$ l'$*$-homomorphisme équivariante donnée par $(\bar{\pi}(b)e)(g) = (g\pi(g^{-1}b)e(g))$ (cf. Lemme 2.1(i)).
Posons $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{\bar{\pi}}\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J}\bar{\mathcal{E}}$ et $\tilde{F} = F'_A \otimes 1$. Il est clair que $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F})$ est un élément de $D_G(A, B)$. Montrons que $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_B B/J$.
Supposons tout d'abord que B est propre. Grâce au Lemme 2.1(ii), on peut remplacer le $(B, B/J)$-bimodule équivariant de Kasparov $(B\widehat{\otimes}_B B/J, 1_B \otimes 1_{B/J})$ par le $(B, B/J)$-bimodule équivariant de Kasparov $(B/J, 1_{B/J})$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_B B/J &= \tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_q B/J \\
&= (\mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J}\bar{\mathcal{E}})\widehat{\otimes}_B B/J \\
&= \mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J}(L^2(G) \otimes B\widehat{\otimes}_B B/J) \oplus E \\
&= \mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J} B/J \oplus E' \text{ (cf. Proposition 2.1)} \\
&= \mathcal{E}'_A \oplus E'.
\end{aligned}$$

On ne suppose plus désormais que B est propre, mais que A est propre. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_B B/J &= \tilde{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_q B/J \\
&= (\mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J}\bar{\mathcal{E}})\widehat{\otimes}_B B/J \\
&= ((\mathcal{E}'_A\widehat{\otimes}_{B/J}B/J)\otimes L^2(G))\oplus E \\
&= ((\mathcal{E}'_A\otimes L^2(G))\oplus E \\
&= \mathcal{E}'_A\oplus E' \text{ (cf. Proposition 2.1).}
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la Proposition 2.3. Il est évident que $q_*\circ j_* = 0$. Montrons que $\operatorname{Ker} q_*\subset \operatorname{Im} j_*$. Soit $(\mathcal{E},F)\in E_G(A,B)$ tel que $q_*(\mathcal{E},F)=(0,0)$ dans $KK_G(A,B/J)$. Alors, il existe $(\mathcal{E}',F')$ et $(\mathcal{E}'',F'')$ deux éléments de $D_G(A,B/J)$ tels que $q_*(\mathcal{E},F)\oplus(\mathcal{E}',F')$ soit opératoriellement homotope à $(\mathcal{E}'',F'')$ (cf. [18, Section 6, Théorème 1]). Alors $q_*(\mathcal{E}_A,F_A)\oplus(\mathcal{E}'_A,F'_A)$ est aussi opératoriellement homotope à un élément de $D_G(A,B/J)$.
Il est évident que, si l'on a un élément dégénéré $(\tilde{\mathcal{E}}',\tilde{F}')$ de $E_G(A,B/J)$, contenant $(\mathcal{E}'_A,F'_A)$ comme facteur direct, $q_*(\mathcal{E}_A,F_A)\oplus(\tilde{\mathcal{E}}',\tilde{F}')$ est opératoriellement homotope à un élément dégénéré de $E_G(A,B/J)$. $(\mathcal{E}',F')\in D_G(A,B/J)$ donc grâce au Lemme 2.9 l'élément $(\tilde{\mathcal{E}}',\tilde{F}')$ existe et est égal à $q_*(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$; où $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F})$ un élément dégénéré de $E_G(A,B)$. Ceci implique que $q_*((\mathcal{E}_A,F_A)\oplus(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{F}))$ est opératoriellement homotope à un élément de $D_G(A,B/J)$.
Notons par G_t cette homotopie opératorielle avec $G_0=(F_A\oplus\tilde{F})\otimes 1$. Compte tenu du Lemme 2.8, il existe une homotopie opératorielle F_t telle que $(\mathcal{E}_A\oplus\tilde{\mathcal{E}},F_t)\in E_G(A,B)$, $F_0=F_A\oplus\tilde{F}$ et $F_1\otimes 1=F''_A$. Dans ce cas, $(\mathcal{E}''_A,F''_A)$ est un élément de $D_G(A,B/J)$. Grâce au Lemme 2.6, la classe de $(\mathcal{E}_A\oplus\tilde{\mathcal{E}},F_1)$ dans $KK_G(A,B)$ est dans l'image de j_*. Le fait que $(\mathcal{E}_A\oplus\tilde{\mathcal{E}},F_1)$, $(\mathcal{E}_A\oplus\tilde{\mathcal{E}},F_A\oplus\tilde{F})$ et $(\mathcal{E},F)$ sont dans la même classe de $KK_G(A,B)$, alors $[(\mathcal{E},F)]\in\operatorname{Im} j_*$, avec $j_*:KK_G(A,J)\to KK_G(A,B)$. □

Corollaire 2.2. *Sous les hypothèses de la proposition (2.3). Alors si A est propre, on a la suite hexagonale exacte en deuxième variable*

$$\text{(b)}\qquad \begin{array}{ccccc}
KK_G(A,J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G(A,B/J) \\
\uparrow \delta^1 & & & & \downarrow \delta^1 \\
KK^1_G(A,B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK^1_G(A,B) & \xleftarrow{j_*} & KK^1_G(A,J)
\end{array},$$

Démonstration. Soit C_q le cône de q, $e':x\in J\to(x,0)\in C_q$ l'inclusion naturelle, soit $C_{e'}$ le cône de e', on a la suite exacte :

$$0\longrightarrow J([0,1[\times\{0\})\longrightarrow C_{e'}\longrightarrow B/J(]0,1[\times[0,1[)\longrightarrow 0$$

Cette suite satisfaite les hypothèses de la proposition (2.3), alors on obtient la suite exacte suivante :

$$KK_G(A,J([0,1[\times\{0\})\longrightarrow KK_G(A,C_{e'})\longrightarrow KK_G(A,B/J(]0,1[\times[0,1[))$$

Les algèbres $J([0,1[\times\{0\})$ et $B/J(]0,1[\times[0,1[)$ sont contractibles. On en déduit alors que $KK_G(A, C_{e'}) = 0$. Les suites exactes de Puppe appliquées à e' montrent que $e'_* : KK_G(A, C_q) \to KK_G(A, J)$ est un isomorphisme. Soit $j' : f \in B/J]0,1[\to (0,f) \in C_q$ l'application δ^1 est égale ${e'_*}^{-1} \circ j'_*$. $\square$

Chapitre 3

Moyennabilité topologique et la K-théorie équivariante de Kasparov

Afin d'étendre les suites exactes hexagonales des Corollaires 2.1 et 2.2 aux actions moyennables, nous allons rappeler tout d'abord la notion d'un groupe de transformation moyennable au sens d'Anantharaman-Delaroche et Renault (cf. [1, Définition 2.1]). Pour plus de détails, et de question concernant les liens avec la moyennabilité topologique des groupoïdes, nous adressons le lecteur aux travaux d'Anantharaman-Delaroche et Renault (cf. [2, Chapitre 2, Section 2]), et Renault (cf. [26]).

3.1 Construction d'une algèbre propre au sens de Higson-Kasparov

On désigne par $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact et $Prob(G)$ l'espace de mesures de probabilité sur G muni de la topologie faible.
Soient $f \in C_c(G)$, $x \in X$, $m \in Prob(G)$ et $s \in G$. On pose $(s \cdot f)(t) = f(ts)$ et $(s \cdot m)(f) = m(s^{-1} \cdot f)$.
Soit $s \in C_c(G \times X)$. Alors $g^x : t \to g^x(t) = g(t, x)$ définit une application de G dans $\mathbb{C}$ et $g^t : x \to g^t(x) = g(t, x)$ une application de X dans $\mathbb{C}$. On note dt la mesure de Haar invariante à gauche sur G.
Dans le reste de ce chapitre, nous utilisons (X, G) pour dénoter un groupe de transformation topologique moyennable au sens d'Anantharaman-Delaroche (cf. [1, Définition 2.1]). Rappelons cette définition. Etant donné un groupe de transformation topologique (X, G), on dit que (X, G) est *moyennable en mesure* s'il existe une suite généralisée $(m_i)_{i \in I}$ d'applications continues $x \to m_i^x$ de X dans $Prob(G)$ telles que $\lim_i \|s \cdot m_i^x - m_i^{xs}\|_1 = 0$ soit uniformément sur tout compact de $G \times X$.On dit que (X, G) est *moyennable en norme* L^2 s'il existe $(\xi_i)_i \subset C_c(G \times X)$ vérifiant :

(i) $x \mapsto \int_G |\xi_i^x(t)|^2 dt$ converge vers 1 uniformément sur tout compact de X ;

(ii) $(s,x) \mapsto \int_G |\xi_i^{xs}(ts) - \xi_i^x(t)|^2 dt$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $G \times X$.

La moyennabilité en mesure est équivalente à celle en norme L^2 (cf. [1, Proposition 2.5]).
L'action de G sur X permet de définir un groupoïde produit croisé de X par G : celui-ci est l'ensemble des couples (x,g) avec $x \in X$, $g \in G$. Les paires composables sont donc les couples de la forme $((x,g),(xg,g^{'}))$. Leur composée est donnée par $(x,g)(xg,g^{'}) = (x,gg^{'})$. L'inverse de (x,g) est (xg,g^{-1}). On note ce groupoïde $X \rtimes G$ (dans le cas d'une action à droite).
Désignons par $(H_x)_{x\in X}$ le champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie dont la fibre H_x est égal $L^2(G) \otimes l^2(\mathbb{N})$.

Définition 3.1. *([29, définition 6.2])* On dit que le groupe de transformation (X,G) agit sur $(H_x)_{x\in X}$ par isométries affines si pour tout $(x,g) \in X \times G$, il existe une isométrie affine $U_{(x,g)} : H_{xg} \longrightarrow H_x$ telle que :

(i) $U_{(x,e)} = Id_{H_x}$,

(ii) $U_{(x,g)}U_{(xg,g')} = U_{(x,gg')}$,

(iii) tout champ de vecteurs ξ^x de $(H_x)_{x\in X}$ et tout $g \in G$, $U_{(x,g)}(\xi^{xg})$ est un champ de vecteurs de $(H_x)_{x\in X}$.

