« Jusqu'à ce jour, les mathématiciens ont en vain tenté de découvrir un ordre dans la suite des nombres premiers, et nous avons des raisons de croire que c'est un mystère que l'esprit ne pénétrera jamais. »
Leonhard Euler

L'hypothèse de Riemann

Le Graal des mathématiciens

Une hypothèse d'apparence anecdotique avancée par Bernhard Riemann il y a cent cinquante ans au sujet d'un problème classique, la répartition des nombres premiers, focalise l'intérêt des plus grands mathématiciens. David Hilbert en avait fait le huitième problème de sa célèbre liste. Au moins une dizaine de médailles Fields l'ont étudié… En 2005, il manque toujours le maillon qui permettra une démonstration plausible.

Gilles Lachaud est directeur de l'Institut de mathématiques de Luminy, à Marseille.

Ce que l'on appelle *« l'hypothèse de Riemann »* porte sur une fonction particulière, la « fonction zêta de Riemann », fonction qui fascine les mathématiciens depuis cent cinquante ans. On a utilisé à ce sujet les métaphores les plus surprenantes : l'opium des mathématiciens, la baleine blanche (de *Moby Dick*)… On a aussi évoqué le *Jardin des délices*, sans doute parce que le triptyque de Jérôme Bosch qui porte ce nom représente un monde idéal entre le paradis (des conjectures) et l'enfer (des démonstrations impossibles…).

L'objet de cette fascination vient de la richesse du sujet. À elle seule, cette fonction est une source de problèmes, qui ont donné lieu au développement de nombreuses théories mathématiques actuelles : on se trouve au carrefour de l'analyse, de l'algèbre et de la théorie des nombres. Comme le dit Albert Lautman, l'intérêt d'un problème mathématique ne réside pas dans le plus ou moins grand degré de curiosité que peuvent présenter des faits mathématiques isolés, mais dans les structures, manifestes ou cachées, qui enveloppent ce problème et dont il témoigne.

DANS LE RÉCENT TRAITÉ D'ANALYSE DE R. GODEMENT, le chapitre sur la fonction zêta de Riemann s'intitule « Le jardin des délices modulaires, ou l'opium des mathématiciens », allusion au triptyque de Jérôme Bosch, le « Jardin des délices », dont nous présentons ici un détail. En arrière-plan, on y trouve des structures qui pourraient évoquer les singularités (pôles ou zéros) d'une fonction mathématique …

Espoirs déçus

L'intérêt pour la question n'a fait que croître depuis 1900, date à laquelle David Hilbert en fit le huitième problème de sa célèbre liste de problèmes présentée au Congrès des mathématiciens de Paris. Une dizaine de médailles Fields ont étudié la question de près ou de loin.

Il faut avouer que les moyens mis en œuvre sont caractérisés par leur férocité technique. Par exemple, André Weil, l'une des plus grandes figures des mathématiques françaises du XX^{e} siècle, a écrit : *« Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration. »* Une histoire scrupuleuse de ce problème devrait rendre compte des fausses nouvelles, des démonstrations réfutées, des espoirs déçus qui se sont succédé. Lors de sa réunion annuelle au Collège de France le 24 mai 2000, le Clay Mathematics Institute a inclus ce problème dans les « problèmes du millénaire ». Comme pour la conjecture de Poincaré (lire l'article d'E. Singer, p. 14) ou le problème « P ou NP » (lire l'article de P. Lescanne et N. Hermann, p. 64), un prix d'un million de dollars est offert à celui qui trouvera la solution.

BERNHARD RIEMANN a proposé en 1859 de relier la distribution des nombres premiers aux racines (ou zéros) d'une fonction qu'il a notée par la lettre grecque zêta.

← VUE TRIDIMENSIONNELLE DE LA FONCTION ZÊTA avec ses zéros, alignés sur la droite critique (à l'extrémité des zones bleues). Au centre à gauche, on voit le pôle où la valeur de la fonction devient infinie.

Mort à l'âge de 40 ans en 1866, ce génie des mathématiques qu'était l'Allemand Bernhard Riemann a baptisé zêta (la lettre grecque ζ) une fonction déjà étudiée avant lui, mais qu'il examine lorsque la variable est un nombre complexe (on reviendra plus tard sur cette notion). Cette fonction se présente comme une série (une somme infinie) de puissances inverses de nombres entiers. C'est la série $\zeta(s) = 1/1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$ (il est traditionnel de noter s la variable dont dépend cette série). L'étude de cette fonction relève *a priori* de l'analyse, qui est la partie des mathématiques qui s'occupe des fonctions, de leurs limites, etc. Au XIV^{e} siècle, Nicolas Oresme, évêque de Lisieux, qui enseignait au ▷

ANDRÉ WEIL, L'UNE DES GRANDES FIGURES DES MATHÉMATIQUES DU XXe SIÈCLE, est parvenu en 1940 à démontrer l'hypothèse de Riemann dans un cadre géométrique particulier. © R. HAGARDORN

« Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration. » *A. Weil*

LE SUISSE LEONHARD EULER a calculé les valeurs de la fonction zêta de Riemann lorsque la variable est un entier pair. © AKG.IMAGES

L'IDENTITÉ D'EULER

La série géométrique formée par les puissances d'un nombre x ≥ 1 est :

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

Si on fait $x = 2^s$, où s > 0, on obtient la somme des puissances inverses de 2 :

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{8^s}+\ldots+\frac{1}{2^{ns}}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}$$

On peut aussi prendre $x = 3^s$ et obtenir la somme des puissances inverses de 3 :

$$1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{27^s}+\ldots+\frac{1}{3^{ns}}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}$$

Si on fait le produit de ces deux expressions, on obtient la somme des puissances de toutes les fractions dont le dénominateur est un nombre produit de 2 et de 3.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\ldots+\frac{1}{(2^a3^b)^s}$$

