

Paris, centre du monde ?

Quel est l'aéroport le plus important du monde ? Contrairement à une idée répandue, la réponse ne devrait sans doute pas être seulement déduite du nombre de voyageurs ou d'avions qui y passent. L'étude globale du réseau aérien mondial a conduit quatre chercheurs à envisager la question sous un autre angle, celui des connexions entre les différentes destinations de par le monde. Avec cette approche, il apparaît que Paris (tous aéroports confondus) est la ville la plus « centrale » bien que l'on n'y enregistre pas le plus gros volume de voyageurs.

➔ R. Guimera et al., *PNAS*, 102, 7794, 2005.

1,72864

UN NOMBRE ENTIER n ÉTANT DONNÉ, DE COMBIEN DE MANIÈRES DIFFÉRENTES

peut-on l'écrire comme produit de nombres entiers tous différents de 1 ? Martin Klazar, de l'université de Prague, et Florian Luca, de l'université nationale autonome de Mexico, viennent de trouver une formule pour estimer ce nombre en fonction de n . Cette formule implique notamment le nombre x , solution de l'équation $\zeta(x) = 2$, où ζ est une célèbre fonction mathématique appelée fonction de Riemann à laquelle sont reliés beaucoup de problèmes de théorie des nombres. Ce nombre x vaut approximativement 1,72864.

➔ <http://fr.arxiv.org/abs/math.NI/0505352>

Codage de protéines

Une protéine étant un objet tridimensionnel, comment l'information nécessaire pour qu'il acquière la bonne forme est-elle contenue dans le gène responsable de sa formation ? Afin de mieux comprendre comment on peut coder des informations structurales avec peu d'éléments, le japonais Naoto Morikawa propose une nouvelle méthode d'encodage des structures tridimensionnelles en équivalence binaire. Cette méthode est fondée sur l'approximation de la forme et la protéine par une réunion de plusieurs tétraèdres. Chaque acide aminé est représenté par plusieurs tétraèdres et l'ensemble des tétraèdres est replié et sorte à obtenir une bonne approximation de la forme de la protéine. L'auteur obtient ainsi une méthode systématique de codage d'une forme tridimensionnelle en une suite de 0 et 1.

➔ <http://fr.arxiv.org/abs/math.CO/0506082>

Les rebonds d'une boule de billard

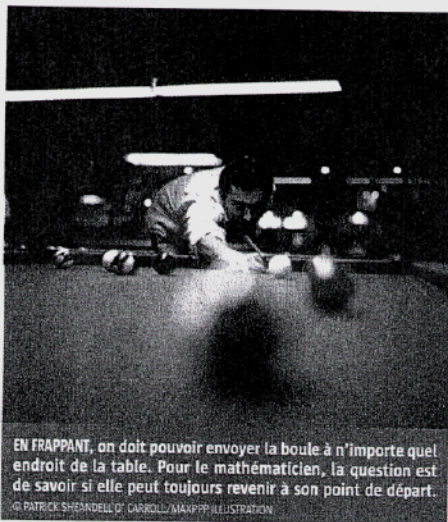
SYSTÈMES DYNAMIQUES

Au billard, est-il toujours possible de frapper la boule de façon à obtenir des trajectoires qui se referment sur elles-mêmes ? Lorsque la table est triangulaire et non rectangulaire, le problème se complique. Un premier résultat vient d'être obtenu.

Les joueurs ne sont pas les seuls à s'intéresser aux trajectoires des boules de billard : les mathématiciens y trouvent eux aussi matière à réflexion. Mais si les joueurs de billard s'intéressent avant tout à la façon de donner à leurs boules une trajectoire qui les amène exactement là où ils le souhaitent, les mathématiciens, eux, cherchent à mettre au jour des propriétés plus générales.

Qu'est-ce qu'un billard pour le mathématicien ? C'est la donnée d'une région du plan, pas nécessairement rectangulaire, et d'une boule supposée ponctuelle. La boule se déplace en ligne droite à vitesse constante et rebondit sur les bords du billard selon la loi classique de la réflexion parfaitement élastique, selon laquelle « l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence » [fig. ci-dessous].

LA LOI DE LA RÉFLEXION. Une boule rebondissant sans effet sur le bord du billard en A selon un angle u repart selon le même angle u . ➔



EN FRAPPANT, on doit pouvoir envoyer la boule à n'importe quel endroit de la table. Pour le mathématicien, la question est de savoir si elle peut toujours revenir à son point de départ.

IG. PATRICK SHEPARD/ILLUSTRATION

L'une des principales questions n'est pas de savoir comment lancer la boule pour qu'elle atteigne un point donné après avoir touché trois bandes, mais de savoir s'il existe des « trajectoires périodiques », c'est-à-dire des moyens de placer la boule et de la lancer pour que son chemin dessine une boucle qu'elle parcourt indéfini-

périodiques. Le cas le plus simple est celui du billard carré. Montrer que, quel que soit l'endroit d'où part la boule, on peut orienter le lancer de multiples façons pour obtenir des trajectoires périodiques est un exercice de géométrie assez facile. Les choses se compliquent lorsque l'on considère des tables de formes plus diverses.

On sait depuis 1998 et les travaux de Michael Boshernitzan de l'université Rice, au Texas, et ses collègues allemands de l'université de Bielefeld, qu'il existe toujours « beaucoup » de trajectoires périodiques pour tout billard polygonal « rationnel ». Il s'agit de billards dont les angles entre côtés adjacents sont des nombres rationnels (autrement dit, des nombres s'exprimant comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers, les angles étant mesurés en degrés).

Serge Troubetzkoy, de l'université de la Méditerranée à Marseille, vient d'obtenir un résultat significatif sur d'autres billards, ceux en forme de triangle rectangle dont les mesures des angles ne sont plus des nombres rationnels (sauf pour l'angle droit). Il a montré que pour ces billards aussi, il existe des trajectoires périodiques, et en grande quantité [1]. La question, qui reste ouverte, de savoir s'il existe toujours au moins une trajectoire périodique quel que soit le billard polygonal considéré, reçoit ainsi une nouvelle réponse partielle. ■ Benoit Rittaud

[1] <http://fr.arxiv.org/abs/math.DS/0505637>