Pour un groupe topologique localement compact séparé G nous emploierons la notation $g \to +\infty$, quand g quitte tout compact de G.

Définition 3.2. *([13, définition 4.8])* On dit que une action affine de groupe G sur le champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie $(H_x)_{x\in X}$ si l'on a pour tout $g \in G$ et $\eta^x \in H_x$; $g \cdot \eta^x = U_{(xg^{-1},g)}\eta^x + b((xg^{-1},g)) \in H_{xg^{-1}}$; où b est un cocycle i.e est une fonction continue de $X \times G$ à valeurs dans $(H_x)_{x\in X}$ tel que $b((x,g)(xg,g^{'})) = U_{(x,g)}b((xg,g^{'})) + b((x,g))$, l'action ainsi définie est dit métriquement propre si l'on a :

$$\lim_{g \to +\infty} ||b((x,g))|| = +\infty.$$

Lemme 3.1. *([4], [30, Lemme 3.5]) Soit (X,G) un groupe de transformation moyennable. Alors, il existe une action affine métriquement propre de groupe G sur le champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie $(H_x)_{x\in X}$.*

Démonstration. On pose : $(U_{(x,g)}(\xi^{xg}))(x,t) := \xi^{xg}(tg)$. Si le groupe de transformation (X,G) est moyennable alors $\int_G |\xi_n^{xg}(tg) - \xi_n^x(t)|^2 dt$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de $G \times X$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq p$, on a $||U_{(x,g)}(\xi_k^{xg}) - \xi_k^x||^2 \leq \frac{1}{2^k}$. On en déduit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} ||\sum_{k \geq n} k(U_{(x,g)}(\xi_k^{xg}) - \xi_k^x)||^2 &\leq \sum_{k \geq n} k^2 ||U_{(x,g)}(\xi_k^{xg}) - \xi_k^x||^2 \\ &\leq \sum_{k \geq n} \frac{k^2}{2^k} \quad < +\infty. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} n(U_{(x,g)}(\xi_n^{xg}) - \xi_n^x)$ est convergente. Soit $b : X \rtimes G \longrightarrow \bigcup_{x \in X} H_x$, l'application définit par $b((x,g)) = (n(U_{(x,g)}\xi_n^{xg} - \xi_n^x))_{n \in \mathbb{N}} \in H_x$; où ξ_n est la fonction qui satisfait les conditions de la moyennabilité topologique en norme L^2 du groupe de transformation (X,G). Il est évident que b est un cocycle respectant les isométries affines; i.e. $b((x,gg')) = b((x,g)(xg,g')) = U_{(x,g)} b((xg,g')) + b((x,g))$, donc on peut définir une action affine de groupe G sur $(H_x)_{x \in X}$ telle que pour tout $\eta = (\eta^x)_{x \in X}$ on a

$$g \cdot \eta^x = U_{(xg^{-1},g)} \eta^x + b((xg^{-1},g)) \in H_{xg^{-1}} \tag{3.1}$$

Montrons que l'action affine définie par cocycle est métriquement propre. En effet, si on se fixe $N \in \mathbb{N}$, donc pour tout $g \in G$, on a $N^2 ||U_{(x,g)}\xi_N^{xg} - \xi_N^x||^2 \leq ||b((x,g))||^2$. Alors, quand g tend vers l'infini, on a $(\operatorname{supp} U_{(x,g)}\xi_N^{xg} \cap \operatorname{supp} \xi_N^x) = \emptyset$. Le fait que $x \mapsto \int_G |\xi_n^x(t)|^2 dt$ converge vers 1 uniformément sur tout compact de X, nous avons $||U_{(x,g)}\xi_N^{xg} - \xi_N^x|| \geq \sqrt{2}$. D'où

$$||b((x,g))|| \geq \sqrt{2} N. \tag{3.2}$$

□

Dans cette partie nous donnons les constructions faites dans [13, Section 4]. Soient H un espace Hilbertien réel de dimension infinie, V un sous-espace affine de dimension finie de H, et V^0 le sous-espace vectoriel sous-jacents à V.
On considère l'algèbre extérieure complexe $\Lambda^*(V^0) \otimes \mathbb{C}$ comme un espace Hilbertien complexe de dimension finie. On note $\mathcal{L}(V)$ la C^*-algèbre des opérateurs sur $\Lambda^*(V^0) \otimes \mathbb{C}$. Comme $\Lambda^*(V^0) \otimes \mathbb{C}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, $\mathcal{L}(V)$ l'est aussi. On note $\mathcal{C}(V)$ la C^*-algèbre graduée $C_0(V^0 \times V, \mathcal{L}(V))$ c'est l'ensemble des fonctions continues de $V^0 \times V$ à valeurs dans $\mathcal{L}(V)$ qui s'annulent à l'infini la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\mathcal{C}(V)$ étant induite par celle de $\mathcal{L}(V)$. On note $S = C_0(\mathbb{R})$ la C^*-algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui s'annulent à l'infini, muni de la graduation par la parité des fonctions. Désignons par $\mathcal{A}(V)$ le produit tensoriel gradué $S \widehat{\otimes} \mathcal{C}(V)$, c'est une C^*-algèbre non-commutative nucléaire.

Si W^0 un sous-espace vectoriel de dimension finie de H. L'opérateur de *Bott* $\mathcal{B}_{W^0}$ de $\mathcal{C}(W^0)$ est la fonction $\mathcal{B}_{W^0} : W^0 \times W^0 \to \mathcal{L}(W^0)$ tel que l'image de (w_1, w_2) est l'opérateur

$$i\bar{c}(w_1) + c(w_2) \ : \Lambda^*(W^0) \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^*(W^0) \otimes \mathbb{C}$$

où $\bar{c}(w_1)$ et $c(w_2)$ la multiplication de Clifford. L'opérateur de *Bott* est de degré 1, auto-adjoint, peut être regardé comme multiplicateur non borné de $\mathcal{C}(W^0)$ (cf. [6, Section 6.5]), son domaine est l'ensemble des fonctions à supports compact de $\mathcal{C}(W^0)$. Nous définissons alors un $*$-homomorphisme $\mathcal{A}(0) \to \mathcal{A}(W^0)$ par la formule $f \mapsto f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}\mathcal{B}_{W^0})$ où : $f \in \mathcal{A}(0)$ et X est la multiplication par la fonction identique de $\mathbb{R}$, considérée comme multiplicateur non borné de degré 1 de S.
Si $V^{'}$ un sous-espace affine de dimension finie de H tel que $V^{'} \subset V$. Il existe une inclusion canonique $\mathcal{L}(V^{'}) \to \mathcal{L}(V)$ tel que l'image de l'opérateur de Cilfford $c(v^{'}) \in \mathcal{L}(V^{'})$ est égale $c(v^{'}) \in \mathcal{L}(V)$. Pour une fonction $V^{'} \to \mathcal{L}(V^{'})$ on associé la fonction $V \to \mathcal{L}(V^{'})$ via la projection orthogonale $p_{(V,V^{'})} \ : V \to V^{'}$ et la fonction $V \to \mathcal{L}(V)$ via l'inclusion canonique, ce transformé en générale ce n'est pas une fonction qui s'annule à l'infinie, nous avons donc un $*$-homomorphisme de $\mathcal{C}(V^{'})$ à valeurs dans l'algèbre de multiplicateur de $\mathcal{C}(V)$.
Notons W^0 l'orthocomplémentaire de ${V^{'}}^0$ dans V^0. De même il existe une inclusion canonique $\mathcal{L}(W^0) \to \mathcal{L}(V)$ via la projection; $p_{(V,W^0)}(v) = v - p_{(V,V')}(v)$, puisque l'opérateur de *Bott* est un multiplicateur non borné de $\mathcal{C}(W^0)$ alors l'opérateur $X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}\mathcal{B}_{W^0}$ est un multiplicateur non borné de $\mathcal{A}(V)$. Enfin nous définissons alors un $*$-homomorphisme $\mathcal{A}(V^{'}) \to \mathcal{A}(V)$ par la formule $f\widehat{\otimes}h \mapsto f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}\mathcal{B}_{W^0}) \cdot h$, les éléments $f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C)$ et h sont des multiplicateurs bornés de $\mathcal{A}(V)$ leurs produit est dans $\mathcal{A}(V)$. Cette $*$-homomorphisme définit uniquement par transitivité respectant les inclusions $V^{''} \subset V' \subset V$ (cf. [14, Proposition 3.2]). Le fait que l'on obtient bien un système inductif, alors nous définissons la C^*-algèbre non-commutative nucléaire séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée

$$\mathcal{A}(H) = \varinjlim_{V \subset H} \mathcal{A}(V).$$

Nous rappelons la construction de Skandalis et Tu ([30, Section 6]) : Soit $H_x^{'}$ l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie $H_x \times H_x$ muni de la topologie faible. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, l'ensemble $\{\zeta^x \in H_x^{'}/||\zeta^x|| \leq t\}$ est compact, donc l'espace $Z_x^{'} = \{(\zeta^x, t) \in H_x^{'} \times \mathbb{R}_+/||\zeta^x|| \leq t\}$ est localement compact fermé et séparé. Soit Z_x l'espace $H_x \times H_x \times \mathbb{R}_+$ muni de la topologie telle que l'application suivante

$$(\eta^x, \xi^x, t) \mapsto (\eta^x, \xi^x, \sqrt{||\eta^x||^2 + ||\xi^x||^2 + t^2}) \tag{3.3}$$

soit un homéomorphisme de Z_x dans $Z_x^{'}$. Alors une suite (η_i^x, ξ_i^x, t_i) de Z_x tend vers (η^x, ξ^x, t) si et seulement si (η_i^x, ξ_i^x) converge faiblement vers (η^x, ξ^x) et $||\eta_i^x||^2 + ||\xi_i^x||^2 + t_i^2$ tend vers $||\eta^x||^2 + ||\xi^x||^2 + t^2$.
Le centre $Z(V)$ de l'algèbre $\mathcal{A}(V)$ égale $S^p\widehat{\otimes}C(V \times V^0)$ de plus nous avons la propriété