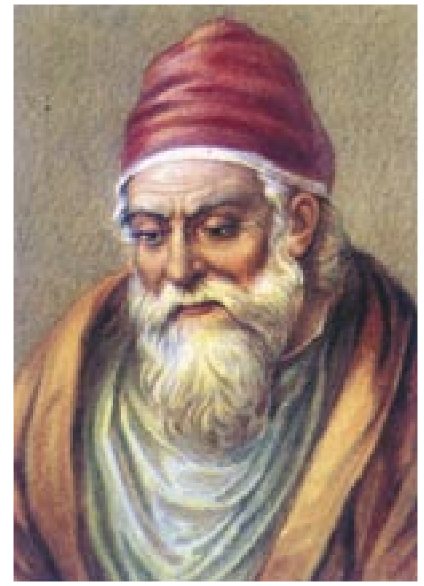
Si l'on prend tous les nombres premiers à gauche, on obtiendra à droite tous les nombres entiers, puisque tout entier est produit de nombres premiers, et c'est l'identité fondamentale d'Euler : ce que l'on appelle maintenant la fonction zêta de Riemann est à la fois un produit infini et la somme des puissances inverses de tous les entiers :

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\times\ldots=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots+\frac{1}{(2^a3^b5^c\ldots)^s}$$

En notation condensée, l'identité d'Euler est :

$$\zeta(s)=\sum_n\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

où la série porte sur les entiers ≥ 1 et où le produit est étendu à l'ensemble des nombres premiers. Autrement dit, la série représentant la somme des puissances inverses des entiers est égale au produit des inverses des différences entre l'unité et la puissance inverse des divers nombres premiers.



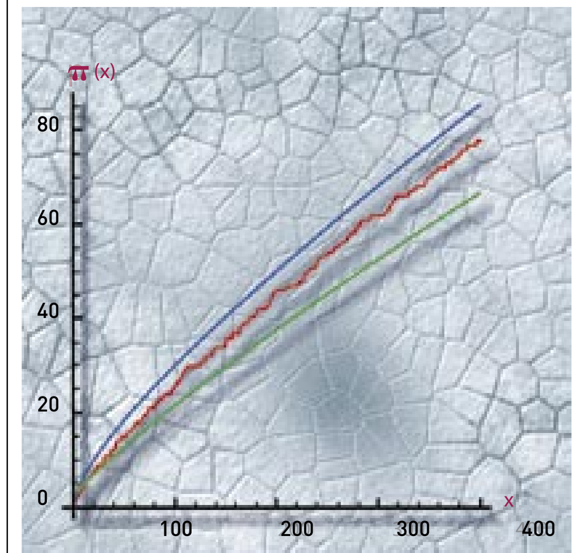
EUCLIDE a souligné le caractère inépuisable de la suite des nombres premiers. © AKG IMAGES

Collège de Navarre à Paris, savait déjà que la série harmonique a une somme infinie : $\zeta(1) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots = \infty$. Il disait : « *Cette grandeur est supérieure à n'importe quelle grandeur que l'on s'est donnée.* » En 1650, Pietro Mengoli, un jeune mathématicien de Bologne, pose la question de la valeur de $\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$ et déclare : « *La réponse réclame un esprit plus riche* [que le mien]. » En 1735, le Suisse Leonhard Euler, titan des mathématiques modernes (ses œuvres comprennent plus de 70 volumes !) répond à la question posée par Mengoli par une découverte spectaculaire.
Il montre que cette valeur est exactement le sixième du carré du nombre irrationnel π, celui-là même qui permet de calculer la surface du cercle (un nombre irrationnel est un nombre qui ne s'exprime pas comme une fraction de nombres entiers). Il ne s'arrête pas là, et calcule les valeurs de la fonction zêta de Riemann quand la variable est un entier pair.
Signalons en passant qu'on sait encore fort peu de chose aujourd'hui sur les valeurs de cette fonction, lorsque la variable est un entier impair. Il fallut attendre plus de deux siècles après Euler pour apprendre en 1979, grâce au Français Roger Apéry, que $\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \ldots$ est aussi un nombre irrationnel. En l'an 2000, un jeune professeur de lycée, Tanguy Rivoal, a démontré que la fonction zêta prend une infinité de valeurs irrationnelles lorsque la variable parcourt les entiers impairs.
Pour comprendre la formulation et l'intérêt de l'hypothèse de Riemann, il faut cependant remonter plus loin dans le temps, jusqu'à Euclide et ses propositions sur les nombres premiers. Un nombre p est premier si on ne peut pas l'écrire sous la forme d'un produit $p = ab$, avec a et b tous les deux différents de p. On s'interroge depuis l'Antiquité grecque sur ces nombres, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. (par convention, le nombre 1 n'est pas considéré comme premier). Mais leur génération semble totalement indépendante de toute construction préalable : le passage de 10 à 11, et celui de 11 à 12, se fait par le même acte, l'addition de l'unité au nombre précédent, et cependant la deuxième opération donne un résultat très différent de la première, puisque 11 est premier et que 12 ne l'est pas. Leur apparition est imprévisible : il y a quatre nombres premiers entre 190 et 200, et aucun entre 200 et 210. Cette distribution énigmatique a inspiré des artistes et fasciné jusqu'à des compositeurs comme Olivier Messiaen ou Iannis Xenakis.