$Z(V)\cdot\mathcal{A}(V)$ dense dans $\mathcal{A}(V)$. Soit W l'orthocomplémentaire de V' dans V, l'application continue de $\mathbb{R}^+ \times V \times V^0$ a valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times W \times W^0$ définie par la formule :

$$(t, v, v^0) \mapsto (\sqrt{t^2 + 2||(1 - p_{(V,W^0)})(v^0)||^2}, p_{(V,W)}(v), p_{(V,W^0)}(v^0))$$

induite un morphisme $Z(W) \to Z(V)$. Le fait que l'on obtient une limite inductive $Z(H)$ satisfaisant la propriété $Z(H) \cdot \mathcal{A}(H)$ dense dans $\mathcal{A}(H)$.
Considérons $H = (H_x)_{x\in X}$ un champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie, reprenons la construction de [30] : pour tout compact K de X, tout ouvert Ω de K, si $f \in C_c(X)$ est à support inclus dans Ω et $\xi_0, ..., \xi_n : K \to H = (H_x)_{x\in X}$ sont des sections locales continues telles que pour tout $x \in K$, la famille $\xi_0(x), ..., \xi_n(x)$ soit affinement indépendants dans H_x, soit V_x l'espace affine engendré par cette famille. Alors le champ continu des sous-espaces affines de dimensions finie $(V_x)_{x\in K}$ est isomorphe au champ constant $K \times \mathbb{R}^n$. Soit $g : K \to \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ une fonction continue. La fonction a définie sur Ω, et prolongé par 0 en dehors de Ω, donnée par la formule $x \mapsto a(x) := f(x)g(x)$, s'identifie à une section de $(\mathcal{A}(H_x))_{x\in X}$ à support dans Ω. Ces sections munissent $(\mathcal{A}(H_x))_{x\in X}$ d'une structure de champ continu d'espaces de Banach sur X.
Désignons par $\mathcal{A}_X(H)$ l'ensemble de ces sections est une algèbre involutive (est une sous-algèbre de l'algèbre maximale (cf. [8, Section 10.4]) associée à $(\mathcal{A}(H_x))_{x\in X}$). Pour $a \in \mathcal{A}_X(H)$, posons $||a|| = \sup_{x\in X} ||a(x)|| < +\infty$. Il est immédiat que, pour cette norme, $\mathcal{A}_X(H)$ est une C^*-algèbre. Soit Z l'espace localement compact $\bigcup_{x\in X} Z_x$, le centre $Z_X(H)$ de l'algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ est isomorphe à $C(Z)$, de plus $Z_X(H) \cdot \mathcal{A}_X(H)$ dense dans $\mathcal{A}_X(H)$.
L'action affine Eq (3.1) de groupe G sur le champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie $H := (H_x)_{x\in X}$, induit une action notée α de groupe G sur La C^*-algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ par $*$-automorphismes donnée par la formule : pour tout g dans G on a, $(\alpha_g(a)(x))(\xi^x) := (a(x))(g^{-1} \cdot \xi^{xg^{-1}})$; où $a \in \mathcal{A}_X(H)$, $x \in X$ et $\xi^x \in H_x$.
Montrons que la G-algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ est munie d'une structure de $C(X)$-algèbre :
L'application continue p_1 de Z à valeurs dans X définie par $p_1(\xi^x) = x$ induite un $*$-homomorphisme p_1^* de $C(X)$ à valeurs dans $C_b(Z)$ défini en posant, $\forall f \in C(X)$: $p_1^*(f) = f \circ p_1$, étendu à $C(Z)$. Par conséquent on a une application structurale de $C(X)$ dans le centre de l'algèbre de multiplication de $\mathcal{A}_X(H)$, de plus nous avons la propriété : $p_1^*(C(X))\mathcal{A}_X(H)$ est dense dans $\mathcal{A}_X(H)$. En résulte le :

Lemme 3.2. *La C^*-algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ est une G-algèbre, munie d'une structure de $C(X)$-algèbre, de plus $C(Z) \cdot \mathcal{A}_X(H)$ dense dans $\mathcal{A}_X(H)$.*

Lemme 3.3. *([30, Lemme 6.1]) L'action affine métriquement propre de groupe G sur le champ continu d'espaces Hilbertiens de dimensions infinie $(H_x)_{x\in X}$ définie une action propre de groupe G sur l'espace localement compact Z (au sens habituel); i.e. pour tout compact K de Z l'ensemble $\{g \in G|\ g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est compact.*

Démonstration. On définit une action continue de G sur Z par la formule $g\cdot(\eta^x, \xi^x, t) = (U_{(xg^{-1},g)}\eta^x, g\cdot\xi^x, t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par $Z'_{x,n}$ l'espace compact $\{(\zeta^x, t) \in Z'_x|\ t \leq n^{1/2}\}$. Alors $(Z'_{x,n})_{n\in N}$ est une suite exhaustive de compacts de Z'_x. Soit $Z_{x,n} = \{(\eta^x, \xi^x, t) \in Z_x|\ ||\eta^x||^2 + ||\xi^x||^2 + t^2 \leq n\}$ l'image réciproque de $Z'_{x,n}$ par l'homéomorphisme (3.3). Pour tout $g \in G$ et $(\eta^x, \xi^x, t) \in Z_{x,n}$, on a :

$$\begin{aligned}
||U_{(xg^{-1},g)}\eta^x|| + ||g\cdot\xi^x||^2 + t^2 &= ||\eta^x|| + ||U_{(xg^{-1},g)}\xi^x + b((xg^{-1},g))||^2 + t^2 \\
&\geq (||b((xg^{-1},g))|| - ||\xi^x||)^2 + t^2 \\
&\geq (||b((xg^{-1},g))|| - n)^2.
\end{aligned}$$

Le fait que $||b((xg^{-1},g))|| \geq \sqrt{2}n$ Eq(3.2), donc $||U_{(xg^{-1},g)}\eta^x|| + ||g\cdot\xi^x|| + t^2 > n$. Ceci implique que $g\cdot Z_{x,n} \cap Z_{xg^{-1},n} = \emptyset$, i.e. $\{g \in G|\ g\cdot Z_{x,n} \cap Z_{xg^{-1},n} \neq \emptyset\}$ est compact. Il en résulte que l'action de G sur l'espace localement compact Z est propre.

□

Corollaire 3.1. *Si (X, G) un groupe de transformation moyennable, alors la C^*-algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ est une G-algèbre propre, munie d'une structure de $C(X)$-algèbre et pour tout G-$C(X)$-algèbre B on a une G-algèbre propre $B\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H)$.*

Démonstration. Le fait que le groupe G agit proprement sur l'espace localement compact Z (cf. Lemme 3.3) et comme l'algèbre $C(Z)$ satisfaisant la condition $C(Z)\cdot\mathcal{A}_X(H)$ dense dans $\mathcal{A}_X(H)$ (cf. Lemme 3.2), alors la C^*-algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ est une G-algèbre propre sur Z. Pour tout G-$C(X)$-algèbre B on a une algèbre $B \otimes \mathcal{A}_X(H)$ propre sur Z (cf. [10, Chapitre 8]). Or

$$B \otimes_{C(X)} \mathcal{A}_X(H) := (B \otimes \mathcal{A}_X(H))/C_\Delta(B \otimes \mathcal{A}_X(H)),$$

où C_Δ désigne l'idéal de $C(X \times X)$ des fonctions nulles sur la diagonale. Alors $B \otimes_{C(X)} \mathcal{A}_X(H)$ est propre sur Z. □

3.2 Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov pour les actions moyennables

Avant d'étendre les suites exactes en K-théorie bivariante pour les actions mouennables, commençons par donner une définition utile pour comprendre la preuve du ce résultat principal.

Définition 3.3. *Soient G un groupe localement compact et B, B' deux G-algèbres. On dit que B est KK_G-sous-équivalente à B' si on a des éléments $\alpha \in KK_G(B', B)$ et $\beta \in KK_G(B, B')$ tels que $\beta \otimes_{B'} \alpha = 1_B$. Dans ce cas , pour toute G-algèbre A, on a des groupes $R^A_{\alpha,\beta}$, $L^A_{\alpha,\beta}$ tels que : $KK_G(A, B') = KK_G(A, B) \oplus R^A_{\alpha,\beta}$, $KK_G(B', A) = KK_G(B, A) \oplus L^A_{\alpha,\beta}$.*

A toute suite exacte G-équivariante $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ de G-algèbres, on associe alors les suites :

$$KK_G(A/I, B^{'}) \xrightarrow{p^*} KK_G(A, B^{'}) \xrightarrow{i^*} KK_G(I, B^{'})$$

$$KK_G(A/I, B) \xrightarrow{p^*} KK_G(A, B) \xrightarrow{i^*} KK_G(I, B)$$

Dans le cas où la première suite est exacte, les propriétés du produit de Kasparov et l'existence des éléments α et β précédents entrainent l'exactitude de la deuxième. On a le même résultat pour les suites :

$$KK_G(B^{'}, I) \xrightarrow{i_*} KK_G(B^{'}, A) \xrightarrow{p_*} KK_G(B^{'}, A/I)$$

$$KK_G(B, I) \xrightarrow{i_*} KK_G(B, A) \xrightarrow{p_*} KK_G(B, A/I)$$

Proposition 3.1. *Soient (X, G) un groupe de transformation moyennable, B une G-$C(X)$-algèbre séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. Alors B est KK_G-sous-équivalente à $B^{'} := B\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H))$.*