Comme des particules élémentaires

Tout nombre entier est composé de nombres premiers : ceux-ci sont un peu pour les mathématiciens ce que sont les éléments du tableau de Mendeleïev pour les chimistes, ou les particules élémentaires pour les physiciens. Dans les livres arithmétiques des *Éléments* d'Euclide, qui datent de 350 av. J.-C. environ, si on traduit littéralement, ces nombres sont d'ailleurs appelés « *nombres protons* ». En d'autres termes, si on peut engendrer tous les nombres entiers en répétant l'addition du nombre 1, on peut aussi les engendrer avec la loi de multiplication, mais il faut alors disposer de tous les nombres premiers.
On trouve dans ces livres d'Euclide la ▷

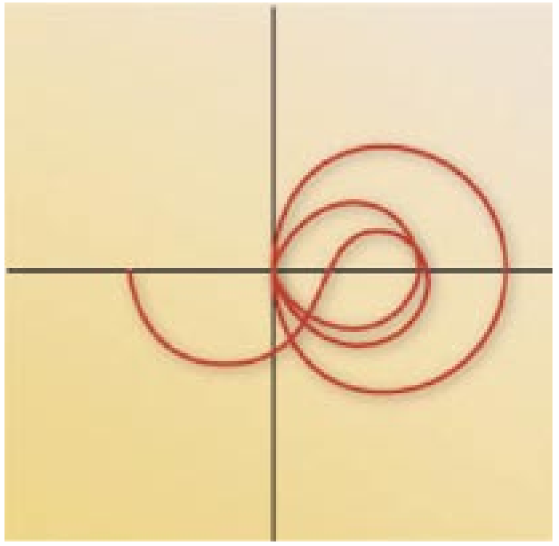
Fig. 1 et 2 **Combien de premiers ≤ x**



x	π (x)	Li (x)
10	4	6
100	25	30
1000	168	178
10000	1229	1246
100000	9592	9630
1000000	78498	78628
10000000	664579	664918
100000000	5761455	5762209
1000000000	50847534	50849235
10000000000	455052511	455055615
100000000000	4118054813	4118066401
1000000000000	37607912018	37607950281

LA FONCTION π(*x*) (en rouge) représente le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre *x* donné. Deux autres fonctions sont du même « ordre de grandeur » : la fonction *x*/log *x* (en vert), et le logarithme intégral Li(*x*) (en bleu). La table nous montre que le logarithme intégral est supérieur à π(*x*), mais il n'en est pas ainsi pour des valeurs extrêmement élevées.

Fig. 3 **Dynamique de la fonction zêta**



ON MONTRE ICI LA TRAJECTOIRE D'UN MOBILE DANS LE PLAN, qui se déplace en suivant au cours du temps les valeurs réelles et complexes de la fonction zêta. Ce mobile passe par l'origine à intervalles irréguliers, en faisant des boucles de plus en plus grandes.

proposition suivante : « *Les nombres premiers sont plus nombreux que toute collection* [finie] *donnée de nombres premiers.* » C'est une manière de dire que la suite des nombres premiers est inépuisable, illimitée, ou encore qu'il y a une infinité de nombres premiers. Remarquons, en passant, que cette proposition contient implicitement une définition particulièrement sobre de l'infini : aucune collection finie ne l'épuise. Définition reprise dans les *Éléments de mathématiques* de N. Bourbaki, inspirée par M. de La Palice : « *On dit qu'un ensemble est infini s'il n'est pas fini.* »
Les propositions d'Euclide sont le premier point nodal de notre histoire. Après quoi, il nous faut sauter vingt-et-un siècles et retrouver l'inépuisable Euler. À son époque l'analyse était en plein essor : il a traduit le problème des nombres premiers dans le langage des fonctions. Puisqu'on ne peut pas prévoir l'apparition des nombres premiers, et qu'il n'y a pas de loi de fabrication, on fait une observation statistique de ce qui se passe en introduisant la fonction traditionnellement notée $\pi(x)$, qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs (ou égaux) à un nombre x donné (la notation $\pi(x)$ n'a rien à voir avec le nombre π). On a, par exemple, $\pi(10) = 4$. Dire qu'il y a une infinité de nombres premiers revient à dire que $\pi(x)$ tend vers l'infini avec x. Euler en établit la démonstration en 1737 par une méthode qui est toute différente de celle d'Euclide. Il montre que la fonction zêta peut s'exprimer non seulement comme une somme infinie, mais comme un produit infini : c'est ce qu'on appelle depuis lors l'identité d'Euler (voir l'encadré : « L'identité d'Euler »). Et il en déduit que la série des inverses des nombres premiers a une somme infinie :
$1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots = \infty$

La proportion de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre donné x tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

Or, si l'ensemble de tous les nombres premiers était fini, cette série aurait une somme finie. Ce faisant, Euler inventait une méthode pour étudier les entiers avec des fonctions, méthode qu'on appelle maintenant la théorie analytique des nombres. La force de cette méthode est qu'elle permet de faire en sorte que le continu rende compte de phénomènes discontinus. Euler déclare aussi que les nombres premiers sont « *infiniment moins nombreux que les entiers* », autrement dit que la proportion de nombres premiers inférieurs à x tend vers 0 quand x croît indéfiniment : $\pi(x)/x \to 0$ quand $x \to \infty$. Autrement dit les nombres premiers se font de plus en plus rares. Peut-on approcher cette fonction de plus près ? La réponse est oui : en 1808, le Français Adrien Legendre montre qu'elle est liée au logarithme naturel* de x. Il observe expérimentalement que la proportion $\pi(x)/x$ est d'environ $1/\log x$, où $\log x$ est le logarithme naturel de x. Il s'ensuit que l'ordre de grandeur de $\pi(x)$ devrait être équivalent à $x/\log x$. Mais on peut faire mieux : l'estimation obtenue ne serre pas de très près le comportement de la fonction $\pi(x)$. À peu près à la même époque, l'Allemand Karl-Friedrich Gauss effectue (dès l'âge de 14 ans !) des observations statistiques et en vient à une idée plus précise : la proportion de nombres premiers dans un intervalle de longueur dx donnée autour du point x est environ $dx/\log x$. Puisque cette proportion de nombres premiers est la dérivée de la fonction $\pi(x)$, cette fonction devrait être de « l'ordre de grandeur » de la primitive de $1/\log x$. Celle-ci ne s'exprime pas en termes de fonctions élémentaires, on l'appelle le logarithme intégral* $\mathrm{Li}(x)$. Gauss en vient à supposer que « l'ordre de grandeur » de $\pi(x)$ est égal à celui de $\mathrm{Li}(x)$. Cette estimation de Gauss n'était pas contradictoire avec celle de Legendre, puisque $x/\log x$ et $\mathrm{Li}(x)$ sont équivalentes. Néanmoins, le point de vue de Gauss semble serrer la réalité de plus près, comme le montrent la figure 1 et la table de la figure 2. Mais pouvait-on sortir du domaine des simples observations et préciser cet « ordre de grandeur » ? La réponse est encore oui. Le Russe Pafnouti Tchebychev établit en 1852 que si x est assez grand, $\pi(x)$ est compris entre $0{,}921\, x/\log x$ et $1{,}105\, x/\log x$

*Le **logarithme naturel** est la primitive de la fonction $1/x$ qui s'annule en $x = 1$.

*Le **logarithme intégral** est la primitive de la fonction $1/\log x$ qui s'annule en $x = 0$.

Pyrotechnie calculatoire

Et nous en arrivons au troisième point nodal : l'énoncé de l'hypothèse de Riemann. En 1859, Bernhard Riemann rédige pour son admission comme correspondant à l'Académie de Berlin un mémoire de huit pages intitulé : « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée ». Dans ce mémoire, qui sera la seule contribution à la théorie des nombres qu'il fera de son vivant, il se livre à un hallucinant exercice de pyrotechnie calculatoire et conceptuelle. Il considère les valeurs de la fonction qu'il nomme $\zeta(s)$ lorsque la variable s est un nombre complexe arbitraire (voir l'encadré ci-dessus).
Rappelons qu'un nombre complexe est un nombre $s = \sigma + it$ comprenant une partie réelle σ (nombre représentable par une suite de chiffres décimaux) et une partie it dite imaginaire (nombre réel multiplié par la racine carrée de -1, notée par la lettre i, de telle sorte que $i^2 = -1$). Il s'intéresse ensuite aux racines ou zéros de cette fonction, c'est-à-dire aux nombres complexes s pour lesquels la fonction zêta s'annule ($\zeta(s) = 0$). Celle-ci s'annule aussi quand s est un entier négatif pair ($s = -2, -4$, etc.). On appelle ces points d'annulation de la fonction les zéros triviaux (les mathématiciens qualifient ainsi ce qui est banal et connu de tout le monde). Quand s est un nombre complexe, on dit que les points où la fonction s'annule sont les zéros non triviaux. Si l'on parle de points, c'est par référence à la représentation graphique d'un nombre complexe : on place sa partie réelle sur un axe horizontal, et sa partie imaginaire sur un axe vertical. Riemann constate que les zéros non triviaux de la fonction zêta sont nécessairement situés, sur ce graphe, dans une bande très étroite, la bande critique [fig. 4]. Il calcule ensuite le nombre approximatif de zéros non triviaux de la fonction de partie imaginaire comprise entre 0 et un nombre T donné, et il poursuit : « *On trouve en effet, entre ces limites, un nombre environ égal à celui-ci, de racines de partie réelle 1/2, et il est très probable que toutes les racines sont de partie réelle 1/2.* »

PROLONGEMENT ANALYTIQUE ET ÉQUATION FONCTIONNELLE

Lorsqu'on veut étudier une fonction définie par une série dépendant d'un paramètre en dehors du domaine de convergence, il faut effectuer un prolongement analytique de cette fonction. Par exemple, la série géométrique

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \ldots$$

converge si le module $|z|$ du nombre complexe z est < 1, la fonction *f(z)* de la variable complexe *z* égale à la somme de cette série est définie lorsque $|z| < 1$, et si tel est le cas, on a

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

Mais la fraction de droite est définie dans tout le plan complexe (sauf évidemment au point $z = 1$), et lorsque $|z| \geq 1$ et $z \neq 1$, on prend comme définition de *f(z)* la fraction de droite ; on dit qu'on a effectué le prolongement analytique de *f(z)* au plan complexe, et que le plan $z = 1$ est un pôle de *f*. On peut faire la même chose pour la fonction $\zeta(s)$; Riemann montre qu'elle admet un prolongement analytique au plan complexe, sauf au point $s = 1$ où elle a un pôle ; il établit aussi son équation fonctionnelle, qui utilise la fonction Γ d'Euler et s'écrit de la manière suivante : l'expression

$$\varphi(s) = s(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

ne change pas quand on remplace s par 1 – s :

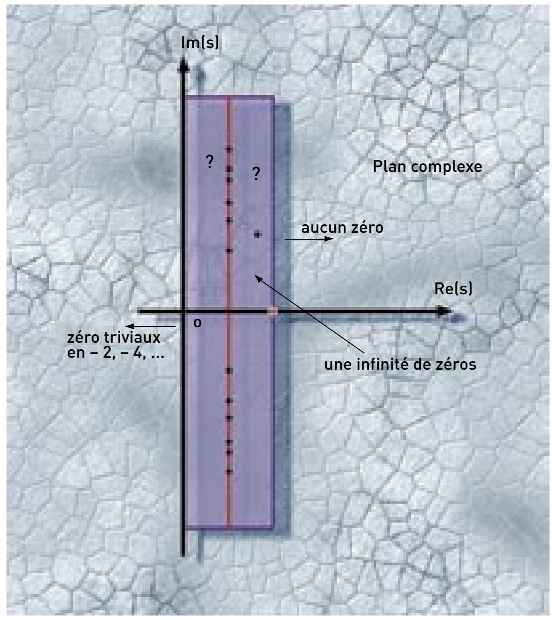
$$\varphi(1-s) = \varphi(s).$$

Euler avait déjà « deviné » cette équation, en opérant sur la fonction $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ de l'encadré 1 dans un texte intitulé « Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances, tant directes que réciproques ».