Démonstration. Dans [30], Tu a effectué la construction 'dual Dirac- Dirac' en exhibant des éléments $\alpha_X \in \mathcal{R}KK_G(X; C(X), \mathcal{A}_X(H))$ et $\beta_X \in \mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H), C(X))$ qui correspondent à la construction en E-théorie de [12], de plus il a montré que le produit de Kasparov $\alpha_X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H)}\beta_X$ est égal à $1_{C(X)}$ dans $\mathcal{R}KK_G(X; C(X), C(X))$. En appliquant l'homomorphisme naturel de groupes $\sigma_{X,B}$ donné dans [19, Lemme 2.19] et rappelé dans la Définition 1.9, on trouve donc deux éléments $\sigma_{X,B}(\alpha_X)$ dans le groupe $\mathcal{R}KK_G(X; B, \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B)$ et $\sigma_{X,B}(\beta_X)$ dans le groupe $\mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B, B)$. Posons : $B^{'} := \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B$,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &:= \sigma_{X,B}(\alpha_X)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B}\sigma_{X,B}(\beta_X) \\
&= \sigma_{X,B}(\alpha_X\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H)}\beta_X) \\
&= \sigma_{X,B}(1_{C(X)}) \\
&= 1_B \in \mathcal{R}KK_G(X; B, B)
\end{aligned}$$

et $\gamma_2 := \sigma_{X,B}(\beta_X)\widehat{\otimes}_B\sigma_{X,B}(\alpha_X) \in \mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B, \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}B)$. Nous oublions l'espace X on a donc deux éléments $\gamma_1 \in KK_G(B, B)$ et $\gamma_2 \in KK_G(B^{'}, B^{'})$, puisque $\gamma_1 = 1$, alors grâce a [19, Théorème 2.16] on a les homomorphismes injectifs de groupes suivants :

$$\varphi_A \ : KK_G(A, B) \longrightarrow KK_G(A, B\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H))$$

$$\psi_A \ : KK_G(B, A) \longrightarrow KK_G(B\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H), A),$$

de plus il existe deux sous groupes $R^A_{\alpha,\beta} := KK_G(A, B^{'})\widehat{\otimes}_{B^{'}}(1 - \gamma_2)$ et $L^A_{\alpha,\beta} := (1 - \gamma_2)\widehat{\otimes}_{B^{'}}KK_G(B^{'}, A)$ tel que $\varphi_A(KK_G(A, B)) \oplus R^A_{\alpha,\beta} = KK_G(A, B^{'})$ et $\psi_A(KK_G(B, A)) \oplus L^A_{\alpha,\beta} = KK_G(B^{'}, A)$. □

Théorème 3.1. *Soient (X, G) un groupe de transformation moyennable, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ une suite exacte G-équivariante de G-algèbres telle que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme 1. Alors si B est munie d'une structure de $C(X)$-algèbre les suites*

$$\text{(a')} \qquad KK_G(A/I, B) \xrightarrow{p^*} KK_G(A, B) \xrightarrow{i^*} KK_G(I, B)$$

$$\text{(b')} \qquad KK_G(B, I) \xrightarrow{i_*} KK_G(B, A) \xrightarrow{p_*} KK_G(B, A/I)$$

sont exactes.

Démonstration. Etablissons tout d'abord l'exactitude de (a'). Compte tenu du (cf. Corollaire 3.2) l'algèbre $B' := B\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H)$ est propre. La suite $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$ est exacte et par hypothèse l'application quotient p admet un relèvement complètement positif de norme 1. Les hypothèses de la Proposition 2.2 et la Proposition 2.3 étant satisfaites, on déduit les suites exactes suivantes :

(i) $KK_G(A/I, B') \xrightarrow{p^*} KK_G(A, B') \xrightarrow{i^*} KK_G(I, B')$,

(ii) $KK_G(B', I) \xrightarrow{i_*} KK_G(B', A) \xrightarrow{p_*} KK_G(B', A/I)$.

La flèche d'ampliation par l'algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ en K-théorie φ_A est scindé de sorte qu'il existe un sous groupe $R^A_{\alpha,\beta}$ tel que

$$\begin{aligned} KK_G(A, B') &= \varphi_A(KK_G(A, B)) \oplus R^A_{\alpha,\beta} \\ &= KK_G(A, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2 \oplus R^A_{\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

Le fait que $\gamma_1 = 1_B$, γ_2 est un idempotent et on a : pour tout $x \in KK_G(A/I, B')$; $p^*(x)\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2 = p^*(x\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2)$, en utilisant la suite exacte (**i**) on voit que la suite

$$KK_G(A/I, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2 \xrightarrow{p^*} KK_G(A, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2 \xrightarrow{i^*} KK_G(I, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2,$$

est exacte. D'autre part les "γ-partes" $KK_G(A, B)\widehat{\otimes}_B\gamma_1$ et $KK_G(A, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2$ sont isomorphe. Donc $KK_G(A, B) \simeq KK_G(A, B')\widehat{\otimes}_{B'}\gamma_2$ car $\gamma_1 = 1_B$. D' où l'exactitude de (a').
De même, en appliquant La flèche d'ampliation par l'algèbre $\mathcal{A}_X(H)$ en K-théorie ψ_A et en utilisant la suite exacte (**ii**) en résult l'exactitude (b'). □

Corollaire 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, Alors si B est munie d'une structure de $C(X)$-algèbre on a les suites exactes hexagonales suivantes :*

$$\text{(a)} \qquad \begin{array}{ccccc} KK_G(A/I, B) & \xrightarrow{p^*} & KK_G(A, B) & \xrightarrow{i^*} & KK_G(I, B) \\ \uparrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ KK^1_G(I, B) & \xleftarrow{i^*} & KK^1_G(A, B) & \xleftarrow{p^*} & KK^1_G(A/I, B) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(B,I) & \xrightarrow{i_*} & KK_G(B,A) & \xrightarrow{p_*} & KK_G(B,A/I) \\ \uparrow \delta^1 & & & & \downarrow \delta^1 \\ KK^1_G(B,A/I) & \xleftarrow{p_*} & KK^1_G(B,A) & \xleftarrow{i_*} & KK^1_G(B,I) \end{array}$$

Démonstration. De même que le Corollaire 2.1 pour montrer l'exactitude de la suite hexagonales (a) et on se sert de la démonstration du Corollaire 2.2 pour montrer l'exactitude de (b).

□

Chapitre 4

Exemple d'application

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans un cas particulier important, celui des déplacements hyperboliques de la géométrie de Poincaré-Lobatschevsky sur le disque unité, cet exposé, qu'on a essayé d'écrire dans un langage accessible à tous les lecteurs, a pour seule ambition de tenter de leur fournir une introduction à ce sujet, par conséquent les notations de ce chapitre ne seront pas les mêmes que celles vues dans les chapitres précédents.

Soient B^2 le disque unité ouvert du plan complexe, et S^1 sa frontière, i.e. le cercle $|z| = 1$. On note $G = SU(1,1)$ le groupe des isométries linéaires pour la forme quadratique sur $\mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto |z_1|^2 - |z_2|^2$. Alors G agit naturellement sur la fermeture $\overline{B^2}$ de B^2 dans $\mathbb{C}$. Si on considère G comme le groupe des matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \alpha,\ \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$$

cette action de G sur $\overline{B^2}$ est donnée par :

$$g \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}. \tag{4.1}$$

Les transformations ainsi définies sont les déplacements hyperboliques de la géométrie de Poincaré-Lobatschevsky sur le disque unité; elles laissent invariant l'élément de longueur non-Euclidienne sur B^2. Nous allons voir dans la suite que cette action a seulement deux orbites. Soit K le sous-groupe de G des matrices

$$k_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

On remarque que K est un sous-groupe compact maximal de G. Comme K est en fait le stabilisateur de 0 dans G (les éléments de K sont les rotations), on peut identifier B^2 à l'espace Riemannien G/K grâce à l'application

$$gK \mapsto g \cdot 0 = \frac{\beta}{\bar{\alpha}}, \tag{4.2}$$

où g est comme ci-dessus. En effet $|\beta/\bar{\alpha}|^2 = 1 - 1/|\alpha|^2 < 1$ et tout $z = re^{i\theta} \in B^2$ peut s'écrire sous la forme $\beta/\bar{\alpha}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ (on prend α et β de sorte que $|\alpha|^2 = 1/(1-r)$, $|\beta|^2 = r/(1-r)$ et $\operatorname{Arg} \beta = \operatorname{Arg} \alpha = \theta/2$, modulo les rotations). En fait, $G/K \simeq G \cdot 0 = B^2$ est une orbite ouverte de l'action de G sur $\overline{B^2}$.
On note maintenant A le sous-groupe des matrices de la forme

$$a_t = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On se fixe une chambre de Weyl positive A^+ dans A donnée par les a_t pour $t \geq 0$. Soit P le sous-groupe parabolique minimal de G associé. La décomposition de Langlands de P, $P = MAN$, est donnée de la manière suivante. Le sous-groupe M de G est le centralisateur de A dans K. Il est réduit à deux éléments, e et $-e$, avec e désignant l'élément neutre de G. Le sous-groupe N (le radical unipotent de P) est formé des matrices de la forme

$$n_\xi = \begin{pmatrix} 1 + i\xi/2 & -i\xi/2 \\ i\xi/2 & 1 - i\xi/2 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Expliquons avec plus de détails pourquoi P définit bien un sous-groupe de G. Si on note

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

l'automorphisme intérieur

$$j : g \mapsto C^{-1} g C \tag{4.3}$$

de $SL(2, \mathbb{C})$ transforme le groupe G en le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels et de déterminant égal à 1. On a en particulier :

$$j(a_t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad j(n_\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour tout t et ξ dans $\mathbb{R}$.
En utilisant j, on voit que N est un sous groupe distingué du groupe $AN = NA$, car N est abélien, et $a_t n_\xi {a_t}^{-1} = n_{e^t \xi}$. Le sous groupe $P = MAN$ de G est en particulier résoluble et formé des matrices

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$$

telles que $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$, i.e. telles que $g \cdot 1 = 1$ (où $1 \in S$). En fait, P est le stabilisateur de 1 dans G. On peut voir qu'il est possible d'identifier le cercle S^1 avec l'espace homogène $G/P = G/MAN$ grâce à l'application

$$gP \mapsto g \cdot 1 = \frac{\alpha+\beta}{\bar{\alpha}+\bar{\beta}} = e^{2i\mathrm{Arg}\,(\alpha+\beta)}. \tag{4.4}$$

On voit donc que $G/P \simeq G \cdot 1 = S^1$ est une orbite fermée de l'action de G sur $\overline{B^2}$. De ce qui précède, on en déduit que les deux seules orbites dans $\overline{B^2}$ sont $G/K = B^2$ et $G/P = S^1$.