Droite critique

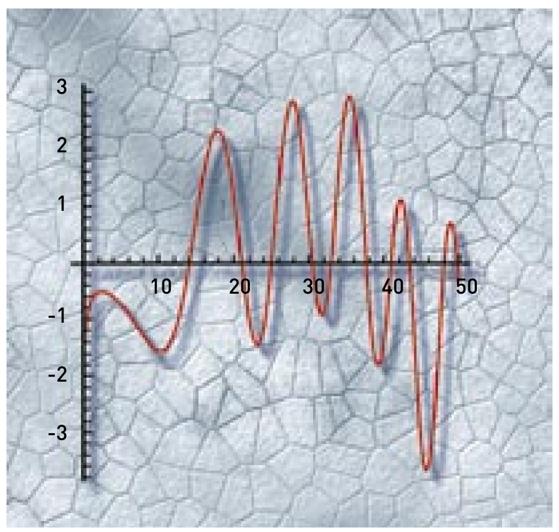
L'hypothèse de Riemann est donc la suivante : « *Les zéros non triviaux de la fonction zêta ont pour partie réelle 1/2.* » Riemann suppose donc que ces zéros sont non seulement dans la bande critique, mais alignés sur la droite d'abscisse 1/2, la « *droite critique* ».
Riemann écrit ensuite : « *Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition — néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue dans le but de notre étude.* » On pourrait en déduire que Riemann considère cette propriété comme accessoire ; mais il faut savoir que les mathématiciens, depuis Euclide, pratiquent la litote jusqu'aux limites de l'hypocrisie… D'autant que Riemann va beaucoup plus loin, et c'est là que son hypothèse prend tout son sens : en se livrant à une véritable déconstruction de sa fonction $\pi(x)$, il utilise la fonction ▷

Fig. 4 **Bande critique**



HORMIS LES SOLUTIONS ÉVIDENTES, les valeurs, pour lesquelles la fonction zêta s'annule, se trouvent sur une bande critique formée des nombres complexes $s = \sigma + it$, où la partie réelle Re(s) = σ et la partie imaginaire Im(s) = *t* sont des nombres réels et où $i = \sqrt{-1}$, tels que $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

Fig. 5 **Les premiers zéros**



CARL LUDWIG SIEGEL a trouvé dans les notes de Riemann une fonction Z(t) dont les zéros sont les mêmes que ceux de la fonction $|\zeta(1/2 + it)|$, et qui prend des valeurs réelles lorsque la variable t est réelle ; on l'appelle la fonction de Riemann-Siegel. Sur cette figure, on a tracé le graphe de cette fonction (qui oscille indéfiniment) sur lequel on voit les premiers zéros.

▷

zêta pour fournir une formule exacte permettant de calculer la distribution des nombres premiers. Et dans cette formule, les zéros de la fonction zêta contrôlent la répartition des nombres premiers ! On lit ainsi sur cette formule que si l'hypothèse de Riemann est vraie, cette répartition suit fidèlement la loi en Li (*x*).

Dans cet article visionnaire, Riemann a indiqué les grandes étapes de sa démarche, sans entrer dans les détails. La rédaction en est si elliptique qu'au début du XX^e siècle d'éminents mathématiciens comme G.H. Hardy à Cambridge en 1915 vont jusqu'à déclarer que Riemann était incapable de démontrer ce qu'il avait écrit. Mais les notes personnelles de Riemann étaient conservées à Göttingen. Dans les années 1930, Carl Ludwig Siegel, à Francfort, réussit à les déchiffrer et publie leur contenu. La conclusion, c'est que Riemann avait bien obtenu des résultats sur les zéros de la fonction zêta, en utilisant des outils dont la publication par Siegel constitua un événement [fig. 5].

C'est en 1896 que Jacques Hadamard, à Paris, et Charles de la Vallée Poussin, à Louvain, en démontrant simultanément certains énoncés de Riemann, établissent que la fonction zêta n'a pas de zéros sur la droite Re (*s*) = 1 (en réalité, ils ont fait mieux : ils ont trouvé des régions [fig. 6] où la fonction zêta n'avait pas de zéro). Les estimations de Legendre et de Gauss sont enfin rigoureusement établies. C'est ce résultat que l'on appelle le « *théorème des nombres premiers* ». On sait que si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors l'écart entre la fonction π (*x*) et le logarithme intégral Li (*x*) est majoré en valeur absolue par un multiple constant de $\sqrt{x} \log x$.

En résumé, les nombres premiers ont une distribution « stochastique » : on a une loi de densité régulière, la probabilité pour qu'un nombre *x* soit premier est de l'ordre de 1/log *x*, mais le comportement local est imprévisible : il y a des oscillations [fig. 3]. En quelque sorte, la distribution des nombres premiers se comporte comme la distribution des molécules dans un gaz parfait. Comme on le verra, cette analogie avec un phénomène physique peut se révéler féconde.

Distribution stochastique

Si l'on veut comprendre ce que signifie l'hypothèse de Riemann, il faut réaliser que la fonction zêta n'est pas la seule de son espèce : c'est le prototype d'une famille très générale de fonctions intervenant en théorie des nombres. Tout d'abord, l'Allemand Gustav Lejeune-Dirichlet avait défini en 1838 des fonctions très proches de la fonction zêta, les fonctions L, données par ce que l'on appelle depuis une « *série de Dirichlet* », définies par des conditions arithmétiques. Elles admettent un prolongement analytique, une équation fonctionnelle, et un développement en produit eulérien. Par exemple, Euler utilise la série $L(s) = 1 - 1/3^s + 1/5^s - 1/7^s + \ldots$ Cette série avait d'ailleurs été étudiée cinquante ans plus tôt par Leibniz, qui avait vu que pour *s* = 1, cette série vaut exactement π/4. Comme elle permet de calculer π, il appela cette formule « *quadrature du cercle* ».

Ensuite, Dirichlet utilise ses fonctions L pour montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique. À peu près en même temps s'édifiait la théorie des nombres algébriques. Ce sont les nombres qui sont solutions d'équations algébriques, comme √2 ou le nombre d'or $\phi = 2 \cos \pi / 5 = (1 + \sqrt{5})/2$. L'idée de corps est à la base de ces travaux : ce sont les collections de nombres complexes (ou d'autres choses) où on peut effectuer les quatre opérations sans sortir de cette collection. Dedekind et Hecke ont défini des fonctions zêta et des fonctions L associées aux corps des nombres algébriques : la fonction zêta qui correspond au corps des nombres rationnels est celle de Riemann. L'hypothèse de Riemann généralisée suppose que toutes ces fonctions ont leurs zéros non triviaux sur la droite critique ; et on estime que l'on ne démontrera jamais l'hypothèse de Riemann sans la démontrer du même coup pour toutes ces familles.

Il y a plusieurs « bonnes raisons » de penser que l'hypothèse de Riemann est vraie.

Il y a plusieurs « bonnes raisons » de penser que l'hypothèse de Riemann est vraie. La première est simplement le résultat des calculs numériques. Représentés sur la figure 4, les cinq premiers zéros de partie imaginaire positive, à quatre décimales près, sont les suivants (rappelons que √-1 s'écrit *i*) :

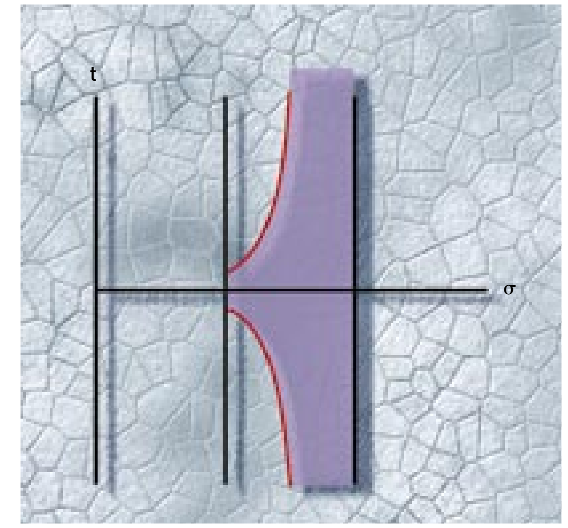
$\rho_1 = 1/2 + i\ 14{,}1347\ldots$
$\rho_2 = 1/2 + i\ 21{,}0220\ldots$
$\rho_3 = 1/2 + i\ 25{,}0108\ldots$
$\rho_4 = 1/2 + i\ 30{,}4248\ldots$
$\rho_5 = 1/2 + i\ 32{,}9350\ldots$

Dans la phrase citée plus haut, Riemann déclare qu'il a trouvé « *un nombre environ égal* » de zéros dans la bande et sur la droite critiques. On n'a toujours pas démontré cette déclaration, mais Hardy a montré en 1914 qu'il y a une infinité de zéros sur la droite critique, et on sait que plus de 40 % des zéros de la fonction zêta sont sur cette droite. De plus, l'hypothèse de Riemann a été vérifiée pour des valeurs numériques de plus en plus élevées, obtenues par calcul sur ordinateur. Les progrès réalisés sont reportés sur la figure 8. Mais ces calculs numériques impressionnants ne prouvent rien : on connaît des phénomènes concernant les nombres entiers qui apparaissent pour des valeurs bien supérieures à toute valeur astronomique imaginable.

Des arguments beaucoup plus sophistiqués — de plus en plus sophistiqués — ont été développés et le sont encore aujourd'hui pour montrer que l'hypothèse de Riemann est vraie. Donnons-en une idée ici. Il y a d'abord les travaux sur les fonctions zêta des corps de fonctions. C'est une démarche classique en mathématiques : quand on ne parvient pas à démontrer directement un problème posé, on cherche à résoudre un problème analogue.

En l'occurrence, on a trouvé depuis la fin du XIX^e siècle un analogue géométrique des corps de nombres, que l'on appelle les corps de fonctions algébriques sur un corps fini[I]. Plus qu'une simple analogie, il s'agit d'un véritable dictionnaire, où les nombres entiers correspondent à des polynômes. Or, en utilisant des méthodes géométriques, André Weil a démontré l'hypothèse de Riemann en 1940 pour les fonctions zêta et L correspondant à ces corps ! Il a généralisé un peu plus tard l'hypothèse de Riemann dans ce cadre géométrique : ce sont les célèbres conjectures de Weil, approfondies dans les années 1960 à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), près de Paris, par Alexandre Grothendieck, et d'autres, et finalement démontrées par Pierre Deligne. Pour démontrer ces conjectures, il a fallu accomplir un programme gigantesque, la théorie des schémas. Ces résultats ont de profondes conséquences aussi bien en théorie des nombres que dans ses applications à la théorie de l'information, pour la cryptographie et les codes correcteurs en particulier[I].

Fig. 6 **Une bande particulière**



LA FONCTION ZÊTA NE S'ANNULE PAS SUR LA DROITE Re(s) = 1. On déduit le théorème des nombres premiers de cette propriété. Jacques Hadamard et Charles de la Vallée Poussin ont vu que la fonction zêta ne s'annule pas sur des régions comme celle représentée ici, qui contient cette droite. Aucune bande du type $u \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, dans laquelle la fonction zêta ne s'annulerait pas, n'est hélas connue.