Associées aux sous-groupes de G construits ci-dessus, G admet deux décompositions:

1. La décomposition d'Iwasawa $G = KAN$: tout $g \in G$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $g = k_\theta a_t n_\xi$, où $0 \leq \theta < 4\pi$, t et ξ réels. Cela provient naturellement du fait que G conjugué dans $SL(2,\mathbb{C})$ à $SL(2,\mathbb{R})$ via la transformation j. On a aussi naturellement $G = NAK$.

2. La décomposition de Cartan $G = KA^+K$: tout $g \in G$ peut s'écrire sous la forme $g = k_\theta a_t k_\phi$, où $t \geq 0$, $0 \leq \theta < 4\pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Cette écriture est unique si $g \notin K$. Pour le voir, on pose, comme dans Eq (4.2), $g \cdot 0 = re^{i\theta}$ et on choisit $t \geq 0$ tel que $r = \tanh t/2$. Alors il est clair que $k_\theta a_t \cdot 0 = g \cdot 0$, donc $g \in k_\theta a_t K$.

Dans le reste de ce chapitre, on se sert de la définition d'Anantharaman-Delaroche pour un groupe de transformation topologique *moyennable en norme* L^1 (cf. [1, Proposition 2.2(3)]). Rappelons cette définition.

> On dit que (X, G) est moyennable en norme L^1 s'il existe $(\xi_n)_n \subset C_c(G \times X)$, positives, vérifiant :
> (4.5)
> (i) $x \mapsto \int_G \xi_n^x(t)dt$ converge vers 1 uniformément sur tout compact de X ;
> (ii) $(x,s) \mapsto \int_G |\xi_n^{s\cdot x}(s\cdot t) - \xi_n^x(t)|dt$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $G \times X$.

Soit $\psi \in C_c^+(G)$. On considère la fonction ζ sur G définie par $\zeta(g) = \int_K \psi(kg)dk$. Cette fonction est bien définie car l'intégrale converge compte tenu que K est compact et ψ est continu. De plus, ζ est k-invariante, i.e. $\zeta(gk) = \zeta(g)$ pour tout $k \in K$. Identifions comme précédemment B^2 à G/K (voir Eq (4.2)). On note par h la fonction continue positive à support compact définie sur $B^2 \times G$ par la formule

$$h(z,t) = (\lambda_g\zeta)(t) = \zeta(g^{-1}t) \;\; avec \;\; z = g \cdot 0. \tag{4.6}$$

On construit ainsi une mesure de probabilité, satisfaisant les critères de la moyennabilité topologique en norme de L^1 du groupe de transformation (B^2, G).
D'autre part, grâce à (cf. [2, Théorème 2.2.17]), le groupe de transformation (S^1, G) est isomorphe au sens des groupoïdes à P. Comme les groupes de Lie résolubles sont moyennables (cf. [25]) et que la propriété de moyennabilité topologique est stable par isomorphisme, on en déduit que (S^1, G) est moyennable.

Question : Qu'en est-il de $(\overline{B^2}, G)$?
L'idée est d'utiliser la décomposition de Cartan et la décomposition de d'Iwasawa.

4.1 Moyennabilité topologique du groupe de transformation $(S^1, SU(1,1))$

Classiquement, le noyau de Poisson est la fonction définie sur $B^2 \times S^1$ par :

$$\mathcal{P}(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) := \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)},$$

pour $0 \leq r < 1$ et θ, $\varphi \in \mathbb{R}$.
On définit pour une fonction f sur S^1 convenable (par exemple, mesurable bornée) une fonction F sur B^2, bornée et harmonique, en posant :

$$F(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) f(e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{4.7}$$

Réciproquement, si F est une fonction harmonique, bornée sur B^2,

$$f(e^{i\varphi}) := \lim_{r\to 1, r<1} F(re^{i\varphi})$$

existe pour presque tout $\varphi \in \mathbb{R}$, et définit une fonction de $L^\infty(S^1)$ qui vérifie Eq (4.7).
Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ et tout $g \in G = SU(1,1)$; nous étendons de $B^2 \times S^1$ à $G \times S^1$ la définition du noyau de Poisson (cf. [9]), en posant :

$$\mathcal{P}(g, \gamma) := \mathcal{P}(g.0, \gamma), \quad g \in G,\ \gamma \in S^1.$$

La fonction Φ_μ définie sur G par :

$$\Phi_\mu(g) := \int_{S^1} \mathcal{P}^\mu(g, \gamma) d\gamma$$

est appelée fonction sphérique d'indice μ. Elle est bi-K-invariante (i.e. $\Phi_\mu(k_1 g k_2) = \Phi_\mu(g)$ pour tout $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$) et telle que $\Phi_\mu(e) = 1$ (cf. [21]). D'après la décomposition de Cartan $G = KA^+K$ de G, la fonction ainsi définie est donc définie par sa restriction au sous-groupe A de G. Si $\mu = 1/2$, pour $g \in G$ fixé, la fonction $\gamma \mapsto \mathcal{P}^{1/2}(g, \gamma)$ est de norme 1 dans $L^2(S^1)$ (on applique Eq. (4.7) avec $f = 1$). Comme $\Phi_{1/2}(g)$ est le produit scalaire de cette fonction par la fonction identique 1, elle est donc bornée par 1 (cf. [9]). Compte tenu de l'inégalité de Jensen, on a donc, pour tout $g \in G$:

$$\Phi_{1/2n}(g) \leq (\Phi_{1/2}(g))^{1/n} \leq 1. \tag{4.8}$$

Le noyau de Poisson est lié au groupe $G = SU(1,1)$. Considérons la mesure de Lebesgue $d\varphi/2\pi$ sur le cercle S^1. C'est l'unique mesure de probabilité sur S^1 qui soit invariante par l'action du groupe K. Posons nous alors une question bien naturelle. Comment se transforme cette mesure quand on fait opérer sur S^1 un élément g de G.
Dans (cf. [9, Théorème 1]) Eymard montre que, pour tout $f \in L^1(S^1)$ et tout $g \in G$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g.e^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\mathcal{P}(re^{i\theta}, e^{i\varphi})d\varphi,$$

avec $re^{i\theta} = g.0$. De plus, si b est une application continue de $G \times S^1$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $g_1, g_2 \in G$, $k \in K$, , $\gamma \in S^1$, on ait :

$$\begin{aligned} &b(k,\gamma) = 1, \\ &b(g_1g_2, \gamma) = b(g_2, g_1^{-1}.\gamma)b(g_1, \gamma). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Alors il existe un nombre complexe μ tel que $b = \mathcal{P}^\mu$ (cf. [9, Théorème 2]).

L'intégrale $\int_G \mathcal{P}^{1/2n}(g, \gamma)dg$ peut diverger car G n'est pas compact. Pour avoir une moyenne de ce type on reprend la construction de Pedersen (cf. [24, Proposition 7.3.7]) :

> Soit $S(P) := \{f \in L^1(P) |\, f \geq 0,\ \|f\|_1 = 1\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> $$\begin{aligned} &(1)\ P \text{ est moyennable} \\ &(2)\ \text{pour tout compact } C \text{ de } P,\ \varepsilon > 0, \text{ il existe } f \text{ dans } S(P) \\ &\quad\ \text{tel que } \|\lambda_s f - f\|_1 \leq \varepsilon,\ \ s \in C. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Le but est d'établir la moyennabilité topologique en norme L^1 (définition Eq (4.5)). Comme $C_c(P)$ est dense dans $L^1(P)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $\mu_n \in C_c^+(P)$ satisfaisant Eq. (4.10.(2)). Grâce a l'unicité de la décomposition d'Iwasawa $G = KP = KAN$ on peut définir, $\tilde{\mu}_n$, le prolongé de μ_n sur le groupe G tel que

$$\tilde{\mu}_n(g) = \tilde{\mu}_n(kp) = \mu_n(p), \tag{4.11}$$

avec $g = kp$, $k \in K$, $p \in P$. Nous avons donc une suite de fonctions continues positives à support compact sur le groupe G.

On se fixe une mesure de Haar dp (resp. $dk = d\gamma/2\pi$) sur P (resp. K). On normalise la mesure de Haar, μ_G, sur G de sorte que :

$$\int_G f(g)d\mu_G(g)(= \int_G f(g)dg) = \int_P \int_K f(kp)dk\,dp$$

(cf. e.g. [31, §2.4.1]).
Posons $c_n(\gamma) := \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)dg$. nous avons l'inégalité suivante :

$$0 < c_n(\gamma) \leq 1 \quad \forall \gamma \in S^1. \tag{4.12}$$

En effet, d'après Eqs. (4.11) et (4.9),

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)dg \\ & = & c_n(\gamma) \quad \text{(par définition de } c_n(\gamma)) \\ & = & \int_P \int_K \tilde{\mu}_n(kp)\mathcal{P}^{1/2n}(kp,\gamma)dk\,dp \\ & = & \int_P \mu_n(p) \int_K \mathcal{P}^{1/2n}(kp,\gamma)dk\,dp \\ & = & \int_P \mu_n(p) \int_K \mathcal{P}^{1/2n}(p,k^{-1}\gamma)dk\,dp \end{array}$$

Nous appliquons Eq. (4.4), la mesure dk est invariante par les éléments de K, le fait que $\mu_n \in S(P)$ et Eq. (4.8), nous avons l'expression :

$$\begin{array}{rl} = & \int_P \mu_n(p) \int_{S^1} \mathcal{P}^{1/2n}(p,\gamma)d\gamma\,dp \\ = & \int_P \mu_n(p)\Phi_{1/2n}(p)dp \\ \leq & \sup_{p\in P} \Phi_{1/2n}(p) \\ \leq & 1. \end{array}$$

On considère l'application f_n de $G \times S^1$ a valeur dans $\mathbb{R}^+$, définie pour tout $(g,\gamma) \in G \times S^1$ par la formule :

$$f_n(g,\gamma) = \frac{1}{c_n(\gamma)}\tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma). \tag{4.13}$$