Espace de Hilbert

Une troisième voie de recherche est ce qu'on appelle l'interprétation spectrale. Si on écrit les zéros de la fonction zêta sous la forme $\rho_n = 1/2 + i\gamma_n$, l'hypothèse de Riemann signifie que tous les nombres γ_n sont des nombres réels. Comment établir qu'une suite de nombres complexes est alignée sur l'axe réel ? La réponse pourrait venir de méthodes élaborées pour l'étude des phénomènes physiques. L'une de ces méthodes est l'analyse fonctionnelle, c'est-à-dire l'étude des équations dont les inconnues sont des fonctions, et l'espace euclidien est remplacé par l'espace de Hilbert. Pour comprendre

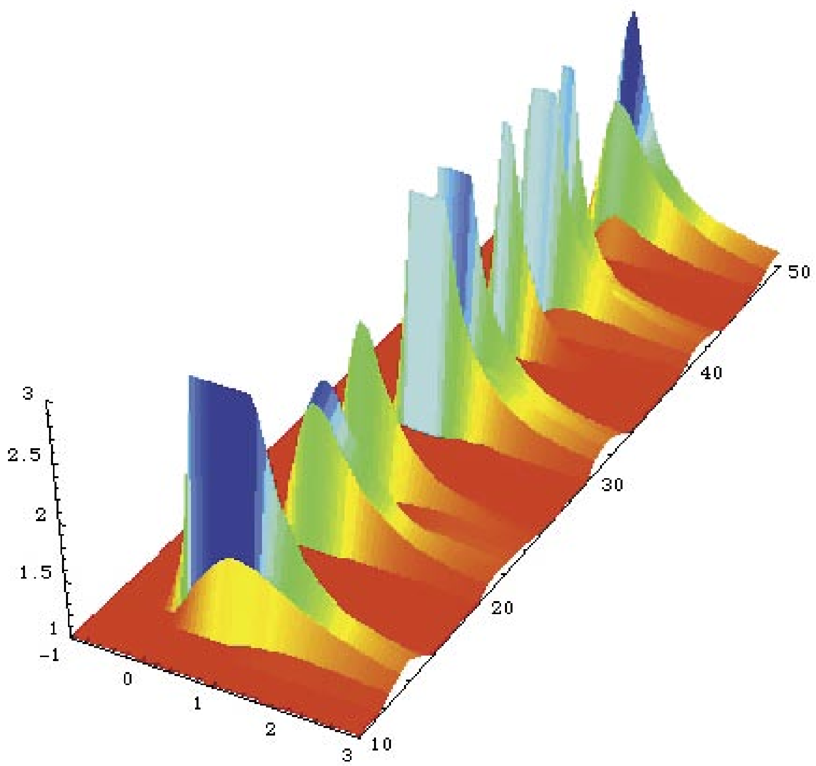
▷

La Recherche a publié :
[I] Gilles Lachaud et Serge Vladut, « Les codes correcteurs d'erreurs », juillet-août 1995.
[II] Daniel Barsky et Gilles Christol, « Les nombres p-adiques », juillet-août 1999.
Ces articles ont été repris dans le numéro hors série de *La Recherche* d'août 1999.

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES
NOMBRES PREMIERS

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES
NOMBRES PREMIERS

Fig. 7 **Les pics sont des zéros**



DANS CETTE FIGURE, LE PLAN HORIZONTAL EST CELUI DE LA VARIABLE COMPLEXE $s = \sigma + it$. Sur un rectangle contenant une partie de la bande critique $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, on a reporté en altitude la valeur de la fonction $1/|\zeta(s)|$, qui est infinie si $|\zeta(s)| = 0$. Les zéros de la fonction zêta apparaissent ainsi comme des pics sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. La couleur (du rouge vers le bleu) est définie par l'altitude.

ce qu'est un espace de Hilbert, on peut partir de la description d'un signal. La plupart des systèmes vibratoires, le son, la lumière, les vagues, un signal quelconque, s'expriment comme une superposition de signaux de base :

$a_1 \cos(\omega_1 u) + a_2 \cos(\omega_2 u)$ + etc.

avec des coefficients d'amplitude a_1, etc. et des pulsations ω_1 etc., qui sont des nombres réels.

Un signal s'écrit comme une superposition finie ou infinie de signaux élémentaires $\cos(\omega_1 u)$,… qui sont les vibrations propres ou les états propres du système. En acoustique, les états propres sont les sons purs, en optique, ce sont les ondes monochromatiques, etc. La collection de tous ces signaux généraux, lorsqu'on prend toutes les amplitudes possibles, sous réserve que la somme des carrés des valeurs absolues de ces amplitudes soit finie, forme ce que l'on appelle un espace de Hilbert.

Or, Riemann lui-même observe que la formule explicite qu'il a obtenue montre que les déviations par rapport à la loi en 1/log *x* de la densité des nombres premiers sont régies par une fonction ayant la forme d'une onde :

$\cos(\gamma_1 u) + \cos(\gamma_2 u) + \cos(\gamma_3 u) + \ldots$

dont les pulsations sont les nombres γ_n. Comme le disent M. Berry et J.P. Keating, de Bristol, les nombres γ_n sont les harmoniques de la musique des nombres premiers !

Dans un tel système, la seule chose qui puisse changer, ce sont les proportions relatives de chaque vibration propre, c'est-à-dire les amplitudes. Le changement entre deux états est effectué par un opérateur, qui est une manière d'agir, ou d'opérer sur ces signaux ; pour un tel opérateur, on suppose que le résultat de l'opération est proportionnel aux données de départ, autrement dit que l'opérateur est linéaire. S'il n'y a qu'un nombre fini d'états, donc un nombre fini de coefficients, les opérateurs sont des matrices. Les opérateurs qui rendent compte de phénomènes physiques concrets ont un spectre des fréquences réel.