On obtient une suite de fonctions continues, positives et à support compact. Nous montrons dans la suite que la famille (f_n) satisfaisant les conditions de moyennabilité topologique en norme L^1 définition Eq (4.5). Par construction, la condition (i) est validée. Vérifions la condition (ii). Pour tout s dans un compact C de G et tout γ dans un compact du cercle S^1, on pose :

$$A_n := \sup_{(s,\gamma)} \frac{1}{c_n(\gamma)} \int_G |\tilde{\mu}_n(sg)\mathcal{P}^{1/2n}(sg,s\gamma) - \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)|dg.$$

Grâce à Eq. (4.9), on peut remplacer dans l'expression ci-dessus $\mathcal{P}(sg,s\gamma)$ par $\mathcal{P}(s,s\gamma)\mathcal{P}(g,\gamma)$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} A_n & \leq & \sup_{(s,\gamma)} \frac{\mathcal{P}^{1/2n}(s,s\gamma)}{c_n(\gamma)} \int_G |\tilde{\mu}_n(sg) - \tilde{\mu}_n(g)|\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)dg \\ & & + \sup_{(s,\gamma)} \frac{|1-\mathcal{P}^{1/2n}(s,s\gamma)|}{c_n(\gamma)} \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)dg. \end{array}$$

Le noyau de Poisson est continu, $\mathcal{P}(s, s\gamma) \neq 0$ pour tout (s, γ) dans un compact de $G \times S^1$ et $\frac{1}{c_n(\gamma)} \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g, \gamma)dg = 1$. Alors le deuxième terme de l'inégalité ci-dessus, tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En posant

$$\begin{array}{rcl} A_n^{'} & := & \sup_{(s,\gamma)} \int_G |\tilde{\mu}_n(sg) - \tilde{\mu}_n(g)|\mathcal{P}^{1/2n}(g, \gamma)dg \\ & = & \sup_{(s,\gamma)} \int_P \int_K |\tilde{\mu}_n(skp) - \tilde{\mu}_n(kp)|\mathcal{P}^{1/2n}(kp, \gamma)dkdp, \end{array}$$

grâce à la décomposition d'Iwasawa l' élément sk peut s'écrire sous la forme $k^{'}p^{'}$, comme le sous groupe K est compact, en peut supposer alors que $p^{'}$ est dans un compact du sous groupe topologique P. Donc :

$$\begin{array}{rcl} A_n^{'} & = & \sup_{(p^{'},\gamma)} \int_P \int_K |\tilde{\mu}_n(k^{'}p^{'}p) - \tilde{\mu}_n(kp)|\mathcal{P}^{1/2n}(kp, \gamma)dkdp \\ & = & \sup_{(p^{'},\gamma)} \int_P |\mu_n(p^{'}p) - \mu_n(p)| \int_K \mathcal{P}^{1/2n}(kp, \gamma)dkdp \quad \text{(appliquer } Eq.\ (4.9)\ et\ Eq.\ (4.11)) \\ & = & \sup_{p^{'}} \int_P |\mu_n(p^{'}p) - \mu_n(p)|\Phi_{1/2n}(p)dp \quad \text{(par définition de } \Phi_{1/2n}) \\ & \leq & \sup_p \Phi_{1/2n}(p) \times \sup_{p^{'}} \int_P |\mu_n(p^{'}p) - \mu_n(p)|dp \\ & \leq & \sup_{p^{'}} \int_P |\mu_n(p^{'}p) - \mu_n(p)|dp \quad \text{(appliquer } Eq.\ (4.8)) \end{array}$$

nous appliquons Eq. (4.10) on voit que $\lim_{n\to+\infty} A_n^{'} = 0$, le fait que $\lim_{n\to+\infty} c_n(\gamma) \neq 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$. D'où la moyennabilité topologique de l'action du groupe $SU(1, 1)$ sur le cercle S^1.

4.2 La Moyenne sur le disque hyperbolique

À l'aide de la décomposition d'Iwasawa du groupe $G = KAN$ on peut calculer le noyau de Poisson (cf. e.g. [9, Proposition 1]). Rappelons cette proposition : pour tout $g \in G$ et tout θ réel, on a $\mathcal{P}(g, k_\theta) = e^{-t(g^{-1}k_\theta)}$; où $t(g)$ le nombre réel t qui apparaît dans la décomposition d'Iwasawa $g = ka_tn$ de g.
Soit a_t un élément dans le sous groupe des paramètre A^+, grâce à l'automorphisme intérieur j de groupe $SL(2, \mathbb{C})$ (voir Eq (4.3)), nous calculons le nombre $\rho(t, \theta)$ qui apparaît dans la décomposition d'Iwasawa $a_t^{-1}k_\theta = k^{'}a_{\rho(t,\theta)}n^{'} \in KAN = G$, nous avons :

$$\rho(t, \theta) := t(a_t^{-1}k_\theta) = Log(\sin^2(\theta/2)e^t + \cos^2(\theta/2)e^{-t})$$

Ainsi

$$w_n(t, \theta) := \mathcal{P}^{1/2n}(a_t, k_\theta) = e^{-\rho(t,\theta)/2n};$$

il suffit de résoudre le produit matriciel $k_\theta a_t n_\xi = n_{\xi^{'}} a_{t^{'}} k_{\theta^{'}}$ avec $\xi^{'} = 0$. Regardons le nombre t comme un paramètre dans un compact de $\mathbb{R}^+$. Comme le noyau de Poisson $w_n(t, .)$ est intégrable sur $[0, 4\pi]$, alors il existe $\delta_n > 0$ (nombre de Lebesgue) tel que pour tout compact $[\alpha, \alpha + \delta_n]$ de $[0, 4\pi]$ on a :

$$\int_\alpha^{\alpha+\delta_n} w_n(t, \theta)d\theta \leq 1/n. \tag{4.14}$$

Soit z un point dans $\overline{B^2}\backslash\{0\}$, on note par γ_z *la projection radiale* du point z sur le cercle S^1, i.e γ_z est le point d'intersection de S^1, la demi-droite partant de 0 et passant par z. Identifions comme précédemment (voir Eq. (4.4)) S^1 à l'espace homogène $G/P = K$, dans ce cas on note $s\gamma_z$ par $k^" \cdot 1$, de plus il existe $k_{\theta'} \in K$ tel que $\gamma_{sz} = k_{\theta'} s \cdot \gamma_z = k_{\theta'} k^" \cdot 1$ ($k^"$ et $\theta^{'}$ ne dépend que du couple (s, z)). Remarquons qu'un point z de la boule ouverte B^2 ni qu'une translation du centre $o \in B^2$ sur le rayon $(0, 1)$ par un élément a_{t_z} de A^+, puis une rotation de $a_{t_z} \cdot 0$ par un élément k_{θ_z} de K. On note par d la distance métrique du plan complexe $\mathbb{C}$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa on peut écrire sk_{θ_z} sous la forme $sk_{\theta_z} = k^{'} p^{'}$ avec $p^{'}$ dans un compact de G, que en le note encore par C, alors

$$d(\gamma_{sz}, s\gamma_z) \leq 2d(sz, s\gamma_z) = 2d(p^{'} a_{t_z} \cdot 0, p^{'} \cdot 1).$$

L'action Eq. (4.1) de groupe $G = SU(1, 1)$ sur la boule fermée $\overline{B^2}$ est continue, on note par $V_{p^{'}}$ le voisinage de $p^{'}$ dans P, sur lequel on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{\varepsilon, p^{'}} > 0 / \forall s \in V_{p^{'}}, \forall z \in [0, 1], \, d(z, 1) \leq \eta_{\varepsilon, p^{'}} \Longrightarrow d(sz, s \cdot 1) \leq \varepsilon/2.$$

Fixons $\varepsilon = l(\delta_n)/2$ la longueur du segment $[\gamma_1, \gamma_2]$ qui détermine le petit angle δ_n, dont les extrémités γ_1 et γ_2 sont sur le cercle S^1. Comme C est un sous-ensemble compact du groupe G on peut extraire un recouvrement fini V_{g_m} de C. De plus il existe $\eta(n) = \min_m(\eta_{l(\delta_n), g_m})$ tel que pour tout $z \in \overline{B^2}$ avec $d(z, \gamma_z) < \eta(n)$ et pour tout $s \in C$, on a $d(sz, s\gamma_z) \leq l(\delta_n)/2$.

Enfin, on se fixe une petit couronne $Z_{\delta_n} := \overline{B^2} \setminus \bar{B}(0, 1 - \eta(n))$ tel que pour tout z dans Z_{δ_n} et tout s dans un compact C de G on a :

$$-\delta_n \leq \theta^{'} \leq \delta_n. \tag{4.15}$$

Evaluation parapport a la projection radiale :
Il s'agit, d'une évaluation de l'intégrale

$$B_n := \sup_{s \in C \, , \, z \in Z_{\delta_n}} \int_G |f_n(sg, \gamma_{sz}) - f_n(sg, s\gamma_z)| dg. \tag{4.16}$$

où C est un compact de G, f_n la famille des fonctions Eq. (4.13) satisfaitant le critère de la moyennabilité topologique de $(SU(1, 1), S^1)$ et γ_z la projection radiale du point z sur le cercle S^1. Nous montrons dans la suite que $\lim_{n \to +\infty} B_n = 0$.
Le sous groupe A agit continûment par automorphisme sur le sous groupe N, de plus il existe un homomorphisme continu $\alpha : A \to \mathbb{R}^+$, alors $\Delta(p) = \Delta(an) = \alpha(a)$ où Δ la fonction modulaire associée à la mesure de Haar μ_P définie sur le sous groupe $P = AN$ (cf. [21]). Alors

$$\begin{aligned} B_n &= \sup_{s \in C \, , \, z \in Z_{\delta_n}} \Delta(s) \int_G |f_n(g, \gamma_{sz}) - f_n(g, s\gamma_z)| dg \\ &= \sup_{(s,z)} \frac{\Delta(s)}{c_n(\gamma_z)} \int_G |\tilde{\mu}_n(g) \mathcal{P}^{1/2n}(g, \gamma_{sz}) - \tilde{\mu}_n(g) \mathcal{P}^{1/2n}(g, s\gamma_z)| dg. \end{aligned}$$

Comme s est dans le compact C de G, et $\lim_{n\to+\infty} c_n(\gamma_z) \neq 0$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} B_n^{'} = 0$; où

$$\begin{array}{rcl} B_n^{'} & := & \sup_{s\in C\ ,\ z\in Z_{\delta_n}} \int_G \tilde{\mu}_n(g)|\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma_{sz}) - \mathcal{P}^{1/2n}(g, s\gamma_z)|dg \\ & = & \sup_{(s,z)} \int_P \int_K \tilde{\mu}_n(k_\theta p)|\mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p,\gamma_{sz}) - \mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p, s\gamma_z)|dk_\theta dp \\ & = & \sup_{(s,z)} \int_P \mu_n(p) \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p,\gamma_{sz}) - \mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p, s\gamma_z)|dk_\theta dp \quad \text{(appliquer } Eq. \text{ (4.11))} \end{array}$$

Remplaçons comme précédemment $s\gamma_z$ par $k^".1$ et γ_{sz} par $k_{\theta'}k^".1$ (voir la Démonstration du Eq. (4.15)), nous avons l'expression :

$$\begin{array}{rcl} B_n^{'} & = & \sup_{(s,\theta')} \int_P \mu_n(p) \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p, k_{\theta'}k^".1) - \mathcal{P}^{1/2n}(k_\theta p, k^".1)|dk_\theta dp \\ & = & \sup_{(s,\theta')} \int_P \mu_n(p) \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(k_{\theta'}^{-1}p, k_\theta^{-1}k^") - \mathcal{P}^{1/2n}(p, k_\theta^{-1}k^")|dk_\theta dp \quad \text{(appliquer } Eq. \text{ (4.9))} \\ & = & \sup_{\theta'} \int_P \mu_n(p) \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(k_{\theta'}^{-1}p, k_\theta) - \mathcal{P}^{1/2n}(p, k_\theta)|dk_\theta dp \\ & = & \sup_{\theta'} \int_P \mu_n(p) \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(p, k_{\theta'}k_\theta) - \mathcal{P}^{1/2n}(p, k_\theta)|dk_\theta dp \quad \text{(appliquer } Eq. \text{ (4.9))} \\ & = & \sup_{\theta'} \int_P \mu_n(p)\tilde{W}_n(p, k_{\theta'})dp; \end{array}$$

où

$$\tilde{W}_n(p, k_{\theta'}) = \int_K |\mathcal{P}^{1/2n}(p, k_{\theta'}k_\theta) - \mathcal{P}^{1/2n}(p, k_\theta)|dk_\theta$$

Le but est de montre que $\lim_{n\to+\infty} B_n^{'} = 0$. Comme $\|\mu_n\|_1 = 1$, il suffit d'évaluer $\tilde{W}_n(p, k_{\theta'}) = \tilde{W}_n(a_t, k_{\theta'})$ dans un compact de A^+; ici t est le nombre réel positif qui apparaît dans la décomposition de Cartan $p = k_1 a_t k_2$ de p.
Le noyau de Poisson $w_n(t,\cdot)$ définie pour tout $\theta \in [0, 4\pi]$ par $w_n(t,\theta) = e^{-\rho(t,\theta)/2n}$ (voir la Démonstration du Eq. (4.14)), elle est continue périodique de période 4π, sa dérivée est

$$\frac{\partial w_n(t,\theta)}{\partial\theta} = \frac{-\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)(e^t - e^{-t})}{2n(\sin^2(\theta/2)e^t + \cos^2(\theta/2)e^{-t})} \times e^{-\rho(t,\theta)/2n}$$

On voit que $w_n(t,.)$ est décroissante quand $\theta/2 \in [0,\pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ et croissante dans le cas $\theta/2 \in [\pi/2,\pi] \cup [3\pi/2, 2\pi]$. D'autre part on a :

$$\tilde{W}_n(p, k_{\theta'}) = \tilde{W}_n(a_t, k_{\theta'}) = \frac{1}{2\pi} W_n(t, \theta^{'});$$

où

$$W_n(t,\theta^{'}) := \int_0^{2\pi} |w_n(t, \theta + \theta^{'}) - w_n(t,\theta)|d\theta$$

Nous utilisons la monotonicité de $w_n(t,.)$, Eq. (4.14) et Eq. (4.15), nous avons

$$\int_{\delta_n}^{\pi-\delta_n} |w_n(t,\theta+\theta^{'}) - w_n(t,\theta)|d\theta \leq 1/n,$$

on a aussi $\int_0^{\delta_n} |w_n(t,\theta+\theta^{'}) - w_n(t,\theta)|d\theta \leq 1/n$. De même pour les autres termes de $W_n(t,\theta^{'})$. Ces majorations conduisent alors immédiatement à la majoration suivante:

$W_n(t,\theta') \leq 6/n$; Ainsi, pour tout p dans $\operatorname{supp}\mu_n$ et $\theta' \in [-\delta_n, \delta_n]$ on a $\tilde{W}_n(p, k_{\theta'}) \leq 6/\pi n$, d'où $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$.

Famille de Raccordement:

C'est une famille de fonctions noté $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ radiales i.e ne dépend que de r et non de θ, continues positives sur la boule fermée $\overline{B^2}$, satisfaisant les conditions :

$$\psi_n(0) = 1, \quad \psi_n(z) = 0 \quad \forall z \in \overline{B^2} \backslash B^2 = S^1 \tag{4.17}$$

(4.18)
$(s,z) \mapsto |\psi_n(sz) - \psi_n(z)|$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $G \times \overline{B^2}$.

Exemple:

Soit $(\eta_n)_{n\in N}$ une suite positive convergente vers 0. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère la fonction ψ_n définie pour tout z dans $\overline{B^2}$ par :

$$\psi_n(z) = e^{-\eta_n \frac{|z|}{(1-|z|)}}$$

il est clair alors que la condition Eq. (4.17) est validée, vérifions la condition Eq. (4.18), la fonction définie par la formule :

$$|\psi_n(sz) - \psi_n(z)| = |e^{-\eta_n \frac{|sz|}{(1-|sz|)}} - e^{-\eta_n \frac{|z|}{(1-|z|)}}|$$

est continue sur tout compact de la forme $C \times \overline{B^2}$ où C un compact de G, donc sa borne supérieur sur $C \times \overline{B^2}$ est atteinte en un point. L'action Eq. (4.1) il a que deux orbites l'intérieur du disque et le cercle frontière (voir la Dém du Eq. (4.2) et Eq. (4.4)), d'où la condition Eq. (4.18). De plus nous avons la propriété :

$$\lim_{n} \sup_{z\in\overline{B}(0,1-\sqrt{\eta_n})} |1 - \psi_n(z)| = 0 \tag{4.19}$$

Moyennabilité topologique de l'action du groupe $SU(1,1)$ sur la boule fermée $\overline{B^2}$.

Tout en gardant la même notation

$$f_n : G \times S^1 \to \mathbb{R}^+$$

$$f_n(g,\gamma) = \frac{1}{c_n(\gamma)} \tilde{\mu}_n(g) \mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma)$$

La suite des fonctions continues positives à support compact, satisfait les critères de la moyennabilité topologique de l'action du groupe G sur le cercle S^1 (voir Eq. (4.13)).

On note par $(h_n)_{n\in N}$ la famille des fonctions continues positives à support compact, satisfait les critères de la moyennabilité topologique de l'action du groupe G sur la boule ouverte B^2. On prolonge par continuité h_n sur la boule fermée $\overline{B^2}$, en posant

$$\tilde{h}_n(g,z) = \begin{cases} h_n(g,z) & \text{si } (g,z) \in G \times B^2 \\ 0 & \text{si } (g,z) \in G \times S^1. \end{cases}$$

Notons que le prolongement par continuité $\tilde{h}_n$ ne vérifie pas la condition (i) de la moyennabilité topologique en norme de L^1 (Définition Eq. (4.5)), pour ce la, nous introduisons la combinaison convexe suivante :

$$M_n(g,z) = (1-\psi_n(z))f_n(g,\gamma_z) + \psi_n(z)\,\tilde{h}_n(g,z)$$

en utilisant Eq. (4.17) on voit que M_n définit bien une fonction sur $G \times \overline{B^2}$, de plus elle est continue positive et à support compact. Par construction la condition (i) est validée. Vérifions la condition (ii), on note

$$D_n := \sup_{s\in C, z\in\overline{B^2}} \int_G |M_n(sg,sz) - M_n(g,z)|dg;$$

où C un compact quelconque de A^+. Dans la suite nous montrons que D_n est converge vers zéro, pour ce la, nous adaptons la méthode suivante :

$$\begin{aligned}
D_n &:= \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} \textstyle\int_G |M_n(sg,sz) - M_n(g,z)|dg \\
&= \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} \textstyle\int_G |(1-\psi_n(sz))f_n(sg,\gamma_{sz}) + \psi_n(sz)\tilde{h}_n(sg,sz) \\
&\quad -(1-\psi_n(z))f_n(g,\gamma_z) - \psi_n(z)\tilde{h}_n(g,z)|dg \\
&= \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} \textstyle\int_G |f_n(sg,\gamma_{sz}) - f_n(sg,s\gamma_z) + f_n(sg,s\gamma_z) \\
&\quad -f_n(g,\gamma_z) - \psi_n(sz)f_n(sg,\gamma_{sz}) + \psi_n(z)f_n(sg,\gamma_{sz}) \\
&\quad -\psi_n(z)f_n(sg,\gamma_{sz}) + \psi_n(z)f_n(sg,s\gamma_z) \\
&\quad -\psi_n(z)f_n(sg,s\gamma_z) + \psi_n(z)f_n(g,\gamma_z) \\
&\quad +\psi_n(sz)\tilde{h}_n(sg,sz) - \psi_n(z)\tilde{h}_n(sg,sz) \\
&\quad +\psi_n(z)\tilde{h}_n(sg,sz) - \psi_n(z)\tilde{h}_n(g,z)|dg \\
&\leq \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} |1-\psi_n(z)| \textstyle\int_G |f_n(sg,\gamma_{sz}) - f_n(sg,s\gamma_z)|dg \\
&\quad + \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} |1-\psi_n(z)| \textstyle\int_G |f_n(sg,s\gamma_z) - f_n(g,\gamma_z)|dg \\
&\quad + \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} |\psi_n(sz)-\psi_n(z)| \textstyle\int_G |f_n(sg,\gamma_{sz}) - \tilde{h}_n(sg,sz)|dg \\
&\quad + \sup_{s\in C,z\in\overline{B^2}} \psi_n(z) \textstyle\int_G |\tilde{h}_n(sg,sz) - \tilde{h}_n(g,z)|dg
\end{aligned}$$