Les pulsations propres d'un système

Il était tentant de voir les nombres γ_n comme les pulsations propres d'un système. On raconte que Hilbert, pendant l'un de ses cours, et après avoir démontré que certains opérateurs (ceux qui sont symétriques) ont un spectre réel, aurait ajouté : *« Et avec ce théorème, messieurs, nous démontrerons l'hypothèse de Riemann !»* En effet, si l'on trouve un opérateur dont le spectre, d'une part, est réel, et qui est, d'autre part, exactement composé des nombres γ_n, l'hypothèse de Riemann est démontrée ! Quelques années plus tard, cette idée a été mise en forme par George Pólya, qui travaillait à Zurich. On a aujourd'hui de bonnes raisons de penser qu'il existe effectivement un tel *« opérateur de Pólya-Hilbert »*. Il ne reste plus qu'à le trouver…

Hugh Montgomery, de l'université du Michigan, avait calculé en 1972, en admettant l'hypothèse de Riemann, la fluctuation des espacements entre les zéros de la fonction zêta. En discutant avec le physicien Freeman Dyson, celui-ci a immédiatement reconnu les caractéristiques d'une structure, l'ensemble GUE (Gaussian Unitary Ensemble), qui est un espace de matrices aléatoires utilisé pour décrire les systèmes à un grand nombre de particules. Les résultats de Montgomery ont été vérifiés expérimentalement par Andrew Odlyzko, du Bell Laboratory. La coïncidence des résultats est frappante. Ces observations ont conduit plus récemment Berry et Keating, déjà évoqués, à supposer que les zéros de la fonction zêta correspondent exactement aux valeurs propres (niveaux d'énergie) d'un hypothétique système mécanique quantique dont les trajectoires sont chaotiques, ce qui fournirait immédiatement l'opérateur désiré.

Les idées les plus profondes de la théorie des nombres présentent une ressemblance considérable avec celles de la physique théorique moderne.

En outre, Bernard Julia, à Paris, a exprimé vers 1990 la fonction zêta de Riemann comme la fonction de partition thermodynamique d'un certain *« gaz parfait abstrait »* construit à partir des nombres premiers. En s'inspirant de cette observation, Jean-Benoît Bost et Alain Connes, à l'IHES, construisent en 1992 un système dynamique quantique dont la fonction de partition est la fonction zêta de Riemann. Leur construction utilise l'anneau des *adèles*. De quoi s'agit-il ? Pour chaque nombre premier *p*, on dispose des nombres *p*-adiques, qui sont la généralisation de l'écriture d'un entier en base *p*[11]. L'anneau des adèles est un espace à une infinité de degrés de liberté, autrement dit de dimensions, formé avec le produit du corps des nombres réels et de tous les corps p-adiques. Cet espace énorme et bizarre a néanmoins des propriétés naturelles et très commodes pour les calculs : on peut y faire du calcul intégral, et les nombres rationnels y sont présents de manière discontinue ou, comme on dit, discrète. En outre, les fonctions zêta et les fonctions L (des corps de nombres comme des corps de fonctions), s'expriment par des intégrales très simples sur cet anneau, ce qui permet de retrouver leurs principales propriétés : c'était le sujet de la thèse de John Tate, en 1950.

Or, en 1996, Connes a construit pour chaque fonction L un opérateur, sur un espace de fonctions où la variable est adélique, dont le spectre était exactement l'ensemble des nombres réels γ_n tels que $L(1/2 + i\gamma_n) = 0$. Si on pouvait établir, par une autre voie, que ce spectre comprend tous les zéros sans exception, on démontrerait immédiatement l'hypothèse de Riemann ! En attendant, son résultat fournit en passant une nouvelle démonstration de l'infinitude des zéros sur la droite critique.

Analogie troublante

Après tous ces arguments, on a l'impression d'être à la veille de la démonstration de l'hypothèse. Néanmoins, l'opinion générale est qu'il manque encore un maillon essentiel dans nos connaissances actuelles pour arriver à un projet de démonstration plausible. Il vaut mieux rester prudent : tant qu'on n'a pas traversé le fleuve, on ne sait pas si on peut atteindre la rive opposée sans encombre, ou bien si le courant du Styx nous entraîne vers les enfers du triptyque de Jérôme Bosch. Il n'en reste pas moins que l'analogie entre la répartition des nombres premiers et un phénomène physique est troublante. Comme le dit Youri Manine, directeur de l'Institut Max Planck de Bonn, à la dernière page de son livre *Mathématiques et physique* : *« Les idées les plus profondes de la théorie des nombres présentent une ressemblance considérable avec celles de la physique théorique moderne. Comme la mécanique quantique, la théorie des nombres fournit des modèles de relations entre le discret et le continu, et met en valeur le rôle des symétries cachées. On souhaiterait espérer que cette ressemblance ne soit pas fortuite, et que nous soyons en train d'apprendre de nouveaux mots sur le monde dans lequel nous vivons, dont nous ne comprenons pas encore le sens. »* ■ G. L.

Fig. 8 **Repères chronologiques**

date	auteur	n premiers zéros
1903	Gram	15
1914	Backlund	79
1925	Hutchinson	138
1936	Titchmarsh et al.	1 041
1953	Turing	1 104
1956	Lehmer	25 000
1958	Meller	35 337
1966	Lehman	250 000
1969	Rosser et al.	3 500 000
1979	Brent	81 000 001
1986	van de Lune et al.	1 500 000 000

ON A REPORTÉ DANS CE TABLEAU LES DATES CLÉS des différentes vérifications numériques de l'hypothèse de Riemann depuis le début du XXe siècle.

POUR EN SAVOIR PLUS

▷ R. Godement, *Analyse mathématique IV*, Springer, 2003.
▷ G. Tenenbaum, M. Mendès-France, *Les Nombres premiers*, « Que sais-je ? » n° 571, Paris, Presses universitaires de France, 1997.
▷ S.J. Patterson, « An introduction to the theory of the Riemann zeta function », n° 14, Cambridge University Press, 1995.
▷ www.larecherche.fr

Cet article est la version revue et mise à jour par son auteur du texte paru dans le n° 346 de *La Recherche*.