on choisit $\tilde{h}_n = h$ (voir Eq. (4.6)), il est clair alors que le quatrième terme de cette expression est nul.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction $(1-\psi_n)$ définie sur la boule fermée $\overline{B^2}$ est bornée par 1. L'action du groupe $SU(1,1)$ sur le cercle S^1 est moyennable Eq. (4.13). Donc le deuxième terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
L'intégrale $\int_G |f_n(sg,s\gamma_z) - \tilde{h}_n(sg,sz)|dg$ borné par 2 (il suffit d'appliquer (i) de la

définition Eq. (4.5) de la moyennabilité topologique en norme de L^1), de plus si on applique Eq. (4.18) on voit que le troisième terme tend vers zéro. Dans la suite nous vérifions que le premier terme est nul aussi, en effet: le noyau de Poisson $w_n(t,.)$ converge simplement vers 1, donc le nombre de Lebesgue δ_n (voir Dém (Eq. (4.14))) est une suite réelle convergeante vers 0, ainsi $\eta(n)$ (voir Dém Eq. (4.15)) est converge vers zéro. On se fixe $\eta_n := (\eta(n))^2$, dans ce cas on décompose la boule fermée $\overline{B^2}$ sous la forme $\overline{B^2} = \overline{B}(0, 1-\eta(n)) \cup Z_{\delta_n}$, si $z \in \overline{B}(0, 1-\eta(n))$ nous appliquons la propriété Eq. (4.19) on voit que le premier terme est nul, dans le cas où $z \in Z_{\delta_n}$ le premier terme est nul compte tenu de Eq. (4.16). On ne déduit la convergence uniforme sur tout compact de $\overline{B^2} \times G$.

Commentaire :

> La Moyenne M_n sur le disque hyperbolique est une combinaison convexe des moyennes à l'intérieur et au bord :
> (4.20)
> $$M_n(g,z) = (1 - e^{-(\eta(n))^2 \frac{|z|}{(1-|z|)}})\,\frac{1}{c_n(\gamma_z)}\tilde{\mu}_n(g)\,\mathcal{P}^{1/2n}(g\cdot 0, \gamma_z) + e^{-(\eta(n))^2 \frac{|z|}{(1-|z|)}}\,\tilde{h}(g,z).$$

Où: $\eta(n)$ la suite réelle convergente vers 0 voir Eq. (4.15), $\mathcal{P}^{1/2n}$ le noyau de Poisson, γ_z la projection radiale du point z sur le cercle S^1, $\tilde{\mu}_n$ le prolongé de μ_n la fonction qui vérifier la moyennabilité du stabilisateur des points du cercle voir Eq. (4.11), $c_n(\gamma_z) := \int_G \tilde{\mu}_n(g)\mathcal{P}^{1/2n}(g,\gamma_z)dg$ et $\tilde{h}$ le prolongé sur la boule fermée $\overline{B^2}$ d'une fonction satisfaisant les critères de la moyennabilité topologique du groupe de transformation (B^2, G) voir Eq. (4.6).

Enfin, grâce à Eq. (4.20) les hypothèse du Théorème 3.1 sont satisfaites, on retrouve ainsi le résultat de Julg et Kasparov [15, Lemme 1.4]; la suite

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(C(S^1),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_G(C(\overline{B^2}),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_G(C_0(B^2),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1_G(C_0(B^2),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1_G(C(\overline{B^2}),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1_G(C(S^1),\mathbb{C}). \end{array}$$

est exacte.

Bibliographie

[1] C. Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4153–4178 (electronic). MR 2004e:46082

[2] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoïds*, Groupoïds in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999), Contemp. Math., vol. 282, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 35–46. MR 2002g:46110

[3] S. Baaj and G. Skandalis, *C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante*, K-Theory **2** (1989), no. 6, 683–721. MR 90j:46061

[4] M. E. Bekka, P. A. Cherix and A. Valette, *Proper affine isometric actions of amenable groups*, Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, Vol. **2**, London Math . Soc. Lecture Notes Ser. 227, Cambridge Univ. Press, 1993, pp. 1–4.

[5] E. Blanchard, *Déformations de C^*-algèbres de Hopf*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), no. 1, 141–215. MR 97f:46092

[6] A. Connes, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of* $\mathbf{R}$, Adv. in Math. **39** (1981), no. 1, 31–55. MR 82j:46084

[7] J. Cuntz and G. Skandalis, *Mapping cones and exact sequences in KK-theory*, J. Operator Theory **15** (1986), no. 1, 163–180. MR 88b:46099

[8] J. Dixmier, *C^*-algèbres et leurs représentations. (French) [C^*-algebras and their representations]*, Reprint of the second (1969) edition. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics] ditions Jacques Gabay, Paris, 1996. 403 pp MR 98a:46066

[9] P. Eymard, *Le noyau de Poisson et la théorie des groupes.* (French) Symposia Mathematica, Vol. XXII (Convegno sull' Analisi Armonica e Spazi di Funzioni su Gruppi Localmente Compatti, INDAM, Rome, 1976), pp. 107–132, Academic Press, New York, 1977. (Reviewer: Johan F. Aarnes) 22E30 (32M15 43A85)

[10] E. Guentner, N. Higson, and J. Trout, *Equivariant E-theory for C^*-algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 703, viii+86. MR 2001c:46124

[11] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[12] N. Higson and G. G. Kasparov, *Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **3** (1997), 131–142 (electronic). MR 99e:46090

[13] ______, *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 23–74. MR 2002k:19005

[14] N. Higson, G. G. Kasparov and J. Trout, *A Bott periodicity theorem for infinite-dimensional Euclidean space.*, Adv. Math. **135** (1998), no. 1, 1–40.

[15] P. Julg and G.G. Kasparov, *Operator K-theory for the group $SU(n,1)$*, J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 99–152.

[16] G. G. Kasparov and G. Skandalis, *Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 1, 165–206. MR 1 998 480

[17] G. G. Kasparov, *Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), no. 1, 133–150. MR 82b:46074

[18] ______, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), no. 3, 571–636, 719. MR 81m:58075

[19] ______, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), no. 1, 147–201. MR 88j:58123

[20] P.-Y. Le Gall, *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. I*, K-Theory **16** (1999), no. 4, 361–390. MR 2000f:19006

[21] S. Lang, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. (Russian) Translated from the English by V. I. Vasjunin and M. A. Semenov-Tjan-Šanskiĭ. Edited by A. A. Kirillov. Izdat. "Mir", Moscow, 1977. 430 pp. (Reviewer: J. S. Joel) 22E45 (10D15)

[22] M. Maghfoul, *Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov équivariant*, K-Theory **16** (1999), no. 3, 245–276. MR 2000f:46088

[23] M. Nilsen, *C^*-bundles and $C_0(X)$-algebras*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), no. 2, 463–477. MR 98e:46075

[24] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979. MR 81e:46037

[25] J.-P. Pier, *Amenable locally compact groups*. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984. x+418 pp.

[26] J. Renault, *A groupoïd approach to C^*-algebras*. Lecture Notes in Mathematics, 793. Springer, Berlin, 1980. ii+160 pp. ISBN: 3-540-09977-8 (Reviewer: A. K. Seda) 46Lxx (22D25 22D40)

[27] G. Skandalis, *Some remarks on Kasparov theory*, J. Funct. Anal. **56** (1984), no. 3, 337–347. MR 86c:46085

[28] ______, *Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras*, Canad. J. Math. **37** (1985), no. 2, 193–216. MR 86d:46072

[29] G. Skandalis, J.-L. Tu, G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture and groupoïds*, Topology **41** (2002), no. 4, 807–834.

[30] J.-L. Tu, *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables*, *K*-Theory **17** (1999), no. 3, 215–264. MR 2000g:19004

[31] N. R. Wallach, *Real reductive groups*. I, Pure and Applied Mathematics, vol. 132, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

RÉSUMÉ : Soit une suite exacte équivariante de G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, admettant un relèvement complètement positif gradué (non nécessairement équivariant) de norme 1. Nous utilisons la notation (X, G) pour désigner un groupe de transformation topologique moyennable au sens d'Anantharaman-Delaroche et Renault. Nous établissons un homomorphisme injectif scindé concernant le bifoncteur equivariant de Kasparov $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$. Cette inclusion, en K-théorie, permet d'étendre la semi-exactitude du cas des algèbres propres (cette dernière est analogue à celle obtenue par Skandalis dans le cas non-équivariant) à celui des actions moyennables. En particulier, nous nous plaçons dans un cas important, celui des déplacements hyperboliques de la géométrie de Poincaré-Lobatschevsky sur le disque unité.

TITLE :
Half-exactness for Kasparov's equivariant bifunctor in case of an amenable group action

ABSTRACT : Consider an equivariant extension of graded separable G-algebras which admits a completely linear positive, grading preserving cross section (not necessary equivariant) of norm 1. We denote (X, G) an amenable topological transformation group of the sense of Anantharaman-Delaroche and Renault. We establish an injective morphism split concerning the Kasparov equivariant bifunctor $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$. This inclusion in K-theory, allows to extend the half-exactness from the case of the proper algebras (which is analogue to the one obtained by Skandalis in the non-equivariant case) to the case of amenable group action. In particular, we will place ourselves in a significant case, that of hyperbolic displacements of the Poincaré-Lobatschevsky geometry on the unit disc.

DISCIPLINE : **Mathématiques**

MOTS-CLÉS :
Action moyennable
Algèbre propre

Institut de Mathématiques de Luminy - UPR 9016
163 Av. de Luminy - case 907 - 13288 MARSEILLE CEDEX 9 - FRANCE